МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1988

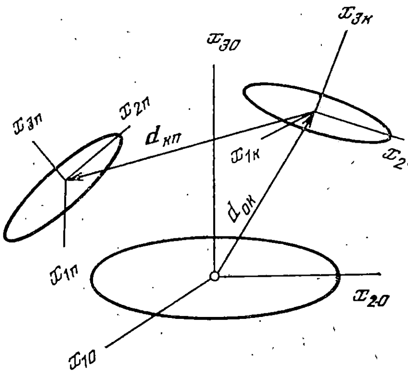
УДК 539.375

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИСКОВИДНОЙ МАКРОТРЕЩИНЫ С ПОЛЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МИКРОТРЕЩИН

РОМАЛИС Н. Б., ТАМУЖ В. П.

Рассматривается пространственная задача о взаимодействии дискообразной трещины с полем произвольно расположенных и ориентированных дискообразных микротрещин. Решение получено методами теории потенциала с использованием общей системы интегральных уравнений и метода малого параметра. Различные подходы к исследованию разрушения и накопления повреждений предлагались в [1—4].

1. Рассмотрим упругое бесконечное тело, содержащее N произвольно расположенных трещин, одна из которых является макроскопической с радиусом r_0, а другие имеют радиусы $r_k \ll r_0$. Пусть макротрещина нагружена равномерно распределенным нормальным давлением $p_{30}^{(0)}$, а микротрещины свободны от внешних нагрузок. Выберем начало системы координат в центре макротрещины, а также введем локальные системы координат, связанные с микротрещинами (фиг. 1).



Фиг. 1

Следуя [5], обозначим через e_{ikn} направляющие косинусы вектора d_{kn}, соединяющего центры k-й и n-й трещины в k-й локальной системе координат, а через l_{sikn} — косинусы углов между осями $O_n x_{in}$ и $O_k x_{ik}$ (s, i=1, 2, 3) (k и n всюду далее не тензорные индексы, а номера трещин). Напряженное состояние в теле с трещинами определяется величинами α_{in}, характеризующими скачки перемещений и имеющими размерность длины, посредством уравнений

$$\Delta_n \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{in}(\xi_1,\xi_2)}{R_n} d\xi_1 d\xi_2 + (-1)^i (1-\delta_{i3}) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{(3-i)n} \partial x_{2n}} \times \right.$$
$$\times \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{in}(\xi_1,\xi_2)}{R_n} d\xi_1 d\xi_2 - \frac{\partial^2}{\partial x_{(3-i)n} \partial x_{1n}} \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{2n}(\xi_1,\xi_2)}{R_n} d\xi_1 d\xi_2 - \tag{1.1}$$
$$- \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=1}^{3} \iint\limits_{S_k} \Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{kn}}\right) \alpha_{sk}(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1-\nu}{\mu} p_{in}(x_{1n}, x_{2n})$$

$$(\Delta_n = \partial^2/\partial x_{1n}{}^2 + \partial^2/\partial x_{2n}{}^2), \qquad R_{kn} = [(x_{1nn}-\xi_1)^2 + (x_{1nn}-\xi_2)^2 + x_{3kn}^2]^{1/2}$$

$$x_{ikn} = e_{ikn} d_{kn} + \sum_{s=1}^{2} l_{iskn} x_{sn}, \quad R_n = [(x_{1n}-\xi_1)^2 + (x_{2n}-\xi_2)^2]^{1/2}$$

$$\Phi_{is}(\xi_1, \xi_2, x_{1n}, x_{2n}) = \left(-x_{3kn} \frac{\partial}{\partial x_{skn}} L_i + K_{is}\right)\left(\frac{1}{R_{kn}}\right)$$

$$\left\{ \begin{matrix} K_{is} \\ L_i \end{matrix} \right\} = \sum_{q=1}^{3} \left\{ \begin{matrix} M_{qis} \\ m_{qikn} \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2_{qkn}} + \left\{ \begin{matrix} M^*_{qis} \\ m^*_{qikn} \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{qkn}\, \partial x_{(q+1)kn}} \Bigg]$$

где постоянные M_{qis}, M^*_{qis}, m_{qikn}, m^*_{qikn} определяются взаимной ориентацией трещин и свойствами материала [5]:

$$M_{1is} = \nu \delta_{2s} m^*_{2ikn} - (m_{1ikn} + 2\nu m_{2ikn}) \delta_{3s}$$

$$M_{2is} = \nu \delta_{is} m^*_{3ikn} - (m_{2ikn} + 2\nu m_{1ikn}) \delta_{3s}$$

$$M_{3is} = \delta_{1s} m^*_{3ikn} + \delta_{2s} m^*_{2ikn} + \delta_{3s} m_{3ikn}$$

$$M^*_{1is} = -\nu \delta_{1s} m^*_{2ikm} - \nu \delta_{2s} m^*_{3ikn} - (1-2\nu)\, m^*_{1ikn}$$

$$M^*_{2is} = 2(m_{2ikn} + \nu m_{1ikn}) \delta_{2s} + (1-\nu)\, \delta_{1s} m^*_{1ikn}$$

$$M^*_{3is} = 2(\nu m_{2ikn} + m_{1ikn}) \delta_{2s} + (1-\nu)\, \delta_{2s} m^*_{1ikn}$$

Запишем систему уравнений (1.1), выделив отдельно уравнение для макротрещины

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 \iint\limits_{S_0} \frac{\alpha_{i0}(\xi_1, \xi_2)}{R_0}\, d\xi_1\, d\xi_2 + (-1)^i \nu (1-\delta_{i3}) \times \\
&\times \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{(3-i)0}\, \partial x_{20}} \iint\limits_{S_0} \frac{\alpha_{10}(\xi_1, \xi_2)}{R_0}\, d\xi_1\, d\xi_2 - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2}{\partial x_{(3-i)0}\, \partial x_{10}} \iint\limits_{S_0} \frac{\alpha_{20}(\xi_1, \xi_2)}{R_0}\, d\xi_1\, d\xi_2 \right] - \\
&- \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{3} \left[\Phi_{is} \left(\frac{1}{R_{k0}} \right) \alpha_{sk}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \frac{1-\nu}{\mu} P^{(0)}_{30}\, \delta_{i3} \right.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_n \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{in}(\xi_1, \xi_2)}{R_n}\, d\xi_1\, d\xi_2 + (-1)^i \nu (1-\delta_{i3}) \times \\
&\times \left[\frac{\partial^2}{\partial x_{(3-i)n}\, \partial x_{2n}} \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{1n}(\xi_1, \xi_2)}{R_n}\, d\xi_1\, d\xi_2 - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2}{\partial x_{(3-i)n}\, \partial x_{1n}} \iint\limits_{S_n} \frac{\alpha_{2n}(\xi_1, \xi_2)}{R_n}\, d\xi_1\, d\xi_2 \right] - \\
&- \sum_{s=1}^{3} \iint\limits_{S_0} \Phi_{is} \left(\frac{1}{R_{0n}} \right) \alpha_{s0}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 - \\
&- \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{3} \left[\iint\limits_{S_k} \alpha_{sk}(\xi_1, \xi_2)\, \Phi_{is} \left(\frac{1}{R_{kn}} \right) d\xi_1\, d\xi_2 \right] = 0
\end{aligned}$$

Приведем системы $3N$ уравнений (1.2) к безразмерному виду. Учитывая, что α_{in} имеет размерность длины и определена внутри круга S_n, будем искать ее в виде $\alpha_{in} = r_n \beta_{in}$. Сделаем в интегралах замену переменных $\xi_1 = r_n \zeta_1$; $\xi_2 = r_n \zeta_2$. Обозначим $x_{in} = r_n \chi_{in}$. Учтем также, что $R_n = r_n [(\chi_{1n} - \zeta_1)^2 + (\chi_{2n} - \zeta_2)^2]^{1/2}$.

$$R_{k0} = r_0 [(\chi_{1k0} - \zeta r_0/r_0)^2 + (\chi_{2k0} - \zeta_2 r_k/r_0)^2 + \chi_{3k0}]^{1/2}$$

$$\chi_{ik0}=e_{ik0}d_{k0}/r_0+\sum_{s=1}^{2}\chi_{s0}l_{isk0}$$

$$R_{0n}=r_0\left[\sum_{i=1}^{3}\left(e_{i0n}d_{0n}/r_0+(r_n/r_0)\sum_{s=1}^{2}l_{is0n}\chi_{sn}-\zeta_i\right)^2\right]^{1/2},\qquad \zeta_3=0 \tag{1.3}$$

$$R_{kn}=r_0\left[\sum_{i=1}^{3}\left(e_{ikn}d_{kn}/r_0+(r_n/r_0)\sum_{s=1}^{2}l_{iskn}\chi_{sn}-(r_k/r_0)\zeta_i\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\chi_{ikn}=e_{ikn}d_{kn}/r_0+(r_n/r_0)\sum_{s=1}^{2}l_{iskn}\chi_{sn},\qquad x_{ikn}=r_0\chi_{ikn}$$

Учитывая соотношения (1.3), получим систему уравнений в безразмерном виде (все интегралы берутся по площади единичного круга S):

$$\Delta_0\iint_S\frac{\beta_{i0}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2+(-1)^i\nu(1-\delta_{is})\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)0}\,\partial\chi_{20}}\iint_S\frac{\beta_{10}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)0}\,\partial\chi_{10}}\iint_S\frac{\beta_{20}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2\right]-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{r_k}{r_0}\right)^3\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}\left[\iint_S\Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{k0}}\right)\beta_{sk}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\zeta_1\,d\zeta_2\right]=\frac{1-\nu}{\mu}P_{30}^{(0)}\,\delta_{i3}$$

$$\Delta_n\iint_S\frac{\beta_{in}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_n}d\zeta_1\,d\zeta_2+(-1)^i\nu(1-\delta_{i3})\left[\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)n}\,\partial\chi_{2n}}\times\right. \tag{1.4}$$

$$\left.\times\iint_S\frac{\beta_{1n}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_n}d\zeta_1\,d\zeta_2-\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)n}\,\partial\chi_{1n}}\iint_S\frac{\beta_{2n}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_n}d\zeta_1\,d\zeta_2\right]-$$

$$-\sum_{s=1}^{3}\iint_S\beta_{s0}(\zeta_1,\zeta_2)\,\Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{0n}}\right)d\zeta_1\,d\zeta_2-$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N}\left(\frac{r_k}{r_0}\right)^3\sum_{s=1}^{3}\iint_S\beta_{sk}(\zeta_1,\zeta_2)\,\Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{kn}}\right)d\zeta_1\,d\zeta_2=0$$

Будем искать решение системы уравнений (1.4) в виде ряда по степеням параметра $\lambda=r_k/r_0$ (предположим, что $r_k=r_n$):

$$\beta_{i0}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\beta_{i0}^{(m)},\qquad \beta_{in}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\beta_{in}^{(m)}$$

Система уравнений (1.4) распадается на следующие рекуррентные системы уравнений (выпишем их для нулевого и третьего приближений:

$$\Lambda\iint_S\frac{\beta_{i0}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2+(-1)^i\nu(1-\delta_{i3})\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)0}\,\partial\chi_{20}}\iint\limits_S\frac{\beta_{10}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)0}\,\partial\chi_{10}}\iint\limits_S\frac{\beta_{20}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2\right]= \tag{1.5}$$

$$=\frac{\Gamma\,(1-\nu)\,\delta_{i3}P_{30}^{(0)}}{\mu}$$

$$\Delta_n\iint\limits_S\frac{\beta_{in}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_n}d\zeta_1\,d\zeta_2+(-1)^i\nu(1-\delta_{i3})\left[\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)n}\,\partial\chi_{2n}}\times\right.$$

$$\left.\times\iint\limits_S\frac{\beta_{in}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_n}d\zeta_1\,d\zeta_2-\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)n}\,\partial\chi_{in}}\iint\limits_S\frac{\beta_{2n}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_n}d\zeta_1\,d\zeta_2\right]=$$

$$=\sum_{s=1}^{3}\iint\limits_S\beta_{s0}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)\,\Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{0n}^{(0)}}\right)d\zeta_1\,d\zeta_2=\frac{1-\nu}{\mu}P_{in}^{(0)} \tag{1.6}$$

$$\Delta_0\iint\limits_S\frac{\beta_{i0}^{(3)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2+(-1)^i\nu(1-\delta_{i3})\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)0}\,\partial\chi_{20}}\iint\limits_S\frac{\beta_{10}^{(3)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2-\right. \tag{1.7}$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial\chi_{(3-i)0}\,\partial\chi_{10}}\iint\limits_S\frac{\beta_{20}^{(3)}(\zeta_1,\zeta_2)}{R_0}d\zeta_1\,d\zeta_2\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{3}\iint\limits_S\beta_{sk}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)\,\Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{k0}^{(0)}}\right)d\zeta_1\,d\zeta_2=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{3}\Phi_{is}\left(\frac{1}{R_{k0}^{(0)}}\right)\iint\limits_S\beta_{sk}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\zeta_1\,d\zeta_2=\frac{1-\nu}{\mu}P_{i0}^{(3)}$$

Величины $R_{k0}^{(0)}$ и $R_{0n}^{(0)}$ имеют вид

$$R_{k0}^{(0)}=[\chi_{1k0}^2+\chi_{2k0}^2+\chi_{3k0}^2]^{1/2},\qquad R_{0n}^{(0)}=\left[\sum_{i=0}^{3}(e_{i0n}d_{0n}/r_0-\zeta_i)^2\right]^{1/2},\quad \zeta_3=0 \tag{1.8}$$

т. е. $R_{k0}^{(0)}$ не зависит от ζ_i, а $R_{0n}^{(0)}$— от χ_{in}. Геометрически это означает, что расстояние между точкой на макротрещине (ζ_1, ζ_2, 0) и точкой на микротрещине отождествляется с расстоянием между (ζ_1, ζ_2, 0) и центром микротрещины. Это дает возможность применить результаты [6, 7] к решению систем (1.5) и (1.6). Если правая часть уравнений имеет полиномиальный вид решение представимо в виде полинома той же степени, умноженного на $(1-\zeta_1^2-\zeta_2^2)^{1/2}$. Решение системы уравнений (1.5) записывается в виде [6, 7]:

$$\beta_{10}^{(0)}=0,\qquad \beta_{20}^{(0)}=0,\qquad \beta_{30}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)=(1-\nu)P_{30}^{(0)}(\mu\pi^2)^{-1}(1-\zeta_1^2-\zeta_2^2)^{1/2}$$

Перейдем к решению системы (1.6). Согласно второй формуле (1.8), правая часть (1.6) не зависит от χ_{1n}, χ_{2n}, поэтому результаты [6, 7] применимы и к решению системы уравнений (1.6):

$$\beta_{in}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)=\omega_{in}^{(0)}(1-\zeta_1^2-\zeta_2^2)^{1/2},\quad \omega_{in}^{(0)}=(1-\nu)(1-\nu/2)^{-1}(\mu\pi^2)^{-1}J_{in}P_{30}^{(0)}$$

$$J_{in}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_S(1-\zeta_1^2-\zeta_2^2)^{1/2}\Phi_{s3}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\zeta_1\,d\zeta_2 \tag{1.9}$$

Заметим, что поскольку $|e_{i0n}d_{0n}/r_0|>1$, $|\zeta_i|<1$, то из второй формулы (1.8) следует, что $R_{0n}^{(0)}$ нигде в области интегрирования в нуль не обращается, т. е. интеграл в выражении для J_{in} не является сингулярным.

Перейдем к решению системы уравнений (1.7). К ней нельзя применить метод [6, 7]. Однако решение существенно упрощается благодаря тому, что правая часть системы (1.7) распадается на произведение функции $\Phi_{is}(\chi_{10},\chi_{20})$, не зависящей от ζ_i (как видно из первой формулы (1.8)), и интеграл, имеющий следующий простой вид:

$$\iint\limits_S\beta_{in}^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\zeta_1\,d\xi_2=\omega_{in}^{(0)}\iint\limits_S(1-\zeta_1^2-\zeta_2^2)^{1/2}\,d\zeta_1\,d\zeta_2=\frac{2\pi}{3}\omega_{in}^{(0)} \tag{1.10}$$

Система (1.7) соответствует, таким образом, случаю, когда на поверхности одной трещины действуют произвольным образом распределенные нагрузки. Напряжения вне трещины (в ее плоскости) выражаются следующим образом [8]:

$$\sigma_{i3}=\frac{1}{\pi^2(\chi_{10}^2+\chi_{20}^2-1)^{1/2}}\iint\limits_S\frac{(1-\eta_1^2-\eta_2^2)^{1/2}f_i(\eta_1,\eta_2,\chi_{10},\chi_{20})\,d\eta_1\,d\eta_2}{(\eta_1-\chi_{10})^2+(\eta_2-\chi_{20})^2}\chi_{10},\quad \chi_{20}\in S^*$$

$$f_i(\eta_1,\eta_2)=p_{i0}^{(3)}(\eta_i)+(-1)^i\nu(1-\nu)^{-1}(\eta_{3-i}-\chi_{(3-i)0})\times$$
$$\times\left(\frac{\partial p_{10}^{(3)}(\eta_1,\eta_2)}{\partial\eta_2}-\frac{\partial p_{20}^{(3)}(\eta_1,\eta_2)}{\partial\eta_1}\right) \tag{1.11}$$
$$f_3(\eta_i)=p_{30}^{(3)}(\eta_i)$$

С учетом предыдущих вычислений получим

$$f_i(\eta_1,\eta_2,\chi_{10},\chi_{20})=\frac{2p_{30}^{(0)}}{3\pi(1-\nu/2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{3}J_{sk}[\Phi_{is}(\eta_1,\eta_2)+$$
$$+(-1)^i\nu(1-\nu)^{-1}(\eta_{3-i}-\chi_{(3-i)0})(\partial\Phi_{1s}/\partial\eta_2-\partial\Phi_{2s}/\partial\eta_1)]$$

$$f_3(\eta_1,\eta_2;\chi_{10},\chi_{20})=\frac{2p_{30}^{(0)}}{3\pi(1-\nu/2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{3}J_{sk}\Phi_{3s}(\eta_1,\eta_2)$$

Заметим, что J_{sk} является функцией величин $e_{i0k}d_{0k}/r_0$, m_{pi0k}, коэффициентов M_{kis} и т. д., т. е. зависит от взаимного расположения макротрещины и каждой из макротрещин. Здесь наблюдается та же закономерность, что и в плоском случае: в рамках третьего приближения микротрещины друг на друга не влияют. Коэффициенты интенсивности напряжений на контуре макротрещины вычисляются по формулам [9]:

$$k_{\mathrm{I}}=\lim_{\rho\to0}(2\pi\rho)^{1/2}\sigma_{33},\quad k_{\mathrm{II}}=\lim_{\rho\to0}(2\pi\rho)^{1/2}\tau_n,\quad k_{\mathrm{III}}=\lim_{\rho\to0}(2\pi\rho)^{1/2}\tau_t \tag{1.12}$$

где ρ — расстояние точек тела от контура трещины, а τ_n и τ_t — нормальная и тангенциальная составляющие напряжений, определяемые по формулам (φ — угол, составленный нормалью к контуру трещины с положительным направлением оси x):

$$\tau_n=\sigma_{13}\cos\varphi+\sigma_{23}\sin\varphi,\quad \tau_t=-\sigma_{13}\sin\varphi+\sigma_{23}\cos\varphi \tag{1.13}$$

Используя формулы (1.12) и (1.13) и учитывая, что ρ — величина размерная (в безразмерном виде $k_{\mathrm{I}}=\lim\,(2\pi\rho/r_0)^{1/2}(r_0)^{1/2}\sigma_{33}$), получим

$$k_{\mathrm{I}}^{(3)}=\frac{(2\pi r_0)^{1/2}\lambda^3}{\pi^2}\left[\iint\limits_S \Omega(\eta_1,\eta_2)f_3(\eta_1,\eta_2,\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\eta_1\,d\eta_2\right]$$

$$k_{\mathrm{II}}^{(3)}=\frac{(2\pi r_0)^{1/2}\lambda^3}{\pi^2}\left[\cos\varphi\iint\limits_S \Omega(\eta_1,\eta_2)f_1\,d\eta_1\,d\eta_2+\sin\varphi\iint\limits_S \Omega(\eta_1,\eta_2)f_2\,d\eta_1\,d\eta_2\right]$$

$$k_{\mathrm{III}}^{(3)}=\frac{(2\pi r_0)^{1/2}\lambda^3}{\pi^2}\left[-\sin\varphi\iint\limits_S \Omega(\eta_1,\eta_2)f_1\,d\eta_1\,d\eta_2+\cos\iint\limits_S \Omega(\eta_1,\eta_2)f_2\,d\eta_1\,d\eta_2\right]$$

$$\Omega(\eta_1,\eta_2)=(1-\eta_1^2-\eta_2^2)^{1/2}[(\eta_1-\cos\varphi)^2+(\eta_2-\sin\varphi)^2]^{-1}$$

Учитывая формулы (1.4) и (1.12), получим $k_i=k_i^{(0)}+k_i^{(3)}$. Поскольку в рамках третьего приближения вклад всех микротрещин в коэффициент интенсивности напряжений определяется суперпозицией вклада каждой микротрещины, то важно исследовать более подробно взаимодействие макротрещины с одной микротрещиной.

2. Рассмотрим достаточно общий случай взаимного расположения макротрещины и микротрещины, когда вектор d_{0k} составляет с плоскостью макротрещины угол α, а плоскость микротрещины образует с плоскостью макротрещины угол ψ. Матрицы коэффициентов e_{ijk} и l_{ijkn} имеют в этом случае вид

$$e=\begin{Vmatrix}0\\ \cos\alpha\\ \sin\alpha\end{Vmatrix},\quad e_{ik0}=\begin{Vmatrix}0\\ -\cos(\alpha-\psi)\\ -\sin(\alpha-\psi)\end{Vmatrix}$$

$$l_{ij0k}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&\sin\psi&\cos\psi\end{Vmatrix},\quad l_{ijk0}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&\sin\psi\\0&-\sin\psi&\cos\psi\end{Vmatrix}$$

При расположении микротрещины в плоскости, параллельной макротрещине, угол $\psi=0$ и соотношения (1.14) несколько упрощаются. Матрицы коэффициентов принимают вид

$$e_{i0k}=\begin{Vmatrix}0\\ \cos\alpha\\ \sin\alpha\end{Vmatrix},\quad \chi_{p0k}=\begin{Vmatrix}0\\ d\cos\alpha\\ d\sin\alpha\end{Vmatrix},\quad e_{ik0}=\begin{Vmatrix}0\\ -\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{Vmatrix}$$

$$\eta_{pk0}=\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2-d\cos\alpha\\ -d\sin\alpha\end{Vmatrix},\quad l_{ij0k}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad m_{pi0k}=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{Vmatrix}$$

$$l_{ijk0}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad a_j=\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2-d\cos\alpha\end{Vmatrix}$$

$$m_{pi0k}^*=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad M_{1is}^{0k}=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&\nu&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad m_{pik0}=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad m_{pik0}^*=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{Vmatrix}$$

$$M_{2is}^{0k}=\begin{Vmatrix}\nu&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad M_{3is}^{0k}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad M_{1is}^{k0}=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&\nu&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad M_{2is}^{k0}=\begin{Vmatrix}\nu&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}$$

$$M_{1is}^{k0*}=\begin{Vmatrix}0&-\nu&0\\-\nu&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad M_{2is}^{*0k}=(0),\quad M_{3is}^{k0}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad M_{1is}^{*k0}=\begin{Vmatrix}0&-\nu&0\\-\nu&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}$$

$$M_{3is}^{*0k}=(0),\quad M_{2is}^{*k0}=(0),\quad M_{3is}^{*k0}=(0)$$

$$R_{0k}^{(0)}=[\zeta_1^2+(\zeta_2-d\cos\alpha)^2+d^2\sin^2\alpha]^{1/2},$$

$$R_{k0}^{(0)}=[\eta_1^2+(\eta_2-d\cos\alpha)^2+d^2\sin^2\alpha]^{1/2}$$

Матрицы функций, входящих в (1.14), имеют следующие компоненты:

$$\Phi_{is}(\eta_1,\eta_2)=\begin{Vmatrix}\psi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33}\end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

$$\varphi_{11}=-(1+\nu)R_{k0}^{-3}+3\nu(\eta_2-d\cos\alpha)^2R_{k0}^{-5}+15d^2\sin^2\alpha\eta_1^2R_{k0}^{-7}$$

$$\varphi_{12}=-3\nu(\eta_2-d\cos\alpha)\eta_1R_{k0}^{-5}-[15d\sin\alpha\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)^2-$$
$$-d^2\sin^2\alpha\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)]R_{k0}^{-7}$$

$$\varphi_{13}=3d\sin\alpha\eta_1R_{k0}^{-5}-15d^3\sin^3\alpha\eta_1R_{k0}^{-7},\ \varphi_{31}=3d\sin\alpha\eta_1R_{k0}^{-5}-$$
$$-15d^3\sin^3\alpha\eta_1R_{k0}^{-7}$$

$$\varphi_{21}=-3\nu\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)R_{k0}^{-5}+15d^2\sin^2\alpha\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)R_{k0}^{-7}$$

$$\varphi_{22}=-(1+\nu)R_{k0}^{-3}+3\nu\eta_1^2R_{k0}^{-5}+15d^2\sin^2\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)^2R_{k0}^{-1}$$

$$\varphi_{23}=3d\sin\alpha(\eta_2+d\cos\alpha)R_{k0}^{-5}-15d^3\sin^3\alpha\eta_2R_{k0}^{-7}+15d^4\sin^3\alpha\cos\alpha R_{k0}^{-7}$$

$$\varphi_{32}=3d\sin\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)R_{k0}^{-5}-15d^3\sin^3\alpha\eta_2R_{k0}^{-7}+15d^4\sin^3\alpha\cos\alpha R_{k0}^{-7}$$

$$\varphi_{33}=-R_{k0}^{-3}-6d^3\sin^3\alpha R_{k0}^{-5}+15d^4\sin^4\alpha R_{k0}^{-7}$$

$$\frac{\partial\Phi_{1s}}{\partial\eta_2}-\frac{\partial\Phi_{2s}}{\partial\eta_1}=\begin{Vmatrix}\nu_{11}\\ \nu_{12}\\ \nu_{13}\end{Vmatrix}$$

$$\nu_{11}=3(1+4\nu)(\eta_2-d\cos\alpha)R_{k0}^{-5}+15[-\nu(\eta_2-d\cos\alpha)^3-$$
$$-\nu\eta_1^2(\eta_2-d\cos\alpha)-d^2\sin^2\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)]R_{k0}^{-7}+ \tag{2.2}$$
$$+105[-d^2\sin^2\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)\eta_1^2+d^2\sin^2\alpha\eta_1^3]R_{k0}^{-9}$$

$$\nu_{12}=15[\nu\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)^2+\nu\eta_1^3]R_{k0}^{-7}-3\eta_1(1+2\nu)R_{k0}^{-5}$$

$$\nu_{13}=-15d\sin\alpha\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)R_{k0}^{-7}$$

Подставляя выражения (2.1) в формулу (1.14), для третьего приближения получим

$$k_{\mathrm{I}}^{(3)}=(\pi r_0)^{1/2}p_{30}^{(0)}\left\{1+\frac{2\lambda^3}{3\pi^3(1-\nu/2)}\left[J_{2k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Phi_{32}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+J_{3k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Phi_{33}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2\right]\right\}$$

$$k_{\mathrm{II}}^{(3)}=\frac{2\lambda^3(\pi r_0)^{1/2}p_{30}^{(0)}}{3\pi^3}\left\{\cos\varphi\left[J_{2k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{12}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2+\right.\right.$$
$$\left.+J_{3k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{13}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2\right]+\sin\varphi\left[J_{2k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{22}(\eta_1,\eta_2)\times\right. \tag{2.3}$$
$$\left.\times d\eta_1\,d\eta_2+J_{3k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{13}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2\right]$$

$$k_{\mathrm{III}}^{(3)}=\frac{2\lambda^3(\pi r_0)^{1/2}p_{30}^{(0)}}{3\pi^3}\left\{-\sin\varphi\left[J_{2k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{12}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2+\right.\right.$$
$$\left.+J_{3k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{13}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2\right]+\cos\varphi\left[J_{2k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{22}(\eta_1,\eta_2)\times\right.$$
$$\left.\left.\times d\eta_1\,d\eta_2+J_{3k}\iint\limits_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{23}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1\,d\eta_2\right]\right\}$$

$$J_{2k}=3d\sin\alpha\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}(d\cos\alpha-\rho\cos\theta)(-R_{0k}^2+5d^2\sin^2\alpha)R_{0k}^{-7}\rho(1-\rho^2)^{1/2}d\theta$$

$$J_{3k}=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}(-R_{0k}^4-6R_{0k}^2d^2\sin^2\alpha+15d^2\sin^2\alpha)R_{0k}^{-7}\rho(1-\rho^2)^{1/2}d\theta$$

$$\Psi_{12}(\eta_1,\eta_2)=9\nu^2(1-\nu)^{-1}\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)R_{0k}^{-5}+$$
$$+15[-d\sin\alpha\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)^2+d^2\sin^2\alpha\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)-$$
$$-\nu^2(1-\nu)^{-1}\eta_1(\eta_2-d\cos\alpha)^3-\nu^2(1-\nu)^{-1}\eta_1^3(\eta_2-d\cos\alpha)]R_{0k}^{-7}$$
$$\Psi_{13}(\eta_1,\eta_2)=3d\sin\alpha\eta_1R_{0k}^{-5}+15[-d^3\sin^3\alpha\eta_1+$$
$$+\nu(1-\nu)^{-1}d\eta_1\sin\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)^2]R_{0k}^{-7}$$
$$\Psi_{22}(\eta_1,\eta_2)=-(1+\nu)R_{0k}^{-3}+3\nu(2+\nu)(1-\nu)^{-1}R_{0k}^{-5}+$$
$$+15[d^2\sin^2\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)^2+\nu^2(1-\nu)^{-1}\eta_1^2(\eta_2-d\cos\alpha)^2+\eta_1^2]R_{k0}^{-7}$$
$$\Psi_{23}(\eta_1,\eta_2)=3d\sin\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)R_{0k}^{-5}+15[-d^3\sin^3\alpha(\eta_2-d\cos\alpha)-$$
$$-\nu(1-\nu)^{-1}d\sin\alpha\eta_1^2(\eta_2-d\cos\alpha)]R_{0k}^{-7}$$

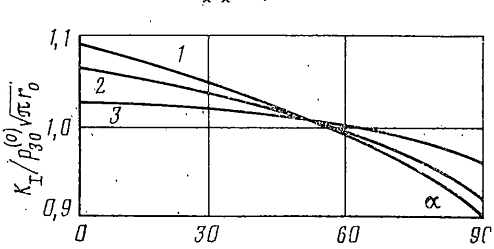
Заметим, что интегралы в (2.3) являются несобственными, но сходящимися. Выделение сингулярности может быть проведено следующим способом:

$$\iint_S\Omega(\eta_1,\eta_2)\Psi_{12}(\eta_1,\eta_2)d\eta_1d\eta_2=\Psi_{12}(1,\varphi)\iint_S\Omega(\eta_1,\eta_2)d\eta_1d\eta_2+$$
$$+\iint_S[\Psi_{12}(\eta_1,\eta_2)\Psi_{12}(1,\varphi)]\Omega(\eta_1,\eta_2)d\eta_1d\eta_2 \qquad (2.4)$$

Легко видеть, что

$$\iint_S\Omega(\eta_1,\eta_2)d\eta_1d\eta_2=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\rho(1-\rho^2)^{1/2}d\rho\,d\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}=2\pi$$

Второй интеграл в (2.4) может быть определен численно. Результаты вычисления коэффициента интенсивности напряжений $k_{\rm I}[p_{30}^{(0)}(\pi r_0)^{1/2}]^{-1}$ приведены на фиг. 2 (кривые 1—3 соответствуют $\alpha=1{,}1;\ 1{,}3;\ 1{,}5$).



Фиг. 2

Рассмотрим частные случаи, в которых интегралы берутся в элементарных функциях.

При расположении макротрещины и микротрещины в одной плоскости ($\alpha=0$, $\psi=0$) имеется только один коэффициент интенсивности напряжений, который вычисляется по формуле (φ — угловая координата точек контура макротрещины):

$$k_{\rm I}(\varphi)=\frac{(\pi r_0)^{1/2}}{\pi^2}\iint_S\Omega(\eta_1,\eta_2)f_3(\eta_1,\eta_2)d\eta_1d\eta_2 \qquad (2.5)$$

$$f_3=\frac{2p_{30}^{(0)}}{3\pi(1-\nu/2)}\sum_{s=1}^{3}J_{sk}\Phi_{3s}(\eta_1,\eta_2),$$

$$J_{sk}=-\frac{1}{\pi^2}\iint_S\frac{(1-\zeta_1^2-\zeta_2^2)^{1/2}d\zeta_1d\zeta_2}{[\zeta_1^2+(\zeta_2-d)^2]^{3/2}}$$

$$\Phi_{s3}(\zeta_1,\zeta_2)=-[\zeta_1^2+(\zeta_2-d)^2]^{-3/2},\quad \Phi_{3s}(\eta_1,\eta_2)=-[\eta_1^2+(\eta_2-d)^2]^{-3/2}$$

Здесь первый интеграл выражается в конечном виде при $\varphi=\pm\pi/2$, т. е. в самой близкой и самой дальней к микротрещине точках. Перейдем к вычислению интеграла

$$J_{sk}=-\frac{1}{\pi^2}\iint_S\frac{(1-\zeta_1^2-\zeta_2)^{1/2}\,d\zeta_1\,d\zeta_2}{[\zeta_1^2+(\zeta_2-d)^2]^{3/2}} \tag{2.6}$$

Выполняя замену переменных $\zeta_1=\rho\sin\theta$, $\zeta_2=d+\rho\cos\theta$, будем иметь

$$J'_{sk}=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\left\{\int_{r_0}^{r_1}(1-d^2\sin^2\theta)^{1/2}\left[1-\left(\frac{\rho-d\cos\theta}{(1-d^2\sin^2\theta)}\right)^2\right]^{1/2}\rho^{-2}\,d\rho\right\}d\theta \tag{2.7}$$

Сделаем еще одну замену переменных $z=(\rho-d\cos\theta)(1-d^2\sin^2\theta)^{-1/2}$. Можно показать, что $-1<z\leqslant 1$ при $d>1$. С учетом этой замены переменных интеграл (2.7) запишем следующим образом:

$$J_{sk}=\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}d\theta\int_{-1}^{1}\frac{(1-z^2)^{1/2}\,dz}{z-x}=-\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{1}{d}+(d^2-1)^{-1/2}\right),\quad \alpha_1=\arcsin(\alpha)^{-1} \tag{2.8}$$

Необходимо определить еще интеграл (вычисляется тем же способом):

$$I=\iint_S\frac{\Omega(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2}{[\eta_1^2+(\eta_2-d)^2]^{3/2}}$$

$$I=\frac{\pi(2+d)}{d(d+1)^{1/2}(d-1)^{5/2}}+\frac{\pi}{(d-1)^{5/2}}\Bigg\{9{,}48\ln\times$$

$$\times\frac{1+d+(d^2-1)^{1/2}+[d+(d^2-1)^{1/2}]^{1/2}}{1+d+(d^2-1)^{1/2}-[d+(d^2-1)^{1/2}]^{1/2}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}[d+(d^2-1)^{1/2}]^{1/2}}{1-d-(d^2-1)^{1/2}}\Bigg\} \tag{2.9}$$

Подставляя все полученные выражения в (2.5), получим для третьего приближения в ближайшей к микротрещине точке макротрещины

$$k_{\mathrm{I}}^{(3)}=p_{30}^{(0)}(\pi r_0)^{1/2}\Bigg\{1+\frac{4\lambda^3}{3\pi^3(1-\nu/2)(d-1)^3}\left((d-1)^{1/2}\arcsin(d)^{-1}+(d+1)^{-1/2}\right)\times$$

$$\times\Bigg[\frac{2+d}{d(d+1)^{1/2}}+9{,}48\ln\frac{1+d+(d^2-1)^{1/2}+[d+(d^2-1)^{1/2}]^{1/2}}{1+d+(d^2-1)^{1/2}-[d+(d^2-1)^{1/2}]^{1/2}}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}[d+(d^2-1)^{1/2}]^{1/2}}{1-d-(d^2-1)^{1/2}}\Bigg\} \tag{2.10}$$

3. Рассмотрим также случай, когда микротрещина расположена над макротрещиной, матрицы коэффициентов e_{ijk} и l_{ijkn} имеют вид

$$e_{ik0}=\begin{Vmatrix}0\\0\\-1\end{Vmatrix},\quad e_{i0k}=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix},\quad l_{ijk0}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

Функции $R_{0k}^{(0)}$ и $R_{k0}^{(0)}$ и интеграл J_{sk} в этом случае выражаются следующим образом:

$$R_{k0}^{(0)}=[\eta_1^2+\eta_2^2+(d_{k0}/r_0)^2]^{1/2},\qquad R_{0k}^{(0)}=[\zeta_1^2+\zeta_2^2+(d_{0k}/r_0)^2]^{1/2}$$

$$J_{sk}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}\rho(1-\rho)^{1/2}[-R_{0k}^{-3}-6d^2R_{0k}^{-5}+15d^4R_{0k}^{-7}]\,d\rho$$

Интеграл вычисляется в конечном виде с помощью замены переменных $\eta_1=\rho\cos\theta$, $\eta_2=\rho\sin\theta$, и третье приближение записывается в виде

$$
\begin{gathered}
k_{\mathrm{I}}^{(3)}=p_{30}^{(0)}(\pi r_0)^{1/2}\left\{1+\frac{2\lambda^3}{3\pi^3}J_{sk}\left[\frac{8d^3}{(1+d^2)^3}-\frac{6d^2+8d^4}{(1+d^2)^{7/2}}\right]\right\}, \\
k_{\mathrm{II}}^{(3)}=p_{30}^{(0)}(\pi r_0)^{1/2}\lambda^3\left\{J_{sk}\left[\frac{4}{(1+d^2)^2}-\frac{8d^3}{(1+d^2)^3}-\right.\right. \\
\left.\left.-\frac{3d}{(1+d^2)^{5/2}}+\frac{15d^4}{(1+d^2)^{7/2}}\right]\right\}, \quad k_{\mathrm{III}}^{(3)}=0
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

$$J_{sk}=[\arcsin(1+d)^{-1/2}+6d^2(1+d^2)^{-3/2}+d(1-d^2)(1+d^2)^{-2}]$$

Из формул (2.10) и (3.2) следует, что наличие микротрещины в плоскости макротрещины увеличивает коэффициент интенсивности напряжений и способствует прорастанию макротрещины, в то время как наличие микротрещины над макротрещиной создает экранирующий эффект. Суммарный коэффициент интенсивности напряжений при равномерном по всем координатам расположений микротрещин, таком, что на отрезке, равном радиусу, помещается три микротрещины, равен $1{,}22p_{30}^{(0)}(\pi r_0)^{1/2}$. Это говорит о том, что страгивание макротрещины в поврежденном материале облегчается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
2. *Болотин В. В.* Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
3. *Болотин В. В.* Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127–137.
4. *Ромалис Н. Б., Тамуж В. П.* Распространение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами // Механика композит. материалов. 1984. № 1. С. 42–51.
5. *Кит Г. С.* Общий метод решения пространственных задач теплопроводности и термоупругости для тела с дискообразными трещинами // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 12. С. 18–24.
6. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 270 с.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. *Кiт Г. С., Хай М. В.* Интегральнi рiвняння просторових задач термопружностi для тiл з трiщинами. Доп. АН УССР. Сер. А. 1975. № 12. С. 1105–1109.
9. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings // Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech. 1966. V. 33. N 3. P. 601–611.

Воронеж, Рига

Поступила в редакцию
2.II.1987