

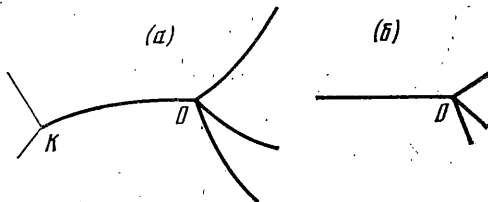
УДК 539.374

О ВЕТВЛЕНИИ ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

КИПНИС Л. А., ЧЕРЕПАНОВ Г. П.

Исследуется вопрос о существовании угловых точек и точек ветвления на контуре пластической линии скольжения в однородном изотропном теле (плоская деформация). С этой целью рассматривается задача теории упругости о полубесконечной прямолинейной линии скольжения с прямолинейным отростком в вершине, также являющимся линией скольжения. Приводится точное решение функционального уравнения Винера-Хопфа задачи и определяется зависимость длины отростка от угла его наклона к продолжению линии скольжения. Для определения указанного угла применяется принцип выбора, согласно которому среди всех возможных направлений развития отростка реализуется то, которое соответствует наибольшему значению скорости диссипации его энергии. В зависимости от параметров нагружения устанавливаются число исходящих из вершины отростков и направления их развития.

1. Рассмотрим однородное изотропное идеально упругопластическое тело в условиях плоской деформации. Развивающуюся в нем с ростом внешних нагрузок пластическую зону вблизи некоторого концентратора K будем моделировать линией скольжения. Предположим, что точка O — есть впервые появившаяся на контуре линии скольжения угловая точка или точка ветвления. Таким образом, из точки O исходит одна или несколько гладких в ее окрестности линий скольжения, углы между каждой из которых и гладкой линией KO в этой точке различны (фиг. 1). Требуется определить число указанных вторичных линий скольжения и направления их развития в точке O (упомянутые выше углы).



Фиг. 1

Изучим начальное развитие линий скольжения в окрестности точки O . Пусть из нее исходит один или несколько отростков, длины которых малы по сравнению с длиной линии KO и размерами тела. Исходная задача эквивалентна задаче теории упругости класса N [1] о полубесконечной прямолинейной линии скольжения с прямолинейными отростками в вершине, также являющимися линиями скольжения (фиг. 1б). Число отростков и углы их наклона к продолжению полубесконечной линии скольжения подлежат определению.

Рассмотрим задачу об одном отростке длиной l , исходящем из точки O под углом α к линии скольжения. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_\theta(r, -\pi), \quad \tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_{r\theta}(r, -\pi), \quad u_\theta(r, \pi) = u_\theta(r, -\pi) \quad (1.1)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \pi) = \tau_s, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0 \quad (\theta = \alpha), \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (\theta = \alpha)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \alpha) = \tau_s \quad (r < l), \quad \langle u_r \rangle = 0 \quad (\theta = \alpha, r > l) \quad (1.2)$$

где σ_θ , $\tau_{r\theta}$, σ_r — напряжения, u_θ , u_r — смещения, $\langle a \rangle$ — скачок величины a , τ_s — предел текучести на сдвиг.

На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение задачи о полубесконечной прямолинейной линии скольжения

без отрезка. Оно определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= -\tau_s \sin 2\theta + C_1 \cos 2\theta + C_2 - K_{II} R(r) (3 \sin^2 \theta + 3 \sin^3 \theta) \\ \tau_{r\theta} &= \tau_s \cos 2\theta + C_1 \sin 2\theta + K_{II} R(r) (\cos^2 \theta + 3 \cos^3 \theta) \\ \sigma_r &= \tau_s \sin 2\theta - C_1 \cos 2\theta + C_2 - K_{II} R(r) (5 \sin^4 \theta - 3 \sin^3 \theta) \\ R(r) &= \frac{1}{4} (2\pi r)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь K_{II} (коэффициент интенсивности напряжений), C_1 , C_2 — заданные параметры нагружения, характеризующие интенсивность внешнего поля и определяющиеся из решения внешней задачи.

Кроме того, должно выполняться условие нагружения: диссипация энергии отрезка — положительная возрастающая функция времени (диссипация и скорость диссипации энергии отрезка положительны).

Решение задачи (1.1), (1.2) с указанным условием на бесконечности представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо четвертого условия (1.1) и первого условия (1.2) имеет соответственно

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, \pi) &= 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \alpha) = \tau_s - \tau_s \cos 2\alpha - C_1 \sin 2\alpha - \\ &\quad - K_{II} R(r) (\cos^2 \alpha + 3 \cos^3 \alpha) \quad (r < l) \end{aligned}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $O(1/r)$. Вторая задача — задача о полубесконечной прямолинейной линии скольжения без отрезка. Поскольку решение второй задачи дается формулами (1.3), остается построить решение первой.

Интегральным преобразованием Меллина [2, 3] первая задача сводится к функциональному уравнению Винера-Хопфа

$$\begin{aligned} \tau_1 / (p+1) + \tau_2 / (p+1/2) + \Phi^+(p) &= \text{ctg } p\pi G(p) \Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \text{Re } p < \varepsilon_2) \quad (1.4) \\ G(p) &= 1 - [(\cos p\alpha \cos \alpha - p \sin p\alpha \sin \alpha) / \cos p\pi]^2 \end{aligned}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, \alpha) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho l}^1 \rho^p d\rho$$

$$\tau_1 = 2\tau_s \sin^2 \alpha - C_1 \sin 2\alpha, \quad \tau_2 = -\frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi l}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3\alpha}{2} \right)$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ε_1 , ε_2 — достаточно малые положительные числа.

Решение уравнения (1.4) имеет вид ($\Gamma(z)$ — гамма-функция):

$$\Phi^+(p) = -K^+(p) G^+(p) \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_j}{p+1/j} \left[\frac{1}{K^+(p) G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1/j) G^+(-1/j)} \right] \quad (\text{Re } p < 0) \quad (1.5)$$

$$\Phi^-(p) = \frac{p G^-(p)}{K^-(p)} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_j}{(p+1/j) K^+(-1/j) G^+(-1/j)} \quad (\text{Re } p > 0)$$

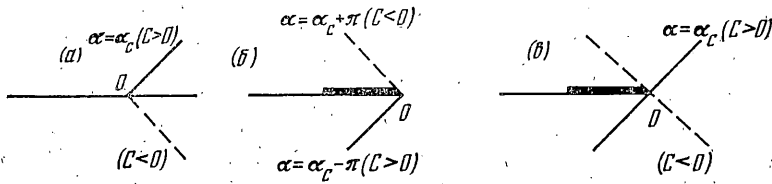
$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \text{Re } p < 0 \\ G^-(p), & \text{Re } p > 0 \end{cases}$$

$$K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p) / \Gamma(1/2 \mp p)$$

Решения подобных уравнений построены, например, в [3, 4].

2. Коэффициент k_{II} интенсивности напряжений в вершине линии скольжения выражается формулой

$$\begin{aligned} k_{II} &= (2\pi \gamma_2(\alpha))^{-1} (\cos \alpha/2 + 3 \cos 3\alpha/2) K_{II} + \\ &\quad + \sqrt{2\pi} (\gamma_1(\alpha))^{-1} \sin \alpha (C_1 \cos \alpha - \tau_s \sin \alpha) \sqrt{l} \\ \gamma_j(\alpha) &= G^+(-1/j) \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Значения функций $\gamma_i(\alpha)$ при некоторых значениях приводятся ниже

α°	10	30	50	70	90	110	130	150	170
γ_1	0,826	0,894	0,944	0,976	0,992	0,987	0,954	0,867	0,624
γ_2	0,704	0,819	0,907	0,965	0,992	0,982	0,922	0,786	0,492

Предположим, что концентрация напряжений в голове линии скольжения отсутствует. Из (2.1) находим ($C=C_1/\tau_s$):

$$\sqrt{l} = \frac{\cos \alpha/2 + 3 \cos 3\alpha/2}{2\pi\sqrt{2\pi}(\sin \alpha - C \cos \alpha) \sin \alpha} \frac{\gamma_1(\alpha)}{\gamma_2(\alpha)} \frac{K_{II}}{\tau_s} \quad (2.2)$$

Определим диссипацию энергии отрезка $D = \tau_s \int_0^l \langle u_r \rangle |_{\theta=\alpha} dr$. Согласно (1.5), (2.2)):

$$D = d K_{II}^4 / 4$$

$$d = \frac{(\cos \alpha/2 + 3 \cos 3\alpha/2)^4}{48\pi^5 (\sin \alpha - C \cos \alpha)^3 \sin^3 \alpha} \frac{\gamma_1^2(\alpha)}{\gamma_2^4(\alpha)} \frac{1 - \nu^2}{E \tau_s^2} \quad (2.3)$$

Из условия положительности D и правой части (2.2) следует, что ($\alpha_0 = \arctg 2\sqrt{2}$, $\alpha_c = \arctg C$):

$$\begin{aligned} \alpha &\in (-\alpha_0; 0) \cup (\alpha_c; \alpha_0) & (K_{II} > 0, 0 \leq C < 2\sqrt{2}) \\ \alpha &\in (-\alpha_0; 0) & (K_{II} > 0, C \geq 2\sqrt{2}) \\ \alpha &\in (-\alpha_0; \alpha_c) \cup (0; \alpha_0) & (K_{II} > 0, -2\sqrt{2} < C \leq 0) \\ \alpha &\in (0; \alpha_0) & (K_{II} > 0, C \leq -2\sqrt{2}) \\ \alpha &\in (\alpha_c - \pi; -\alpha_0) \cup (\alpha_0; \pi) & (K_{II} < 0, 0 \leq C < 2\sqrt{2}) \\ \alpha &\in (\alpha_c - \pi; -\alpha_0) \cup (\alpha_c; \pi) & (K_{II} < 0, C > 2\sqrt{2}) \\ \alpha &\in (-\pi; -\alpha_0) \cup (\alpha_0; \alpha_c + \pi) & (K_{II} < 0, -2\sqrt{2} \leq C \leq 0) \\ \alpha &\in (-\pi; \alpha_c) \cup (\alpha_0; \alpha_c + \pi) & (K_{II} < 0, C < -2\sqrt{2}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для определения угла α воспользуемся принципом выбора [5]. Согласно этому принципу, среди всех возможных направлений развития отрезка реализуется то, которое соответствует наибольшему значению скорости диссипации его энергии.

Параметр C будем считать независимым от времени. В противном случае, как следует из (2.3), зависящим от времени окажется определяемый с помощью принципа выбора угол α , что противоречит прямолинейности отрезка.

Условие положительности скорости D диссипации энергии отрезка, равной $dK_{II}^3 K_{II}'$ (точка над буквой означает дифференцирование по времени), эквивалентно неравенству $K_{II} K_{II}' > 0$ (K_{II} — положительная возрастающая или отрицательная убывающая функция времени). Указанное неравенство предполагается выполненным.

При стремлении α к 0, α_c , $\alpha_c \pm \pi$, $\pm \pi$ с соответствующих сторон D стремится к бесконечности. На основании принципа выбора это обстоятельство позволяет в каждом из случаев (2.4) сделать следующие выводы.

Пусть $K_{II} > 0$. Если $|C| < 2\sqrt{2}$, то точка O представляет собой точку ветвления. Из нее исходят два отростка, один из которых расположен на продолжении полубесконечной линии скольжения, а другой — под углом α_c к нему (фиг. 2, а). Если $|C| \geq 2\sqrt{2}$, то линия скольжения является гладкой.

Пусть $K_{II} < 0$. В этом случае точка O оказывается точкой ветвления при любых C . Если $|C| \leq 2\sqrt{2}$, то в вершине существуют два отростка, один из которых образует с продолжением линии скольжения угол $\alpha_c \mp \pi$ (знак перед π противоположен знаку C), а другой расположен вдоль нее (фиг. 2б). Если $|C| > 2\sqrt{2}$, то из точки O исходят три отростка. Первый наклонен под углом α_c к продолжению линии скольжения, второй расположен на продолжении первого, а третий — вдоль нее (фиг. 2).

Факт стремления D^* к бесконечности при стремлении α к указанным выше значениям означает, что длины отростков соизмеримы с длиной магистральной линии скольжения и не могут быть найдены из решения задачи в данной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
3. Кипнис Л. А., Черепанов Г. П. К теории механизма Билди — Коттрелла зарождения трещин в металлах // Изв. АН СССР. МТТ, 1983. № 3. С. 109—114.
4. Кипнис Л. А. Однородная задача для клина с симметричной трещиной в вершине // ПММ, 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 396—400.
5. Черепанов Г. П. О проблеме неединственности в теории пластичности // Докл. АН СССР, 1974. Т. 218. № 4. С. 779—782.

Умань, Москва

Поступила в редакцию
2.I.1985