МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

УДК 539.3

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОМ ПИКООБРАЗНОМ ВКЛЮЧЕНИИ

ЕМЕЛЬЯНОВ А. П., ПАУКШТО М. В.

Методом граничных интегральных уравнений исследуется задача кручения упругого цилиндра с модулем сдвига μ_- армированного упругим стержнем с модулем сдвига μ_+ и поперечным сечением G^+ пикообразной формы, диаметр которого предполагается много меньшим диаметра поперечного сечения цилиндра. Граничное значение функции кручения получается в виде ряда последовательных приближений по степеням параметра $\lambda=(\mu_+-\mu_-)/(\mu_++\mu_-)$, сходящегося при достаточно малых $|\lambda|$ в пространстве гладких функций, если на границе G^+ нет угловых точек, а порядок касания в точках заострения достаточно высок. Это позволяет представить граничные значения напряжений с помощью почленно продифференцированного ряда. При наличии рациональной функции, осуществляющей конформное отображение единичного круга на G^+ (или его внешности на внешность G^+), получаются простые расчетные формулы. В качестве примера рассмотрено гипоциклоидальное поперечное сечение G^+ и приведены эпюры напряжений, соответствующие сумме первых двух членов ряда последовательных приближений.

1. Рассмотрим задачу кручения упругого цилиндра с модулем сдвига μ_-, армированного упругим стержнем с модулем сдвига μ_+, поперечным сечением которого является односвязная область G^+ с кусочно-гладкой границей Γ, имеющей точки заострения (угловые точки пока не исключаются). Предположим для простоты, что диаметр G^+ много меньше диаметра цилиндра, так что можно считать его поперечным сечением плоскость $\mathbb{C}$ с включением G^+.

Найдем сначала функцию кручения F, т. е. кусочно-аналитическую функцию с линией скачков Γ, стремящуюся к нулю на бесконечности и удовлетворяющую на Γ граничным условиям [1, 2]:

$$F_+(t)+\overline{F_+(t)}=F_-(t)+\overline{F_-(t)} \tag{1.1}$$

$$\mu_+[F_+(t)-\overline{F_+(t)}]-\mu_-[F_-(t)-\overline{F_-(t)}]=(\mu_+-\mu_-)g(t) \tag{1.2}$$

где $g(t)=i|t|^2$. Условие (1.1) выражает непрерывность смещений, а условие (1.2) — уравновешенность усилий, действующих на элементы боковой поверхности армирующего стержня.

Умножив (1.1) на μ_+ и сложив с (1.2), получим условие, равносильное условиям (1.1), (1.2):

$$\frac{2\mu_+}{\mu_++\mu_-}F_+(t)-F_-(t)-\lambda\overline{F_-(t)}=\lambda g(t),\quad t\in\Gamma \tag{1.3}$$

$$\lambda=(\mu_+-\mu_-)/(\mu_++\mu_-)$$

Применение к (1.3) интегрального оператора Коши

$$(Kf)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)}{t-z}dt,\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$$

приводит к функциональному уравнению во внешней по отношению к G^+ области $G^-=\mathbb{C}\setminus\overline{G}^+$:

$$F(z)-\lambda(K\overline{F}_-)(z)=\lambda(Kg)(z) \tag{1.4}$$

которое аналогично уравнению, использовавшемуся Д. И. Шерманом при решении некоторых конкретных задач кручения (см., например, [2]). Переходя здесь к предельным значениям, получим граничное сингулярное интегральное уравнение

$$F_-(t)-\lambda(S\bar{F}_-)(t)=\lambda(Sg)(t), \quad t\in\Gamma$$
$$(Sf)(t)=\lim_{G^-\ni z\to t}(Kf)(z)$$

Вводя тождественный оператор $If=f$ и оператор комплексного сопряжения $Vf=\bar{f}$, это уравнение можно записать в виде

$$(I-\lambda SV)F_-=\lambda Sg \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.5) при достаточно малых $|\lambda|$ представляется рядом Неймана

$$F_-(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu+1}(SV)^{\nu}(Sg)(t), \quad |\lambda|<\frac{1}{\|S\|} \tag{1.6}$$

сходящимся в том банаховом пространстве функций на Г, где: 1°. оператор S действует непрерывно; 2°. оператор V действует непрерывно; 3°. содержится функция g. Под $\|S\|$ понимается норма оператора S в этом пространстве.

Например, пространство $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ функций, удовлетворяющих на Г условию Гёльдера с показателем $\alpha\in(0, 1)$, с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)}=\max_{t\in\Gamma}|f(t)|+\sup_{t_1,t_2\in\Gamma}\frac{|f(t_1)-f(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}$$

обладает свойствами 1°—3°. Отсюда вытекает

Теорема 1. Граничное значение F_- функции кручения для задачи (1.1), (1.2) на любом кусочно-гладком контуре Г удовлетворяет условию Гёльдера с произвольным показателем $\alpha\in(0, 1)$ и представляется равномерно сходящимся относительно $t\in\Gamma$ рядом (1.6) при достаточно малых $|\lambda|$.

2. Основной интерес представляет поведение напряжений в окрестности узла линии Г, которые связаны с функцией кручения формулой

$$\tau_{xz}(w)-i\tau_{yz}(w)=\mu_-\varkappa[F'(w)-i\bar{w}] \tag{2.1}$$

где $w\in G^-$, $\varkappa$ — крутка. Чтобы получить для их граничных значений такой же ряд последовательных приближений, выясним условия, обеспечивающие справедливость формулы

$$F_-'(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu+1}[(SV)^{\nu}(Sg)]'(t), \quad t\in\Gamma \tag{2.2}$$

Дифференцируемость F_- вдоль Г и равенство (2.2) вытекают, как известно, из дифференцируемости вдоль Г членов ряда в (1.6) и равномерной сходимости относительно $t\in\Gamma$ ряда в (2.2). Поэтому достаточно найти более узкое, чем $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ с $\alpha\in(0, 1)$, банахово пространство гладких функций, по-прежнему обладающее свойствами 1°—3°, где сходимость по норме последовательности функций $\{f_\nu\}$ влечет равномерную сходимость $\{f_\nu\}$ и $\{f_\nu'\}$ на Г.

Для кусочно-гладкого контура без угловых точек такое пространство указано в [3]. Оно удовлетворяет всем перечисленным требованиям, если порядок касания в точках заострения достаточно высок.

Ниже приводится пример практических вычислений с помощью ряда (2.2), для обоснования которых требуется только следующий частный случай результата статьи [3], относящийся к контуру с заострениями степенного порядка

$$\begin{cases} y_1=C_1x^{1+\varepsilon_1} \\ y_2=C_2x^{1+\varepsilon_2} \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} y_1=C_1x^{1+\varepsilon_1} \\ y_2=-C_2x^{1+\varepsilon_2} \end{cases} \quad (x\geqslant 0) \qquad (2.3)$$

ε_1, $\varepsilon_2>0$, C_1, $C_2\geqslant 0$ — фиксированные для каждого заострения числа.

Теорема 2. Пусть Γ — кусочно-гладкий контур без угловых точек. Если каждое заострение контура Γ в местной системе координат с началом в точке заострения и вещественной осью, совпадающей с неориентированной касательной в этой точке, имеет степенной порядок (2.3), то при достаточно малых $|\lambda|$ производная функции кручения непрерывна вплоть до границы Γ, а ее сужение на Γ представляется равномерно сходящимся относительно $t\in\Gamma$ рядом (2.2). *Следствие.* Если контур Γ удовлетворяет условиям теоремы 2, то при всех достаточно малых $|\lambda|$ напряжения непрерывны вплоть до границы и формула (2.1) имеет место в $G^-\cup\Gamma$. Граничные значения напряжений представляются равномерно сходящимся относительно $t\in\Gamma$ рядом

$$\tau_{xz}^-(t)-i\tau_{yz}^-(t)=\mu_-\varkappa\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu+1}[(SV)^\nu(Sg)]'(t)-i\bar{t}\right\} \qquad (2.4)$$

Замечания. 1. Аналогичные утверждения имеют место и для граничных значений изнутри Γ. 2. В плоской задаче теории упругости для упругой области с упругим пикообразным включением отсутствие особенности у напряжений в точке заострения со степенным касанием установлено асимптотическими методами в [4].

3. В качестве примера использования полученных формул (1.6), (2.4) рассмотрим стержень с гипотрохоидальным сечением G^+, армирующий цилиндр, диаметр которого много больше диаметра области G^+. Границей G^+ является гипотрохоида Γ, т. е. образ единичной окружности $T=\{|\tau|=1\}$ при отображении $\varphi(\tau)=\tau+m\tau^{-n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, $0\leqslant m\leqslant n^{-1}$ конформном вне единичного круга. Через ψ обозначим обратное отображение области G^- на внешность единичного круга. При $m=n^{-1}$ контур Γ имеет $n+1$ точку заострения и удовлетворяет условию теоремы 2.

Нулевое приближение граничного значения F_- функции кручения

$$\lambda(Sg)(t)=\lambda\lim_{G^-\ni z\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{i|w|^2}{w-z}dw=i\lambda\lim_{G^-\ni z\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{|\varphi(\tau)|^2\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)-z}d\tau=$$

$$=i\lambda\lim_{G^-\ni z\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{1+m^2+m(\tau^{n+1}+\tau^{-n-1})}{\varphi(\tau)-z}\varphi'(\tau)d\tau=$$

$$=i\lambda\{1+m^2+m[S(\psi^{n+1})(t)+S(\psi^{-n-1})(t)]\},\quad t\in\Gamma$$

сводится к вычислению интегралов $S(\psi^\nu)$ $(\nu=\pm1, \pm2, \ldots)$, которое осуществляется на основании формулы

$$(S\psi^\nu)(t)=a_\nu(t)-\psi^\nu(t) \qquad (3.1)$$

где $a_\nu(t)$ — предел при $z\to t$ вычета на бесконечности функции $f(w)=w^\nu\varphi'(w)/(z-\varphi(w))$.

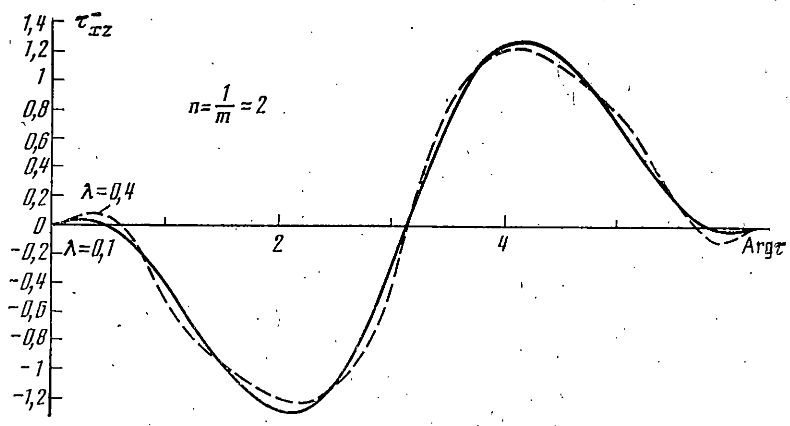
Таким образом, нулевое приближение F_- равно

$$\lambda(Sg)(t)=i\lambda\{1+m^2+m[a_{n+1}(t)-\psi^{n+1}(t)-\psi^{-n-1}(t)]\}$$

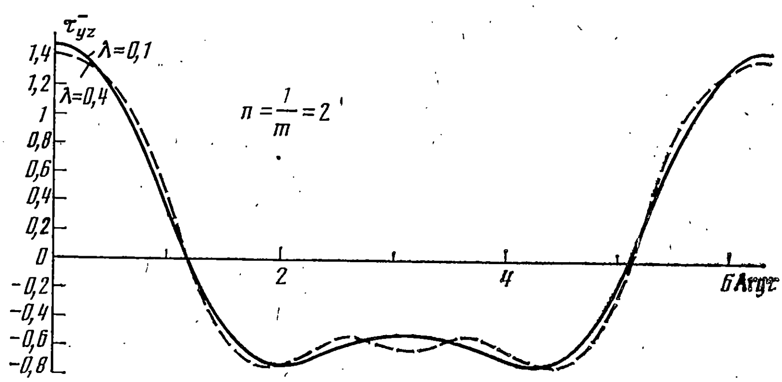
Применяя к этому выражению операторы V, S и снова используя формулу (3.1), получаем следующий член ряда (1.6):

$$\lambda^2(SVSg)(t)=-i\lambda^2\{1+m^2+m[(S\overline{a_{n+1}})(t)+\psi^{-n-1}(t)-a_{n+1}(t)+\psi^{n+1}(t)]\}$$

Для численной реализации удобно перевести функции, входящие в это выражение, на единичную окружность, положив $t=\varphi(\tau)$, $\tau\in T$. Тогда $\psi^\nu(t)=\tau^\nu$, и вычисление последовательных приближений сводится к определению членов итерационной последовательности $a_{n+1}(\varphi(\tau))$, $[(SV)\times(a_{n+1})](\varphi(\tau))$, $[(SV)^2(a_{n+1})](\varphi(\tau)), \ldots$



Фиг. 1



Фиг. 2

Последовательное приближения для граничных значений напряжений также представим как функции от $\tau\in\mathrm{T}$, заметив, что $\psi'(t)=(1-mn\tau^{-n-1})^{-1}$. Ограничимся двумя первыми членами ряда (2.4):

$$\tau_{xz}^-(t)-i\tau_{yz}^-(t)=\mu_-\varkappa[\lambda(Sg)'(\varphi(\tau))+\lambda^2(SVSg)'(\varphi(\tau))-\overline{i\varphi(\tau)}]=$$

$$=i\mu_-\varkappa\left\{\lambda m\left[a'_{n+1}(\varphi(\tau))+(n+1)\frac{1-\tau^{2n+2}}{\tau^{n+2}-mn\tau}\right]-\lambda^2 m\left[(\overline{Sa_{n+1}})'(\varphi(\tau))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(n+1)\frac{\tau^{2n+2}-1}{\tau^{n+2}-mn\tau}-a'_{n+1}(\varphi(\tau))\right]-\overline{\varphi(\tau)}\right\}+O(\lambda^3) \qquad (3.2)$$

Приведем расчетные формулы для случая $n=m^{-1}=2$, когда Г представляет собой гипоциклоиду с тремя точками заострения. В этом случае

$$a_3'(\varphi(\tau))=3\tau^2+3\tau^{-1}+{}^3/_4\tau^{-4}$$

$$(\overline{Sa_3})'(\varphi(\tau))={}^1/_{32}(39\tau^{-4}+{}^{15}/_2\tau^{-7}+{}^3/_4\tau^{-10})$$

и формула (3.2) принимает вид

$$\tau_{xz}^-(t)-i\tau_{yz}^-(t)=i\mu_-\varkappa\,[{}^3/_8\lambda\tau^{-4}-{}^1/_{64}\lambda^2(15\tau^{-4}$$
$$+{}^{15}/_2\tau^{-7}+{}^3/_4\tau^{-10})-\tau^{-1}-{}^1/_2\tau^2]+O(\lambda^3)$$

Результаты вычислений представлены на фиг. 1, 2 эпюрами напряжений $\tau_{xz}^-(\varphi(\tau))$, $\tau_{yz}^-(\varphi(\tau))$, соответствующих $\lambda=0{,}1$; 0,4 (для простоты положено $\mu_-\varkappa=1$).

Авторы искренне признательны Н. Ф. Морозову, по инициативе которого было проведено это исследование.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
2. *Шерман Д. И.* Кручение круглого цилиндра, армированного эллиптическим стержнем. Инженерный сборник, Т. 21. М., Академиздат, 1955. С. 79—96.
3. *Дынькин Е. М., Емельянов А. П.* Об одном граничном интегральном уравнении теории упругости на контуре с точкой заострения // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, 1988. Вып. 3. № 15. С. 95—96.
4. *Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Асимптотическое поведение напряженно-деформированного состояния вблизи острых включений. ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 48—51.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.IV.1987