

УДК 539.375

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ
С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПОЛОСТЕЙ И ТРЕЩИН. Ч. II.
(Сдвиговая задача)**

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., ЖИТНИКОВ Ю. В.

В [1] рассмотрена нормальная задача о равновесии полости (трещины-разреза) с областями налегания и раскрытия, предложен алгоритм численной реализации решения этой задачи. В данной работе рассматривается сдвиговая задача о равновесии трещины-разреза с условиями трения при сложном нагружении. С использованием свойств решения этой задачи, установленных в [2], показано, что при определенных условиях возможно увеличение скачка смещения по трещине при уменьшении сдвигового напряжения.

В случае осесимметричной сдвиговой задачи предложен численный алгоритм нахождения решения при сложном нагружении. Получены интегральные соотношения, связывающие напряжения и скачки смещения на трещине. Интегральные соотношения получены способом наиболее близким к примененному в [3].

Показано, что вблизи центра трещины всегда имеет место область сцепления. Рассмотрены примеры сложного нагружения дисковой и кольцевой трещин с условиями трения. Произведен расчет эволюции скачка смещений на трещине, а также проанализировано ее предельное равновесие.

Сдвиговая задача в осесимметричной постановке рассматривалась [3, 5–8]. На особенность решения задачи с условиями трения в осесимметричной постановке указывалось [8].

1. Постановка сдвиговой задачи. Рассмотрим равновесие линейно-упругого изотропного пространства с трещиной, занимающей область Ω в плоскости $x_3=0$, под действием системы объемных сил, изменяющихся в процессе их приложения как функция параметра нагружения θ . В областях налегания поверхности трещины взаимодействуют по закону сухого трения Кулона: $F_{3i} = -\rho\sigma V_i/V$, где ρ — коэффициент трения, $\sigma(x_1, x_2, \theta) \geq 0$ — давление, $V_i = \partial u_i / \partial \theta$ — скорость скольжения, $u_i = u_i^- - u_i^+$ — скачок смещения ($i=1, 2$), $V = (V_1^2 + V_2^2)^{1/2}$.

В данной постановке задача разбивается на нормальную и сдвиговую [2]. В нормальной задаче определяется область налегания и распределение на ней нормального напряжения $\sigma_{33}(x_1, x_2, \theta)$. Будем считать, что нормальная задача решена и $\sigma_{33}(x_1, x_2, \theta)$ известно.

Рассмотрим сдвиговую задачу. В сдвиговой задаче находятся области скольжения (обозначим G_i , $V \neq 0$) и сцепления (обозначим G , $V = 0$). Переходя методом суперпозиции решений [1] (методом Бюкнера) к крайвым условиям на трещине Ω плоскости $x_3=0$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_{3i} &= \sigma_{3i}^0 - \rho\sigma V_i/V \quad ((x_1, x_2) \in G_i) \\ u_i(x_1, x_2, \theta) &= u_i^0(x_1, x_2, \theta), \quad V_i(x_1, x_2, \theta) = 0 \quad ((x_1, x_2) \in G) \\ u_i(x_1, x_2, \theta) &= 0 \quad ((x_1, x_2) \in R^2 \setminus \Omega) \\ (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2)^{1/2} &\leq \rho\sigma \quad ((x_1, x_2) \in \Omega, x_3 \rightarrow \pm 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\sigma_{3i}(x_1, x_2, \theta)$ — напряжения, определенные заданной нагрузкой, u_3^0 — скачок смещения в области G , определяемый предысторией нагружения. В дальнейшем индекс 3 в выражении для напряжений будет опускаться.

Так как сила трения F_i ограничена $F \leq \rho\sigma$, то в области сцепления

должны выполняться следующие ограничения

$$|\sigma_i^0 - \sigma_i| \leq \rho \sigma \quad (1.2)$$

В [2] установлен ряд свойств решения сдвиговой задачи, необходимых для его построения.

Утверждение 1. Скачок смещения $u_i(x_1, x_2, \theta)$ является непрерывно дифференцируемой функцией параметра нагружения θ (свойство монотонности).

Теорема единственности. Распределение скачков смещения и скоростей в конечной точке заданной траектории нагружения единственно.

Утверждение 2. Для возникновения приращения скачка смещения $\delta u_i(x_1, x_2, \theta)$ на трещине Ω должна существовать точка $(x_1, x_2) \in \Omega$, где выполняется неравенство

$$\delta \tau(x_1, x_2, \theta) \cos \gamma \geq \rho \delta \sigma(x_1, x_2, \theta) \quad (1.3)$$

где $\delta \tau = (\delta \sigma_i^0 \delta \sigma_i^0)^{1/2}$, γ — угол между $\delta \sigma_i$ и δu_i . Неравенства (1.2), (1.3) необходимы для отыскания решения краевой задачи (1.1) при заданной траектории нагружения.

Условие монотонности скольжения (1.3) позволяет установить следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть при нагружении плоской трещины Ω вдоль траектории $\sigma_i^0 = \sigma_i^0(x_1, x_2, \theta)$, $\sigma = \sigma(x_1, x_2, \theta)$ при $\theta = \theta_0$ возникает режим нагружения $\delta \sigma(x_1, x_2, \theta_0) / \delta \theta < 0$.

Тогда, если на области скольжения $G_1(\theta_0)$ существуют подобласть G_1' , такая, что

$$\delta \tau(x_1, x_2, \theta) = (\delta \sigma_i^0 \delta \sigma_i^0)^{1/2} < \rho |\delta \sigma(x_1, x_2, \theta_0)|, \quad (x_1, x_2) \in G_1'$$

то процесс скольжения монотонно продолжается.

Для того, чтобы доказать это утверждение, надо проверить выполнение условия (1.3) монотонности скольжения, которое запишем в виде: $\delta \tau \cos \gamma + (-\rho \delta \sigma) \geq 0$. В силу сделанных предположений, это неравенство выполняется в области G_1' . Следовательно, в G_1' выполняется неравенство (1.3), что означает монотонность скольжения на участке траектории $\delta \sigma / \delta \theta < 0$. Утверждение доказано.

В частности, если $\sigma_i^0 = s(\theta) \Phi_{(i)}(x_1, x_2)$, $s \geq 0$, $\sigma(x_1, x_2, \theta) = s(\theta) \psi(x_1, x_2)$, то при $\delta \sigma / \delta \theta < 0$ по условиям утверждения 3, для монотонности скольжения на области G_1 , должна существовать подобласть G_1' , где

$$\Phi(x_1, x_2) = (\Phi_{(i)} \Phi_{(i)})^{1/2} \leq \rho \psi(x_1, x_2) \quad ((x_1, x_2) \in G_1')$$

таким образом существует область G_1' , где процесс скольжения монотонно продолжается. При этом, если границы G_1' и Ω совпадают на некотором участке, то в силу монотонности скольжения, там произойдет увеличение скачка смещения и, следовательно, связанного с ним коэффициента интенсивности напряжений. Последнее в свою очередь может привести к достижению предельного равновесия трещины на стадии уменьшения параметра нагружения.

Этот эффект связан с тем, что при уменьшении параметра нагружения сила трения в рассматриваемом распределении напряжений убывает быстрее, чем сдвиговая сила, что и определяет процесс догружения. Естественно в отсутствии сил трения этот эффект не наблюдается. Рассмотрим теперь с учетом установленных свойств сдвиговой задачи эффективный способ ее решения в осесимметричном случае, включающий регулярный алгоритм нахождения неизвестных границ областей скольжения при сложном нагружении.

2. Осесимметричная сдвиговая задача. В осесимметричной задаче в цилиндрической системе координат x_3, r, β скольжение будет происходить либо в радиальной плоскости вдоль оси r , либо в меридианальной вдоль оси β . Краевая задача (1.1), а также ограничения в области сцепления (1.2) и условия монотонности скольжения будут иметь аналогичный вид для осесимметричного случая с заменой индекса $i=1, 2$ на $\alpha=r, \beta$. В этом

случае угол γ в (1.3) равен $\gamma=0$ или $\gamma=\pi$ в зависимости от направления скольжения. Перейдем к построению численного решения задачи. Пусть задана траектория нагружения $(\sigma_\alpha^0, \rho\sigma)$ ($\alpha=\beta$ или r), которую разобьем на конечное число участков путем нанесения на нее конечного числа точек. Криволинейные участки заменим прямолинейными и зададим приращение $(\delta\sigma_\alpha^0, \rho\delta\sigma)$ при переходе от одной точки на траектории к другой. Распределение скачка смещения в конечной точке траектории нагружения определим суммируя последовательно его приращение при переходе от одной точки разбиения к другой вдоль прямолинейных участков. Для этого необходимо указать регулярный алгоритм нахождения приращения скачка смещения при переходе от одной точки траектории к другой при заданном приращении $(\delta\sigma_\alpha^0, \rho\delta\sigma)$.

Будем предполагать, что в данной точке траектории, где определяется приращение скачка смещения δu_α при данных $(\delta\sigma_\alpha, \rho\delta\sigma)$ известно, распределение напряжений σ_α^0 и смещений u_α .

Задача определения приращения скачка смещения связана с определением неизвестной границы области скольжения, на которой он определяется. Укажем итерационный процесс нахождения этой области в данной точке траектории $(\sigma_\alpha^0, \rho\sigma)$ при заданных $(\delta\sigma_\alpha^0, \rho\delta\sigma)$.

Пусть для значений параметров нагружения $(\sigma_\alpha^0, \rho\sigma)$ известно распределение полей напряжений на трещине и приращение $(\delta\sigma_\alpha^0, \rho\delta\sigma)$. На основе этого определим точку (или область) G_1' , где выполняется условие монотонности скольжения (1.3).

В качестве первого шага построения итерационного процесса отыскания неизвестной границы области скольжения G_1 возьмем область $G_1^{(1)} = G_1'$. При этом направление скольжения в силу выполнения условия непрерывности (1.3) сохраняется.

Зная распределение напряжений в области Ω , определим область $G^{(1)'}$, где не выполняется ограничение в области сцепления (1.2). Будем теперь расширять область $G_1^{(1)}$ за счет добавления области $G^{(1)'}$.

Покажем, что скачок смещения $u_\alpha^{(1)}(r, \theta)$ монотонно изменяется на области $(x_1, x_2) \in G_1^{(1)} \cup G^{(1)'}$, $V_\alpha \neq 0$. Действительно, представим решение краевой задачи (1.1) для области $G_1^{(2)} = G_1^{(1)} \cup G^{(1)'}$ в виде суммы решений двух краевых задач (1.1) для области $G_1^{(1)}$ и следующей краевой задачи для области $G_1^{(2)'}$:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\alpha &= 0 \quad ((x_1, x_2) \in G_1^{(1)}) \\ \Delta\sigma_\alpha &= -\sigma_\alpha + \sigma_\alpha^0 - \rho\sigma V_\alpha/V \quad ((x_1, x_2) \in G^{(1)'}) \\ \Delta u_\alpha &= 0 \quad ((x_1, x_2) \in \Omega \setminus G_1^{(2)}) \end{aligned}$$

Так как по условию выбора $G^{(1)'}$, $|\sigma_\alpha - \sigma_\alpha^0| > \rho\sigma$ и направление сдвиговой силы σ_α совпадает с направлением скольжения, то процесс скольжения является монотонным и происходит вдоль всей области $G_1^{(2)}$.

После этого снова решаем краевую задачу (1.1) для области $G_1^{(2)}$, находим распределение смещений в $G_1^{(2)}$ и напряжений σ_α в $G^{(2)} = \Omega \setminus G_1^{(2)}$. В $G^{(2)}$ выделим области $G^{(2)'}$, где не выполняется ограничение в области сцепления (1.2). Будем расширять $G_1^{(2)}$ за счет добавления областей $G^{(2)'}$. Аналогично предыдущему шагу процесс скольжения будет иметь место вдоль всей области $G_1^{(3)} = G_1^{(2)} \cup G^{(2)'}$, причем непрерывно. И так далее.

В итоге получим систему объемлющих областей скольжения $G_1^{(1)} \subset G_1^{(2)} \subset \dots \subset G_1^{(i)} \subset \dots \subset \Omega$. Поскольку все они содержатся в Ω , то область $G_1 = \bigcup G_1^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots$) является искомой областью скольжения. Действительно, вне G_1 в $\Omega \setminus G_1$ выполняется ограничение в области сцепления (1.2). Согласно асимптотическому анализу [2], граница этой области является несингулярной, то есть искомой границей. В силу теоремы единственности область G_1 и будет искомой областью скольжения.

Предложенный алгоритм выделения областей скольжения и сцепления может быть также использован в плоских задачах теории упругости о равновесии разрывов с сухим трением при сложном нагружении.

3. Основные представления смещений и напряжений в осесимметричном случае. Рассмотрим задачу о равновесии линейно-упругого пространства с осесимметричной трещиной (либо утолщенной полостью) под дейст-

вием объемных и поверхностных нагрузок. В этом случае, как известно, осесимметричная задача разбивается на две: в меридианальной и радиальной плоскостях [3, 9]. Последняя разбивается на нормальную и сдвиговую в радиальной плоскости.

Таким образом, в осесимметричной постановке будем иметь три независимые задачи: нормальную и две сдвиговые: в радиальной и меридианальной плоскостях. Анализ нормальной задачи и метод расчета равновесия полостей (трещин — разрезов) при сжатии с учетом образования областей налегания дан в [1, 4]. Ниже рассмотрим только сдвиговую задачу.

Распределение смещений и напряжений в этом случае в цилиндрической системе координат x_3, r, β через две функции h, g имеет вид [3]:

$$u_r = 2(1-\nu)\partial h/\partial x_3 - x_3\partial\psi/\partial r \quad (3.1)$$

$$\sigma_r = 2\mu\partial h/\partial x_3 - x_3\partial\psi/\partial r, \quad \psi = \partial h/\partial x_3$$

$$u_\beta = 2(1-\nu)g, \quad \sigma_\beta = 2\mu(1-\nu)\partial g/\partial x_3 \quad (3.2)$$

$$\Delta_1 = (\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r - r^{-2} + \partial^2/\partial x_3^2) \quad (3.3)$$

$$\Delta_1 g = 0, \quad \Delta_1 h = 0$$

где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, u_r, u_β — компоненты смещения, σ_β, σ_r — компоненты сдвигового напряжения в цилиндрической системе координат. Формулы (3.1), (3.2) содержат выражения компонент смещения и напряжения, необходимых для постановки смешанной задачи. Выражение остальных компонент смещений и напряжений даны в [3].

Рассмотрим осесимметричную задачу о равновесии трещины с учетом трения. Подставляя в краевые условия (1.1) выражения для компонент смещения и напряжения (3.1) или (3.2), приходим к следующим смешанным краевым условиям для функций h или g :

$$f = 1/2 u_\alpha (1-\nu)^{-1} (r \in G) \quad (3.4)$$

$$\partial f/\partial x_3 = \sigma_\alpha / (2\mu c) \quad (r \in G_1)$$

$$f = (h, g), \quad c = 1 (\alpha = r), \quad c = 1 - \nu (\alpha = \beta), \quad \sigma_\alpha = \sigma_\alpha^0 + F_\alpha$$

Таким образом, необходимо решать дифференциальное уравнение (3.3) при смешанных граничных условиях (3.4) вдоль траектории нагружения $(\sigma_\alpha, \rho\sigma)$. Интегрирование вдоль траектории будет происходить в приращениях $(\Delta\sigma_\alpha, \rho\Delta\sigma)$ до конечной точки нагружения. Алгоритм нахождения неизвестных областей G и G_1 изложен в п. 2. Здесь на каждом шаге придется для последовательности областей $G_1^{(i)}$ решать краевую задачу (3.4) для уравнения (3.3). В [1] при построении решения нормальной задачи были получены соотношения, связывающие скачок смещения и напряжения. В п. 5 аналогичные соотношения (5.16), (5.19) получены для сдвиговой задачи в осесимметричной постановке. Эти соотношения связывают скачок сдвиговых компонент смещения и напряжения в соответствующих областях. На основе соотношений (5.6), (5.19) получено в п. 5 и удобное представление решения в случае кольцевой области.

4. Примеры расчетов. В качестве примера квазистатического изменения напряженного состояния пространства с трещиной с условиями трения рассмотрим задачу о кольцевой трещине ($b \leq r \leq a$), расположенной в плоскости $x_3 = 0$ при действии одной сосредоточенной силы $F_3(0, 0, h) = P(\theta)\delta(x_3 - h)\delta(x_1)\delta(x_2)$. Величина сосредоточенной силы $P = P(\theta)$, $P(0) = 0$, $\theta \geq 0$ может изменяться в процессе ее приложения, а направление действия сохраняется ($P(\theta) \geq 0$). В этом случае в сплошном материале на плоскости $x_3 = 0$ возникают напряжения $-\sigma_{33}^0, -\sigma_{3r}^0$ [9]:

$$\sigma_{33}^0 = P(\theta)rF(r), \quad \sigma_{3r}^0 = P(\theta)hF(r) \quad (4.1)$$

$$F(r) = 1/2(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}(1+3(1-2\nu)^{-1}hR^{-2})(8\pi R^3)^{-1}$$

$$R^2 = h^2 + r^2$$

Результаты работы [2], а также форма зависимости (4.1) позволяют до численного решения задачи произвести качественный анализ возникновения возможных режимов скольжения при сложном нагружении. Для этого выпишем условие возникновения скольжения в области сцепления (1.2) и условие монотонности скольжения (1.3) [2] для данного случая:

$$|\sigma_r - \sigma_r^0| \geq \rho \sigma \quad (4.2)$$

$$\delta \tau \cos \gamma \geq \rho \delta \sigma, \quad \delta \tau = |\delta \sigma_r^0| \quad (4.3)$$

где σ_r определяются через скачок смещения u_r на трещине, $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$ — угол между V_r и $\delta \sigma_r$.

Рассмотрим условие возникновения скольжения при нагружении $dP/d\theta > 0$ из начальной точки $P=0$. В этом случае согласно (4.2) имеем $\sigma_r^0 \geq \rho \sigma$ и с учетом (4.1), получим, что это неравенство выполняется при $r \geq \rho h$. Поэтому, если $a \leq \rho h$, то скольжение на трещине вообще не возникает, если $b \geq \rho h$, то в этом случае $\sigma_r^0 \geq \rho \sigma$ для любого $r \geq b$ и следовательно область скольжения занимает всю поверхность трещины. При $a \geq \rho h$, $b < \rho h$ на трещине может возникнуть область скольжения, граница которой, вообще говоря, $b \leq R \leq a$. Так как скачок смещения прямо пропорционален $P(\theta)$, то при $dP/d\theta > 0$ возникает режим нагрузки ($du_r/d\theta > 0$, $u_r > 0$), граница области скольжения не зависит от P , а определяется только величинами a , b . В частности, для дисковой трещины радиуса a , размер области скольжения зависит только от a , $R = \bar{R}(a)$ при ρ , h , $\rightarrow \text{const}$.

Предположим, теперь, что после процесса увеличения до некоторого $P = P_1$, происходит уменьшение нагрузки $dP/d\theta < 0$, $0 \leq P \leq P_1$. Проанализируем возможные режимы скольжения в этом случае. Воспользуемся условием монотонности скольжения (4.3). Подставляя (4.1) в (4.3) с учетом того, что $\delta \sigma_r^0 < 0$ при $\delta P < 0$, и $\gamma = \pi$, $\delta \tau = |\delta P| r F(r)$, $\delta \sigma = \delta P h F(r)$:

$$0 \leq r \leq \rho h \quad (4.4)$$

Таким образом, если размер трещины $0 \leq b < \rho h$, то условие монотонности скольжения (4.1) выполняется и на трещине продолжается процесс нагрузки в области от R до R_1 , где R , R_1 — границы области скольжения, в режиме нагрузки $du_r/d\theta > 0$ при $dP/d\theta$. Этот результат означает, что при уменьшении нагрузки может происходить процесс догружения трещины, то есть увеличение скачка смещения. При дальнейшем уменьшении $P = P(\theta)$ на трещине возникает область разгрузки ($du_r/d\theta < 0$, $u_r > 0$) при значении $P = P(\theta)$, определяемом из (4.2), подстановкой в качестве σ_r его значения в области сцепления $R_1 \leq r \leq a$.

В случае $b \geq \rho h$ условие монотонности скольжения при уменьшении $P(\theta)$ не выполняется и, следовательно, поверхности трещины перейдут в состояние сцепления. Случай $b \geq \rho h$ позволяет провести качественный анализ возможных режимов скольжения и выделить характерные нагружения, при которых они возникают. Определим из (4.2) значение параметра $P = P_s$, при котором возникает режим разгрузки $du_r/d\theta < 0$. Для этого подставим в (4.2) $\sigma_{3r} = F(r)P_1(r - \rho h)$, $\sigma_r^0 = PrF(r)$, $\sigma = PhF(r)$. Получим неравенство: $|P_1(r - \rho h) - Pr| \leq \rho h P$ или $P_1(r - \rho h) - Pr \geq \rho h P$ и $P_1(r - \rho h) - Pr \leq -\rho h P$. Из этих неравенств следует, что при $b > \rho h$ и $0 < P < P_1$ выполняется только $P_1(r - \rho h) \geq P(r + \rho h)$.

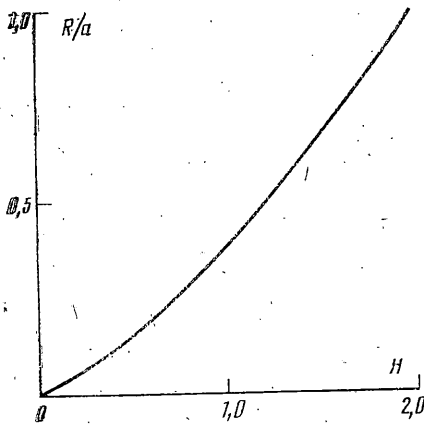
Таким образом, максимальное значение P , при котором возникнет режим разгрузки $du_r/d\theta$, достигается при

$$P_s = P_1(a - \rho h)(a + \rho h)^{-1} \quad (4.5)$$

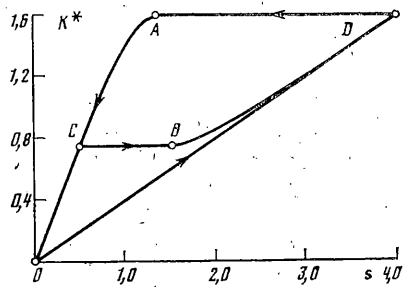
При этом область разгрузки возникает от границы $r = a$, а граница области скольжения R_1 зависит от P . Рассмотрим теперь случай увеличения $dP/d\theta > 0$, после уменьшения до значения $P = P_2$. Из (4.2) при $\sigma_r = F(r)P_2(r + \rho h)$, $\sigma_r^0 = PrF(r)$, $\sigma = PhF(r)$ определим, что при $b > \rho h$ процесс нагрузки начнется от границы трещины $r = a$ при $P = P_3$:

$$P_3 = P_2(a + \rho h)(a - \rho h)^{-1} \quad (4.6)$$

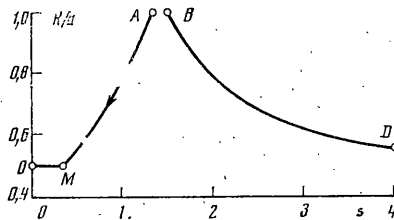
Граница области скольжения $R = R(P)$ зависит от P .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, проанализировано возможное изменение режимов скольжения в зависимости от изменения нагрузки. В случае $b \geq \rho h$ удается аналитически найти критические напряжения, определяющие соответствующий режим скольжения.

Запишем теперь краевую задачу для функции $h(r, \beta)$ (3.1). Рассмотрим случай, когда на трещине возникает только одна область скольжения, с границами R, R_1 . Предположим, что при $P > P_0$ возникает некоторый режим скольжения в области $R < r < R_1$. Представим скачок смещения и напряжения в виде $u_r(P, r) = \Delta u_r(P, r) + u_r(P_0, r)$, $\sigma_r(P, r) = \Delta \sigma_r(P, r) + \sigma_r(P_0, r)$. Тогда приращение скачка смещения в области сцепления всегда равно нулю, а краевая задача в приращениях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_3} &= \sigma_r(P_0) - \sigma_r(P) - \rho \sigma(P_0) V_r(P_0) / V(P_0) + & (4.7) \\ &+ \rho \sigma(P) V_r(P) / V(P) \quad (R \leq r \leq R_1) \\ h &= 0 \quad (0 \leq r \leq R, r \geq R_1) \end{aligned}$$

Таким образом, при $b \geq \rho h$ возможные режимы скольжения и характерные напряжения, определяющие их возникновение, можно рассчитать, пользуясь соотношениями (6.5), (6.6). Из этих соотношений следует, что $R_1 = a$, $b \leq R = R(P) \leq a$ при $b \geq \rho h$.

Случай $0 \leq b \leq \rho h$ сложнее: на участке траектории, соответствующем ($dp/d\theta < 0$) возникает сначала область увеличения скачка смещения (догрузки), а затем и область уменьшения скачка смещений (разгрузки), примыкающая к контуру трещины (см. комментарий к (4.4)). Ниже в качестве примера рассчитано изменение скачка смещений при $dp/d\theta < 0$ и $0 \leq b \leq \rho h$ в режиме догрузки. В этом случае $b \leq R < R_1 \leq a$. Для каждого случая, подставляя правую часть (4.7) в правую часть (5.24), получим систему алгебраических уравнений. Неизвестную границу в каждом режиме скольжения определим по выше описанному алгоритму п. 2. При проведении численных расчетов все величины размерности длины безразмерны на a , а напряжения на $\mu/(1-\nu)$. Обозначим $s = P(1-\nu)/\mu a$. Коэффициент трения взят $\rho = 0.5$. На фиг. 1 показана зависимость радиуса области скольжения R от параметра $H = h/a$. При $H = 0$ область подвижки занимает всю трещину. Величина R зависит от произведения ρH , $R = R(\rho H)$.

Следовательно, имеет место подобие при изменении ρ . Так если известна кривая $R(\rho H)$ при данном ρ , то для получения этой зависимости при $\rho = \rho_1$ надо подставить в зависимость $R(\rho H)$ вместо H , $H = \rho_1 H_1 / \rho$. На фиг. 2 изображен график зависимости $K^* = K_2(1-\nu)100/\mu\sqrt{a}$ (K_2 -коэффициент интенсивности напряжений при $r=a$ в режиме нагрузка-разгрузка-нагрузка (было взято $b=0,5a$, $h=a$, $\rho=0,5$). На участке OD (фиг. 2) нагрузка увеличивается и коэффициент интенсивности напряжений возрастает. Затем происходит уменьшение параметра нагружения s . На участке AD скачок смещения не изменяется (поверхности трещины находятся в состоянии сцепления). Начиная со значения соответствующего $t.A$, (определяемой (4.5)) происходит разгрузка начиная от границы трещины $r=a$. Коэффициент интенсивности в этом случае уменьшается до нуля ($t.0$ на фиг. 2). Зависимость изменения границы области подвижки носит нелинейный характер от s и изображена на фиг. 3 (кривая AMO). Если при разгрузке параметр нагружения s снова начинает увеличиваться (точка C на фиг. 2), то начиная с некоторого значения s (точка B на фиг. 3), определяемого соотношением (4.6), снова возникнет режим нагрузки (кривая BD фиг. 2) от границы $r=a$. Зависимость границы области подвижки при повторном нагружении изображена на фиг. 3 участок BD и также имеет существенно нелинейную зависимость от s .

Был рассмотрен случай $dP/d\theta < 0$ после достижения значения $P=P_1$ (при $b=0,385a$, $h=a$, $\rho=0,5$). При этом изменение скачка смещения на трещине пропорционально $\Delta P = P - P_1$. В этом случае область подвижки занимает область от b до R_1 ($R_1=0,538a$). Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от s имеет вид: $K_2 = \alpha_0 \mu \sqrt{R_1} 10 (s_1 - s) / (1 - \nu)$, $s_1 = 4$, $\alpha_0 = 0,12$, $s_2 = 1,5$; $s_1 \leq s \leq s_2$. Расчет проводился до начала разгрузки от границы $r=a$. При этом коэффициент интенсивности увеличивается.

5. Вывод интегральных соотношений. 5.1. Решение (3.3) уравнения (3.3) в полупространстве $x_3 > 0$ будем разыскивать в виде

$$f(r, x_3) = \int_0^{\infty} A(q) e^{-qx_3} J_1(qr) q dq \quad (5.1)$$

$$A(q) = \int_0^{\infty} f(r, 0) J_1(qr) r dr$$

Выражение (5.1) определяет функцию $f(r, x_3)$ только в том случае, если при $x_3=0$ задана функция $f(r, 0)$ или ее производная $\partial f(r, 0)/\partial x_3$. В случае же смешанных граничных условий (3.4), когда в одной части плоскости $x_3=0$ задана $f(r, 0)$, а в другой $\partial f(r, 0)/\partial x_3$, второе соотношение (5.4) не определяет $A(q)$. Поэтому для определения $f(r, x_3)$ надо либо записать интегральное уравнение в тех областях, где она не задана [3, 5-8], либо попробовать получить интегральное соотношение, связывающее $f(r, 0)$ и $\partial f(r, 0)/\partial x_3$ в различных областях. Для отыскания соотношений между f и $\partial f/\partial x_3$ можно воспользоваться представлениями бесселевой функции с различными пределами интегрирования [10, 11] (этот способ использован при построении решения нормальной задачи [1]).

Эти представления получим, исходя из известных выражений для бесселевой функции $J_0(z)$ [10]:

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin \eta z d\eta}{(\eta^2 - 1)^{1/2}} \quad (5.2)$$

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \eta z d\eta}{(1 - \eta^2)^{1/2}} \quad (5.3)$$

Возьмем в (5.2) производную по z , после чего получим

$$J_0'(z) = \frac{2}{\pi z} \int_1^{\infty} \frac{\sin \eta z - \eta \sin z}{(\eta^2 - 1)^{3/2}} d\eta$$

Используя соотношение $J_1(z) = -J_0'(z)$, преобразуем полученные соотношения к виду

$$J_1(z) = -\frac{2}{\pi z} \int_1^{\infty} \left[\frac{\sin \eta z}{(\eta+1)^{3/2}} - \frac{\sin z}{\eta^{3/2}} \right] \frac{d\eta}{(\eta-1)^{3/2}} \quad (5.4)$$

Возьмем теперь производную по z в (5.3), после чего получим

$$J_0'(z) = -\frac{2}{\pi} z^{-1} \int_0^1 \frac{\cos \eta z - \cos z}{(1-\eta^2)^{3/2}} d\eta$$

Учитывая, что $J_1(z) = -J_0'(z)$ и преобразовывая этот интеграл, получим

$$J_1(z) = \frac{2}{\pi} z^{-1} \int_0^1 \left[\frac{\cos \eta z}{(1+\eta)^{3/2}} - \frac{\cos z}{\eta^{3/2}} \right] \frac{d\eta}{(1-\eta)^{3/2}} + \frac{\sqrt{2} \cos z}{\pi z} \quad (5.5)$$

Введем теперь обобщенные функции $(1-\eta^2)_+^{-1/2}$, $(\eta^2-1)_+^{-1/2}$ [11]. Правила дифференцирования и интегрирования обобщенных функций изложены, например в [11]. Тогда интегралы (5.4) и (5.5) регуляризованные представления интегралов с этими обобщенными функциями [11], которые запишутся

$$J_1(z) = -\frac{2z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 - z^2)_+^{3/2}} \quad (5.6)$$

$$J_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(z^2 - x^2)_+^{3/2}} \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.6), (5.7) $z=rq$, получим необходимые представления

$$J_1(rq) = \frac{2}{\pi} \frac{r}{q} \int_0^{\infty} \frac{\cos qy dy}{(r^2 - y^2)_+^{3/2}} \quad (5.8)$$

$$J_1(rq) = -\frac{2}{\pi} \frac{r}{q} \int_0^{\infty} \frac{\sin qy dy}{(y^2 - r^2)_+^{3/2}} \quad (5.9)$$

Представление (5.8), (5.9) для $J_1(z)$ получены дифференцированием представлений (5.2), (5.3) для $J_0(z)$. Эти же выражения могут быть получены способом аналитического продолжения. В дальнейшем нам понадобится соотношение

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} (z^2 - y^2)_+^{-1/2} (x^2 - z^2)_+^{-1/2} z dz = H(x-y) \quad (5.10)$$

$$H(x-y) = 1 \quad (x > y), \quad H(x-y) = 0 \quad (x < y)$$

Подставляя (5.8), (5.9) в (5.4) и меняя порядок интегрирования, получим

$$f(r, x_3) = -r \int_0^{\infty} \frac{\Phi_1 dy}{(r^2 - y^2)_+^{3/2}}, \quad \Phi_1 = \int_0^{\infty} A(q) e^{-qx_3} \cos qy dq \quad (5.11)$$

$$f(r, x_3) = r \int_0^{\infty} \frac{\Phi_2 dy}{(y^2 - r^2)_+^{1/2}}, \quad \Phi_2 = \int_0^{\infty} A(q) e^{-qx_3} \sin qy dq \quad (5.12)$$

Регуляризация выражений (5.11), (5.12) аналогична (5.4) и (5.6) и вычисляется по правилам регуляризации обобщенной функции x_+^λ [11]. Введенные функции $\Phi_i(y, x_3)$ являются аналитическими $(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial x_3^2)\Phi_i = 0$ и удовлетворяют соотношением

$$\partial\Phi_1/\partial y = \partial\Phi_2/\partial x_3, \quad \partial\Phi_2/\partial y = -\partial\Phi_1/\partial x_3 \quad (5.13)$$

Для получения первого интегрального соотношения в (5.11) возьмем производную по x_3 и с использованием (5.13) получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -3r \int_0^{\infty} \Phi_2 y (r^2 - y^2)_+^{-5/2} y dy$$

Заметим, что $\partial(y^3/(r^2 - y^2)_+^{-3/2})/\partial y = 3y^2 r^2 (r^2 - y^2)_+^{-5/2}$. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_3} &= r^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Phi_2}{y} \right) (r^2 - y^2)_+^{-3/2} y^3 dy = \\ &= r^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Phi_2}{y} \right) \right] (r^2 - y^2)_+^{-3/2} dy \end{aligned}$$

Домножим это соотношение на $rdr(x^2 - r^2)_+^{-1/2}$ и проинтегрируем от 0 до ∞ , с учетом (5.10), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi_2}{x} \right) = -\frac{2}{\pi} x^{-2} \int_0^{\infty} r^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} (x^2 - r^2)_+^{-1/2} dr \quad (5.14)$$

В (5.12), интегрируя по частям, заметим, что

$$f = r \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_2 y^{-1}) (y^2 - r^2)_+^{-1/2} dy$$

Домножим это соотношение на $rdr(r^2 - x^2)_+^{-1/2}$ и проинтегрируем от 0 до ∞ , получим, с учетом (5.10)

$$\int_x^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Phi_2}{y} \right) dy = \int_0^{\infty} \frac{f dr}{(r^2 - x^2)_+^{1/2}} = - \int_x^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (fr^{-1}) (r^2 - x^2)^{-1/2} dr$$

В итоге после дифференцирования по x имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi_2}{x} \right) = -x \int_x^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r} \right) (r^2 - x^2)^{-1/2} dr \quad (5.15)$$

Сравнивая (5.14) и (5.15), получим первое интегральное соотношение

$$x^3 \int_x^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (fr^{-1}) (r^2 - x^2)^{-1/2} dr = \int_0^{\infty} r^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} (x^2 - r^2)^{-1/2} dr \quad (5.16)$$

Для получения второго интегрального соотношения в (5.12) возьмем производную по x_3 с учетом (5.13)

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = r \int_0^{\infty} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} (y^2 - r^2)_+^{-1/2} dy = r \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) (y^2 - r^2)_+^{-1/2} dy$$

Домножим это соотношение на $(r^2-x^2)_+^{-1/2} dr$ и проинтегрируем от 0 до ∞ , получим

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -x \int_x^\infty \frac{\partial f}{\partial x_3} (r^2-x^2)_+^{-3/2} dr \quad (5.17)$$

Далее заметим, что $\partial(y(r^2-y^2)_+^{-1/2})/\partial y = r^2(r^2-y^2)^{-3/2}$. Тогда, интегрируя (5.11) по частям, имеем

$$f = r^{-1} \int_0^\infty y \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} (r^2-y^2)_+^{-1/2} dy$$

Домножим это соотношение на $(x^2-r^2)_+^{-1/2} r dr$ и проинтегрируем от 0 до ∞ , получим

$$\int_0^\infty f r^2 (x^2-r^2)_+^{-1/2} dr = \int_0^x \frac{\partial}{\partial r} (fr) (x^2-r^2)^{1/2} dr = \int_0^x y \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dy$$

Беря производную, приходим к выражению

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \int_0^x \frac{\partial}{\partial r} (fr) (x^2-r^2)^{-1/2} dr \quad (5.18)$$

Сравнивая (5.17) и (5.18), получаем второе интегральное соотношение

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial r} (fr) (x^2-r^2)^{-1/2} dr = -x \int_x^\infty \frac{\partial f}{\partial x_3} (r^2-x^2)^{-1/2} dr \quad (5.19)$$

Таким образом полученные интегральные соотношения связывают значение функции $f(r)$ и ее производную $\partial f/\partial x_3$. В частности, при построении решения смешанной задачи такой, что при $r < R$ задано $f(r)$, а при $r > R$, $\partial f/\partial x_3$, $x_3=0$ удобно пользоваться соотношением (5.19), которое при $x < R$ соответствует уравнению типа Абеля. Если же при $r > R$ задано $\partial f/\partial x_3$, а при $r < R$, $f(r)$, то удобно пользоваться (5.16), в котором при $x > R$ известна правая часть, а при $x < R$ — левая.

5.2. Рассмотрим задачу с двумя линиями раздела типа краевых условий. Пусть при $x_3=0$ задано краевое условие $f(r, 0) = \varphi_1(r)$ ($0 \leq r \leq R$), $f = \varphi_2(r)$ ($r \geq a$, $R < a$), $\partial f/\partial x_3 = \chi(r)$ ($R \leq r \leq a$).

Введем обозначение $\partial f/\partial x_3 = \chi_1(r)$ ($0 \leq r \leq R$), $\partial f/\partial x_3 = \chi_2(r)$ ($r \geq a$) и перепишем (5.16) и (5.19):

$$\int_x^R \frac{\chi_1 dr}{(r^2-x^2)^{1/2}} + \int_a^\infty \frac{\chi_2 dr}{(r^2-x^2)^{1/2}} = F_1 \quad (0 \leq x \leq R) \quad (5.20)$$

$$\int_0^R \frac{\chi_1 r^2 dr}{(x^2-r^2)^{1/2}} + \int_a^x \frac{\chi_2 r^2 dr}{(x^2-r^2)^{1/2}} = F_2 \quad (x \geq a) \quad (5.21)$$

$$F_1 = -x^{-1} \left[\int_0^x \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 r) (x^2-r^2)^{-1/2} dr + \chi \int_R^a \frac{\chi dr}{(r^2-x^2)^{1/2}} \right] \quad (0 \leq x \leq R)$$

$$F_2 = x^3 \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_2 r^{-1}) (r^2-x^2)^{-1/2} dr - \int_R^a \frac{\chi r^2 dr}{(x^2-r^2)^{1/2}} \quad (x \geq a)$$

Эта система близка к полученной ранее для кольцевой трещины отрыва [1]. Процесс сведения ее к системе алгебраических уравнений описан

в [1]. Аналогично из (5.20), получим систему интегральных уравнений

$$\frac{\pi}{2} \chi_1 + \frac{x}{(R^2 - x^2)^{1/2}} \int_a^{\infty} \frac{\chi_2 (r^2 - R^2)^{1/2}}{r^2 - x^2} dr = \psi_1(x) \quad (0 \leq x \leq R) \quad (5.22)$$

$$\frac{\pi}{2} \chi_2 + \frac{1}{x(x^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^R \frac{\chi_1 r^2 (a^2 - r^2)^{1/2}}{x^2 - r^2} dr = \psi_2(x) \quad (x \geq a)$$

$$\psi_1(x) = x \left[\frac{F_1(R)}{(R^2 - x^2)^{1/2}} - \int_x^R \frac{F_1' dy}{(y^2 - x^2)^{1/2}} \right] \quad (0 \leq x \leq R)$$

$$\psi_2(x) = x^{-1} \left[\frac{F_2(a)}{(x^2 - a^2)^{1/2}} + \int_a^x \frac{F_2' dy}{(x^2 - y^2)^{1/2}} \right] \quad (x \geq a)$$

Раскладывая в (5.22) подынтегральные выражения $(x^2 - r^2)^{-1}$ и $(r^2 - x^2)^{-1}$ по степеням $x^2 r^{-2}$ и $r^2 x^{-2}$, получим

$$\chi_1 = \frac{2}{\pi} \left[\psi_1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k x^{2(k+1)}}{(R^2 - x^2)^{1/2}} \right] \quad (0 \leq x \leq R) \quad (5.23)$$

$$\chi_2 = \frac{2}{\pi} \left[\psi_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^{-(2k+3)}}{(x^2 - a^2)^{1/2}} \right] \quad (x \geq a)$$

$$A_k = \int_a^{\infty} \frac{\chi_2 (r^2 - R^2)^{1/2}}{r^{2(k+1)}} dr, \quad C_k = \int_0^R \chi_1 r^{2(k+1)} (a^2 - r^2)^{1/2} dr$$

Домножим первое уравнение системы (5.23) на $x^{2(n+1)}(a^2 - x^2)^n dx$, а второе — на $x^{-2(n+1)}(x^2 - r^2)^{1/2} dx$ и проинтегрируем соответственно от 0 до R и от a до ∞ . Получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{\pi}{2} C_n + \sum_{k=0}^{\infty} A_k F_{k+n}^{(1)} = \psi_{1,n}, \quad \frac{\pi}{2} A_n + \sum_{k=0}^{\infty} C_k F_{k+n}^{(2)} = \psi_{2,n}$$

$$F_{k+n}^{(1)} = \int_0^R \frac{r^{2(k+n+3)} (a^2 - r^2)^{1/2} dr}{(R^2 - r^2)^{1/2}}, \quad \psi_{1,n} = \int_0^R \psi_1 r^{2(n+1)} (a^2 - r^2)^{1/2} dr$$

$$F_{k+n}^{(2)} = \int_a^{\infty} \frac{(r^2 - R^2)^{1/2} dr}{(r^2 - a^2)^{1/2} r^{2(k+n)+5}}, \quad \psi_{2,n} = \int_a^{\infty} \frac{\psi_2 (r^2 - R^2)^{1/2} dr}{r^{2(n+1)}}$$

Запишем эту систему в безразмерном виде

$$\frac{\pi}{2} M_n \left(\frac{a}{R} \right)^{2n+4} + \sum_{k=0}^{\infty} L_n F_{k+n} = \psi_{1,n} \quad (5.24)$$

$$\frac{\pi}{2} L_n \left(\frac{a}{R} \right)^{2n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} M_n F_{k+n} = \psi_{2,n}$$

$$L_n = A_n R^{2n}, \quad M_n = C_n a^{-2(n+2)}$$

$$F_{k+n} = \int_0^1 (1-\eta^2)^{k+n+1} (\varepsilon^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta$$

$$\psi_{1,n} = \int_0^1 \Phi_1^c(\eta) (1-\eta^2)^{\frac{2n+1}{2}} (\varepsilon^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta$$

$$\psi_{2,n} = \int_0^1 \Phi_2^c(\eta) (1-\eta^2)^{1/2(2n-1)} (\varepsilon^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \Phi_1(x) (R^2 - x^2)^{-1/2}, \quad \Phi_1^c = R^{-1} \Phi_1 [R(1-\eta^2)^{1/2}] \\ \psi_2(x) &= \Phi_2(x) (x^2 - a^2)^{-1/2}, \quad \Phi_2^c = a^{-1} \Phi_2 [a(1-\eta^2)^{-1/2}] \end{aligned}$$

Таким образом смешанная задача для уравнения (3.3) в случае кольцевой области свелась к бесконечной системе алгебраических уравнений, для коэффициентов, через которые решение представляется в явном виде. Для ее решения использовался метод редукции [12]. Различные примеры решения смешанных задач теории упругости для кольцевых областей рассмотрены в п. 4.

5.3. Рассмотрим сдвиговую задачу (3.1) или (3.2). Полученные интегральные соотношения позволяют непосредственно получить решения различных смешанных задач. Пусть в плоскости $x_3=0$ действуют только сдвиговые силы $\sigma_\alpha = \sigma(r)$ ($\alpha=r$ или $\alpha=\beta$). Рассмотрим сдвиговую осесимметричную задачу для круговой трещины: $\sigma_\alpha = \sigma(r)$, $0 \leq r \leq a$, $u_\alpha = 0$, $r \geq a$. Краевая задача для функции $f(r, x_3)$ (в этом случае $f(r, x_3) = h(r, x_3)$ или $f(r, x_3) = g(r, x_3)$) имеет вид: $f(r, 0) = 0$, $r \geq a$; $\partial f / \partial x_3 = \sigma / 2\mu c$, $0 \leq r \leq a$ ($c=1$ для (3.1) и $c=1-\nu$ для (3.2)). Для этого случая удобно воспользоваться уравнением (3.16), с учетом (2.1), (2.2), при $x \leq a$:

$$\int_x^a \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\alpha}{r} \right) dr = - \frac{x^{-3}(1-\nu)}{2\mu c} \int_0^x \frac{\sigma(r)r^2 dr}{(x^2-r^2)^{1/2}} \quad (x \leq a)$$

Домножая это уравнение на $(x^2-y^2)^{-1/2} x dx$ и интегрируя от y до a , получим

$$u_\alpha(y) = - \frac{2(1-\nu)}{\pi \mu c} y \int_y^a \int_0^x \frac{\sigma r^2 dr dx}{(x^2-r^2)^{1/2} x^2 (x^2-y^2)^{1/2}} \quad (0 \leq y \leq a) \quad (5.25)$$

Решение (5.25) совпадает с аналогичным, полученным в [3]. Найдем распределение напряжений $\sigma_\alpha(r)$ в этой задаче. Для этого воспользуемся уравнением (5.16) при $x \geq a$:

$$\int_0^a \frac{\sigma r^2 dr}{(x^2-r^2)^{1/2}} = - \int_a^x \frac{\sigma_\alpha r^2 dr}{(x^2-r^2)^{1/2}} \quad (x \geq a)$$

Домножим это уравнение на $(y^2-x^2)^{-1/2} x dx$ и проинтегрируем от a до x , а затем продифференцируем по y , в результате получим

$$\sigma_\alpha(y) = \frac{2}{\pi y (y^2-a^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\sigma(r)r^2 (a^2-r^2)^{1/2} dr}{r^2-y^2} \quad (y \geq a)$$

Этот результат также совпадает с аналогичным в [3].

Рассмотрим теперь случай внешней круговой трещины $a \leq r < \infty$, $\sigma_\alpha = \sigma(r)$ ($r \geq a$), $u_\alpha = 0$ ($0 \leq r \leq a$). Краевая задача для функции $f(r, x_3)$ будет иметь вид: $\partial f / \partial x_3 = \sigma(r)$ ($r \geq a$), $u_\alpha = 0$ ($0 \leq r \leq a$). В этом случае удобно

воспользоваться уравнением (5.19). Так, при $x \geq a$ имеем

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial r} (u_\alpha r) (x^2 - r^2)^{-1/2} dr = \frac{x(1-\nu)}{\mu c} \int_x^\infty \frac{\sigma(r) dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}}$$

Домножим это уравнение на $(y^2 - x^2)^{-1/2} x dx$ и проинтегрируем от a до y , получим

$$u_\alpha(y, 0) = \frac{2(1-\nu)}{\pi \mu c} \int_a^y \int_x^\infty \frac{\sigma(r) dr x^2 dx}{(r^2 - x^2)^{1/2} (y^2 - x^2)^{1/2}}$$

Найдем теперь распределение напряжений $\sigma_\alpha(r, 0)$ ($0 \leq r \leq a$). Для этого рассмотрим уравнение (5.19) при $x \leq a$:

$$\int_x^a \frac{\sigma_\alpha(r) dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} = \int_a^\infty \frac{\sigma(r) dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

Домножим это уравнение на $(x^2 - y^2)^{-1/2} x dx$ и, интегрируя от y до a , с учетом (5.4), а затем дифференцируя по y , получим:

$$\sigma_\alpha = -\frac{\pi y}{2(a^2 - y^2)^{1/2}} \int_a^\infty \frac{\sigma(r) (r^2 - a^2)^{1/2} dr}{r^2 - y^2}$$

Рассмотрим еще один пример известной задачи Рейсснера — Сагоци [5] (вращение кругового штампа, скрепленного с полупространством на угол β). В этом случае $u_\beta = \beta r$ ($0 \leq r \leq a$), $\sigma_\beta = 0$ ($r \geq a$). Краевая задача имеет вид: $g = \beta r / 2(1-\nu)$ ($0 \leq r \leq a$), $\partial g / \partial x_3 = 0$ ($r \geq a$).

Найдем распределение напряжений под штампом. В этом случае воспользуемся уравнением (5.19) при $x \leq a$:

$$2\beta = \mu^{-1} \int_x^a \sigma_\beta (r^2 - x^2)^{-1/2} dr$$

Домножим его на $(x^2 - y^2)^{-1/2} x dx$ и интегрируя от y до a , а затем дифференцируя по y , получим известное выражение для распределения напряжений под основанием штампа [5]: $\sigma_\beta = 4\mu\beta y (a^2 - y^2)^{-1/2} / \pi$ ($0 \leq y \leq a$). Найдем теперь распределение смещений вне штампа $r \geq a$. Для этого воспользуемся уравнением (3.19) при $x \geq a$:

$$2\beta [(x^2 - a^2)^{1/2} - x] = \int_a^x \frac{\partial}{\partial r} (u_\beta r) (x^2 - r^2)^{-1/2} dr$$

Домножим это уравнение на $(y^2 - x^2)^{-1/2} x dx$ и, интегрируя от a до y , получим

$$u_\beta = \beta \{ y [1 - 2/\pi \operatorname{arctg}((y^2 - a^2)^{1/2}/a)] - 2/\pi (y^2 - a^2)^{1/2} / y \} \quad (y \geq a)$$

Это выражение совпадает с полученным ранее [5].

5.4. *Замечание.* Обратим внимание на одно свойство сдвиговых осесимметричных задач. В этих задачах имеется особая точка. В этой точке не определено ни направление смещения, ни напряжения. Известно [3, 8], что смещение вблизи этой точки имеет асимптотику $u \sim r \ln r$, что приводит к особенностям в углу поворота $\omega \sim \ln r$.

При рассмотрении сдвиговых задач без трения это не приводит, вообще говоря, ни к каким качественным эффектам. В случае же наличия сил трения это не так. Действительно, рассмотрим задачу о нагружении дисковой трещины радиуса a сдвиговой осесимметричной нагрузкой $\sigma_\alpha = \tau(r)$ и давлением $\sigma = \text{const}$. Рассмотрим классическую траекторию нагружения: сжатие до величины σ , а затем сдвиг $\sigma_\alpha = \tau(r)$. Краевая задача имеет вид

(3.4) с $u_\alpha=0$. Возьмем для примера $\tau(r)=Ar$, $A>0$. Подставляя в (5.16) выражение для функции f из (3.4), получим:

$$y^3 \int_v^a \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\alpha}{r} \right) (r^2 - y^2)^{-1/2} dr = \frac{1-\nu}{\mu c} \int_0^y \frac{r^2 (\tau - \rho \sigma) dr}{(y^2 - r^2)^{3/2}} \quad (5.26)$$

Предположим, что область скольжения занимает всю трещину (это вполне возможно при возрастании A). Домножая (5.26) на $y dy (y^2 - x^2)^{1/2}$ и интегрируя от x до a , получим

$$u_\alpha(x) = x(1-\nu) \left[\frac{1}{3} \pi A (a^2 - x^2)^{-1/2} - \rho \sigma / 2 \ln((a + (a^2 - x^2)^{1/2}) / x) \right] / \mu c \quad (0 \leq x \leq a) \quad (5.27)$$

Из (5.27) видно, что асимптотика при $x \rightarrow 0$ $u_\alpha(x) \simeq -\rho \sigma x \ln(a/x) (1-\nu) / \mu c$. Это означает, что смещение направлено в сторону действия силы трения при любом A и $\rho \sigma$, то есть решение построено не верно. Отсюда следует, что область скольжения не может занимать всю трещину, то есть к точке $r=0$ всегда примыкает область сцепления. Это имеет место даже если A увеличивается, область сцепления все равно не исчезает. Наличие области сцепления ликвидирует особенность при $r=0$.

Наличие особенности в осесимметричных сдвиговых задачах с трением указывалось в [8]. Однако там не учитывалось, что это приводит к наличию области сцепления вблизи точки $r=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Жигников Ю. В. Численно-аналитический метод решения пространственных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. Ч. I. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4.
2. Гольдштейн Р. В., Жигников Ю. В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141-148.
3. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
4. Гольдштейн Р. В., Жигников Ю. В. Равновесие полостей и трещин - разрывов с областями налегания и раскрытия в упругой среде. // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 826-834.
5. Снеддон И. Н. Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 403 с.
7. Салганик Р. Л. Об осесимметричных трещинах продольного сдвига. // ЖПМТФ. 1962. № 3. С. 77-80.
8. Ростовцев Н. А. К задаче кручения упругого полупространства. // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 55-60.
9. Дурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1968. 492 с.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
11. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: 1959. 472 с.
12. Канторович В. Л., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1950. 696 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.1987