МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1988

УДК 531.391.5

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

ЛИБЕРЗОН М. Р.

Исследуется движение в воздухе осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата. Построена математическая модель, учитывающая нестационарность обтекания аппарата, эффекты типа эффекта Магнуса, а также нестационарность скорости центра масс и зависящей от нее угловой скорости крена. Получено достаточное условие абсолютной устойчивости нестационарных режимов движения.

1. Движение в воздухе осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата изучено в [1–4]. В [5, 6] решается задача об устойчивости нестационарных движений такого аппарата, причем учитываются эффекты типа эффекта Магнуса [7], вызванные наличием оперения и вращением объекта вокруг собственной оси симметрии. В настоящей работе в уравнения движения вводятся нестационарные элементы, позволяющие учесть как случайные изменения зависящих от времени скорости центра масс и угловой скорости крена, так и взаимосвязь между ними. Задача об абсолютной устойчивости полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений с неполной информацией о параметрах решается с помощью иннорного признака абсолютной устойчивости [8].

Относительно рассматриваемого движения будем придерживаться предположений, в основном совпадающих с [5, 6], а именно: полет близок к прямолинейному горизонтальному; массовые и геометрические характеристики аппарата постоянны, а его центральный эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения; сила тяги направлена вдоль оси симметрии; вращение вокруг оси симметрии обусловлено косопоставленными хвостовыми стабилизаторами; все аэродинамические коэффициенты в течение полета остаются постоянными. Необходимо обеспечить правильность полета [1, 2], т. е. достаточно точное отслеживание осью симметрии аппарата переменного направления вектора скорости центра масс.

Движение аппарата вокруг его центра масс будем рассматривать относительно полусвязанной системы координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс, а ось Ox совпадает с осью симметрии аппарата. Система координат $Oxyz$ колеблется вместе с осью симметрии, но не участвует во вращении вокруг нее. Полученные на основе общепринятой методики [1–4] уравнения малых колебаний оси симметрии летательного аппарата в проекциях на оси x, y, z имеют вид [5, 6]:

$$\begin{gathered}\alpha'=\omega_z-c_\alpha\alpha+c_{\alpha M}\omega_x\beta+c_\delta\delta_y+Lg/V^2\\ \omega_z'=I\omega_x\omega_y+m_\alpha\alpha+m_{\alpha M}\omega_x\beta-m_\omega\omega_z-m_\delta\delta_y\\ \beta'=\omega_y-c_\alpha\beta-c_{\alpha M}\omega_x\alpha+c_\delta\delta_z,\\ \omega_y'=-I\omega_x\omega_z+m_\alpha\beta-m_{\alpha M}\omega_x\alpha-m_\omega\omega_y-m_\delta\delta_z\end{gathered}\tag{1.1}$$

где α и β – углы атаки и скольжения, ω_z и ω_y — безразмерные угловые скорости поперечных колебаний оси симметрии, ω_x — безразмерная угловая скорость вращения вокруг оси симметрии (угловая скорость крена), V — скорость центра масса аппарата, L — длина аппарата, $I=I_x/I_y$ — отношение осевого и поперечного (экваториального) моментов инерции, c_α и $c_{\alpha M}$ — приведенные аэродинамические коэффициенты подъемной силы и силы Магнуса (учтены и эффекты [7], вызванные наличием оперения и вращением вокруг оси симметрии летательного аппарата), m_α, m_ω и $m_{\alpha M}$ — приведенные аэродинамические коэффициенты восстанавливающего момента, демпфирующего момента и момента силы Магнуса, δ_y и δ_z — относительные управляющие команды в каналах тангажа и курса, c_δ и m_δ — приведенные аэродинамические коэффициенты управляющей силы и управляющего момента. Дифференцирование производится по безразмерному времени τ, которое связано с действительным временем t дифференциальным соотношением $d\tau = V dt/L$.

Если летательный аппарат обладает статической устойчивостью, то

$$m_\alpha < 0,\ c_\alpha > 0,\ m_\omega > 0 \tag{1.2}$$

Существует такой стационарный режим движения летательного аппарата, называемый балансировочным [3, 4], при котором остаются постоянными скорость центра масс V и угловая скорость крена ω_x, центр масс аппарата перемещается прямолинейно, а его ось симметрии сохраняет постоянную ориентацию:

$$V = V^\circ,\ \omega_x = \omega_x^\circ,\ \alpha = \alpha^\circ,\ \beta = \beta^\circ,\ \omega_z = \omega_y = 0 \tag{1.3}$$

Балансировочный режим полета осуществляется при некоторых постоянных управлениях $\delta_y = \delta_y^\circ$, $\delta_z = \delta_z^\circ$.

Одним из необходимых условий правильности полета [1, 2, 5, 6] является устойчивость по Ляпунову балансировочного режима при стационарных движениях. В [5, 6] приводится следующее необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости балансировочного режима (1.3):

$$(\omega_x^\circ)^2[m_{\alpha M}^2 + m_{\alpha M}(c_\alpha - m_\omega)(I - c_{\alpha M}) - c_\alpha m_\omega (I - c_{\alpha M})^2] < (c_\alpha + m_\omega)^2 (c_\alpha m_\omega - m_\alpha) \tag{1.4}$$

При исследовании устойчивости балансировочного режима (1.3) в [5, 6] отмечено, что в условиях реального полета скорость центра масс $V(\tau)$ и угловая скорость крена $\omega_x(\tau)$ не постоянны. На скорость центра масс $V(\tau)$ влияют нестационарность силы тяги, порывы ветра, неоднородная плотность атмосферы и т. д. Угловая скорость крена $\omega_x(\tau)$ зависит от величины $V(\tau)$ и определяется моментом крена M_x, который не может быть ни рассчитан, ни представлен аналитически из-за сложности явлений, происходящих при аэродинамических взаимодействиях управляющих поверхностей или газовых рулей с оперением, обеспечивающим вращение аппарата вокруг оси симметрии.

Для того, чтобы учесть указанные факторы, в [5, 6] предполагаются известными только пределы изменения величин $V(\tau)$ и $\omega_x(\tau)$ и в рамках этих допущений исследуется устойчивость рассматриваемого движения. Ввиду того, что полная информация о величинах $V(\tau)$ и $\omega_x(\tau)$ отсутствует, ставится задача об абсолютной устойчивости системы (1.1) в классе произвольных функций $\omega_x(\tau)$, удовлетворяющих ограничениям $\omega_x^- \leqslant \omega_x(\tau) \leqslant \omega_x^+$. В результате решения этой задачи выясняется, что полная область абсолютной устойчивости определяется неравенством (1.4), в которое вместо ω_x° подставлено число ω_x^+. Однако при таком подходе остается невыявленным характер зависимости угловой скорости крена $\omega_x(\tau)$ от скорости центра масс $V(\tau)$. Кроме того, изучаемые уравнения в отклонениях не содержат явно функцию $V(\tau)$, поэтому не удается выяснить влияние пределов изменения этой величины на область абсолютной устойчивости.

2. Перейдем к построению математической модели движения осесимметричного вращающегося летательного аппарата в воздухе, которая включает перечисленные выше взаимосвязи случайным образом изменяющихся величин.

Отклонение величины скорости центра масс от ее значения V° при балансировочном режиме полета может характеризоваться некоторым ограниченным возмущением $v(\tau)$:

$$V(\tau)=V^{\circ}+v(\tau) \tag{2.1}$$

О функции времени $v(\tau)$ известно, что она непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|v(\tau)|\leqslant a \quad (a>0) \tag{2.2}$$

Угловая скорость крена $\omega_x(\tau)$ зависит от величины $V(\tau)$. В [7] показано, что в некотором диапазоне изменения скорости центра масс угловая скорость крена ей пропорциональна. Однако коэффициент пропорциональности существенно меняется в зависимости от режима полета (скорость аппарата, угол атаки, угол скольжения), аэродинамических характеристик полета (процесс обтекания стабилизаторов, движение пограничного слоя), геометрии летательного аппарата (угол отклонения косопоставленных хвостовых стабилизаторов, их форма и размеры) и других факторов. При установившемся движении этот коэффициент может быть вычислен с большой степенью точности. В рассматриваемой задаче исследования нестационарного полета представим его как некоторую ограниченную функцию времени $k(\tau)$:

$$0\leqslant k(\tau)\leqslant K \quad (K>0) \tag{2.3}$$

Тогда зависимость угловой скорости крена $\omega_x(\tau)$ от скорости центра масс $V(\tau)$ принимает вид

$$\omega_x(\tau)=k(\tau)V(\tau)=k(\tau)(V^{\circ}+v(\tau)) \tag{2.4}$$

Для исследования устойчивости вынужденного движения $\alpha(\tau)$, $\omega_z(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\omega_y(\tau)$, вызванного управляющими воздействиями $\delta_y(\tau)$ и $\delta_z(\tau)$, выпишем уравнения в отклонениях, соответствующие системе (1.1). Система (1.1) линейна, а величины Lg/V^2, $\delta_y(\tau)$, $\delta_z(\tau)$ входят в уравнения аддитивно, поэтому, как известно из теории устойчивости, уравнения в отклонениях при любой конкретизации функций $\omega_x(\tau)$ и $V(\tau)$ будут совпадать с однородной частью системы (1.1). Причем, согласно свойствам линейных систем дифференциальных уравнений, асимптотическая устойчивость тривиального решения однородной системы уравнений в отклонениях влечет устойчивость решений неоднородной системы (1.1) при любых значениях членов Lg/V^2, δ_y, δ_z.

С учетом выражений (2.1) и (2.4) для функций $\omega_x(\tau)$ и $V(\tau)$ представим уравнения в отклонениях в виде следующей системы дифференциальных уравнений с нестационарными коэффициентами:

$$\begin{gathered}
\alpha'=\omega_z-c_\alpha\alpha+c_{\alpha M}V^{\circ}k(\tau)\beta+c_{\alpha M}k(\tau)v(\tau)\beta\\
\omega_z'=IV^{\circ}k(\tau)\omega_y+Ik(\tau)v(\tau)\omega_y+m_\alpha\alpha+\\
+m_{\alpha M}V^{\circ}k(\tau)\beta+m_{\alpha M}k(\tau)v(\tau)\beta-m_\omega\omega_z\\
\beta'=\omega_y-c_\alpha\beta-c_{\alpha M}V^{\circ}k(\tau)\alpha-c_{\alpha M}k(\tau)v(\tau)\alpha\\
\omega_y'=-IV^{\circ}k(\tau)\omega_z-Ik(\tau)v(\tau)\omega_z+m_\alpha\beta-m_{\alpha M}V^{\circ}k(\tau)\alpha-m_{\alpha M}k(\tau)v(\tau)\alpha-m_\omega\omega_y
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Требуется найти условия абсолютной устойчивости системы (2.5) в классе функций $k(\tau)$ и $v(\tau)$, удовлетворяющих неравенствам (2.2) и (2.3), т. е. условия асимптотической устойчивости в целом тривиального решения $\alpha=0$, $\omega_z=0$, $\beta=0$, $\omega_y=0$ системы (2.5) при любом выборе функций $k(\tau)$ и $v(\tau)$, удовлетворяющих неравенствам (2.2) и (2.3) (предполагается, что функции $k(\tau)$ и $v(\tau)$ обеспечивают существование и единственность решения системы (2.5)).

3. Исследование абсолютной устойчивости системы (2.5) в классе допустимых функций времени $k(\tau)$ и $v(\tau)$ может быть проведено различными методами (см. [9, 10]). Воспользуемся признаком абсолютной устойчивости [8].

Заменим систему (2.5) дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$x^{IV}+p_4(u_1, u_2)x'''+p_3(u_1, u_2)x''+p_2(u_1, u_2)x'+p_1(u_1, u_2)x=0 \quad (3.1)$$

$$p_1(u_1, u_2)=K^2f^2[(c_\alpha I+m_{\alpha M})^2+c_{\alpha M}m_\omega(c_{\alpha M}m_\omega+ +2m_{\alpha M})]+(c_{\alpha M}K^2If^2+m_\alpha)^2+c_\alpha m_\omega(c_\alpha m_\omega-2m_\alpha)$$

$$p_2(u_1, u_2)=2K^2f^2[I(c_\alpha I+m_{\alpha M})+c_{\alpha M}(c_{\alpha M}m_\omega+m_{\alpha M})]+ +2(c_\alpha+m_\omega)(c_\alpha m_\omega-m_\alpha)$$

$$p_3(u_1, u_2)=K^2f^2(I^2+c_{\alpha M}^2)+(c_\alpha+m_\omega)^2+2(c_\alpha m_\omega-m_\alpha)$$

$$p_4(u_1, u_2)=2(c_\alpha+m_\omega),\ f=V^\circ/2-V^\circ u_1(\tau)/2+au_2(\tau)$$

$$u_1=u_1(\tau)=(K-2k(\tau))/K,\ u_2=u_2(\tau)=k(\tau)v(\tau)/Ka$$

$$|u_1(\tau)|\leqslant 1,\quad |u_2(\tau)|\leqslant 1 \quad (3.2)$$

$$-a\leqslant f\leqslant V^\circ+a \quad (3.3)$$

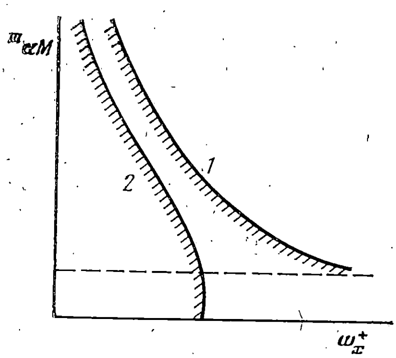
Задача состоит в определении условий абсолютной устойчивости уравнения (3.1) в классе произвольных возмущений $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$, удовлетворяющих неравенствам (3.2).

Признак абсолютной устойчивости [8] с учетом статической устойчивости летательного аппарата (1.2) и пределов изменения (3.3) вспомогательной функции f переменных $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ дает следующее достаточное условие абсолютной устойчивости:

$$(c_\alpha-m_\omega)^2+4m_\alpha>2K^2(V^\circ+a)^2(I^2+c_{\alpha M}^2) \quad (3.4)$$

$$[K^2a^2(I^2+c_{\alpha M}^2)+(c_\alpha+m_\omega)^2+2(c_\alpha m_\omega-m_\alpha)]^2+ \quad (3.5)$$
$$+4K^2a^2[I(c_\alpha I+m_{\alpha M})+c_{\alpha M}(c_{\alpha M}m_\omega+m_{\alpha M})](c_\alpha+m_\omega)>$$
$$>2K^2(V^\circ+a)^2[(I^2+c_{\alpha M}^2)(c_\alpha+m_\omega)^2+2(c_\alpha I+m_{\alpha M})^2+$$
$$+2c_{\alpha M}m_\omega(c_{\alpha M}m_\omega+2m_{\alpha M})]+2(c_\alpha+m_\omega)^4+$$
$$+4[c_{\alpha M}K^2(V^\circ+a)^2I+m_\alpha]^2+4c_\alpha m_\omega(c_\alpha m_\omega-2m_\alpha)$$

Таким образом, одновременное выполнение неравенств (3.4) и (3.5) гарантирует абсолютную устойчивость дифференциального уравнения (3.1) в классе возмущений $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$, определяемом соотношениями (3.2), или, что то же, абсолютную устойчивость системы (2.5) в классе функций $k(\tau)$ и $v(\tau)$, удовлетворяющих неравенствам (2.2) и (2.3).



Качественная картина расположения областей устойчивости управляемого движения в воздухе осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата показана на фигуре. Выбрана плоскость параметров (ω_x^+, $m_{\alpha M}$), остальные параметры считаются фиксированными. В случае стационарного обтекания полная область устойчивости ограничена координатными осями и кривой *1* [5]. В рамках принятой в [5, 6] математической модели предложение о нестационарности обтекания, как показано в [6], не изменяет области устойчивости. Предложенная в настоящей работе математическая модель нестационарных вынужденных движений позволяет учесть соотношения (2.1)—(2.4) между характеристиками полета, но приводит лишь к достаточным условиям устойчивости (3.4), (3.5). Соответствующая область на фигуре лежит между осями координат и кривой *2*. Вопрос об определении полной области устойчивости в этом случае остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М.* Теория полета неуправляемых ракет. М.: Физматгиз, 1959. 360 с.
2. *Боднер В. А.* Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964. 698 с.

3. *Святодух В. К.* Динамика пространственного движения управляемых ракет. М.: Машиностроение, 1969. 270 с.
4. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
5. *Жермоленко В. Н., Локшин Б. Я.* Об устойчивости нестационарных движений осесимметричного вращающегося летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 5. С. 32—39.
6. *Скородинский В. И.* Абсолютная устойчивость нестационарных движений осесимметричного вращающегося летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 17—21.
7. *Benton E. R.* Sypersonic Magnus effect on a finned missile // AIAA Journal, 1964. V. 2. No. 1. C. 153—155 // Русск. перев.: Ракетн. техника и космонавтика. 1964. № 1. С. 197—199.
8. *Либерзон М. Р.* Признак абсолютной устойчивости нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 39—46.
9. *Пятницкий Е. С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1968. № 6. С. 5—36.
10. *Либерзон М. Р.* Новые результаты по абсолютной устойчивости нестационарных регулируемых систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 29—48.

Москва

Поступила в редакцию
3.XI.1986