МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОЙ СРЕДЕ

ИЦКОВИЧ М. А., ЛОКШИН А. А.

Получено обобщение асимптотических формул Ландау [1] на случай одномерных волн в нелинейных средах с памятью. Иные подходы к проблеме рассматривались в [2–5].

Рассмотрим распространение волны напряжения в нелинейном наследственно упругом стержне плотности ρ с определяющим уравнением

$$\varepsilon=[1-\gamma R^*]^{-1}(A\sigma+\gamma B\sigma^2) \tag{1}$$

$$R^*u=\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)\,d\tau,\quad \int_0^\infty R(t)\,dt<\infty \tag{2}$$

где σ — напряжение, ε — деформация, γ — малый параметр $(0<\gamma\leqslant1)$, $R(t)\geqslant0$ — функция памяти.

Используя теорему о факторизации нелинейного волнового оператора с памятью [6], можно показать, что волна, распространяющаяся вправо в таком стержне, будет описываться уравнением

$$\sqrt{A\rho}\left(1+\frac{1}{2}\gamma R^*\right)\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\gamma\sqrt{A\rho}\frac{B}{A}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{3}$$

Введем обозначения $x^\circ=x\sqrt{A\rho}$, $k=-B/A$. Тогда уравнение (3) примет вид (верхний индекс у x° будем опускать):

$$(1-k\gamma\sigma)\partial\sigma/\partial t+{}^1/_2\gamma R^*\partial\sigma/\partial t+\partial\sigma/\partial x=0 \tag{4}$$

Для уравнения (4) поставим следующую задачу ($\sigma_0(t)=0$ при $t<0$):

$$\sigma=0\quad(x>0,\ t\leqslant0),\quad \sigma(t,0)=\sigma_0(t) \tag{5}$$

Если $k=0$ (т. е. волна линейная), уравнение (4) принимает вид $(1+{}^1/_2\gamma R^*)\partial\sigma/\partial t+\partial\sigma/\partial x=0$. Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа $L_{t\to r}$, при $x>0$ получим $(1+{}^1/_2\gamma R^L(p))p\sigma^L(p,x)+d\sigma^L(p,x)/dx=0$, откуда имеем

$$\sigma^L(p,x)=C(p)\exp[-p(1+{}^1/_2\gamma R^L(p))x]\quad(x\geqslant0)$$

Из (5) ясно, что $C(p)=\sigma^L(p,0)=\sigma_0{}^L(p)$. Итак, окончательно можно записать

$$\sigma(t,x)=L_{p\to t}\sigma_0{}^L(p)\exp[-px-{}^1/_2\gamma pR^L(p)x]\quad(x\geqslant0)$$

где $L^{-1}_{p\to t}$ — обратное преобразование Лапласа. Из свойств преобразования Лапласа следует, что предыдущее равенство может быть переписано также в виде

$$\sigma(t,x)=L^{-1}_{p\to t-x}\sigma_0{}^L(p)\exp[-{}^1/_2p\gamma R^L(p)x]\quad(x\geqslant0) \tag{6}$$

Пусть теперь $k \neq 0$. Будем вначале считать, что сильные разрывы отсутствуют, и по аналогии с подходом Ландау [1] введем функцию

$$\sigma(t, x) = L_{p\to\tau}^{-1} \sigma_0{}^L(p) \exp[-{}^1/_2 \gamma p R^L(p) x] \qquad (x \geqslant 0) \tag{7}$$

где фаза $\tau = \tau(t, x)$ определяется из условия своего постоянства на характеристиках:

$$dt/dx = 1 - k\gamma\sigma \quad (\tau = \text{const}) \tag{8}$$

$$\tau|_{x=0} = t \tag{9}$$

Правая часть (7) представляет собой некоторую известную функцию от τ и x; обозначим ее $G(\tau, x)$. Подставляя эту функцию вместо σ в уравнение (8), получим $dt/dx = 1 - k\gamma G(\tau, x)$, откуда, учитывая (9), имеем

$$t = \int_0^x (1 - k\gamma G(\tau, y))\, dy + \tau.$$

Подставляя в последнее равенство $G(\tau, y)$ и интегрируя по y, получаем выражение, которое определяет τ как функцию от t, z:

$$\tau = t - x + 2kL_{p\to\tau}^{-1} \sigma_0{}^L(p) [1 - \exp(-{}^1/_2 \gamma p R^L(p) x)]$$

Построенное приближение (7)—(9) в линейном случае переходит в (6).

Исследуем, насколько приемлемо приближение (7)—(9) в нелинейной ситуации. Если $R(t) \equiv 0$, то формулы (7)—(9) дают

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(\tau), \quad t = (1 - k\gamma\sigma_0(\tau)) x + \tau$$

Непосредственная проверка показывает, что полученные выражения дают точное решение уравнения $(1 - k\gamma\sigma) \partial\sigma/\partial t + \partial\sigma/\partial x = 0$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $R(t) = R(0) = \text{const}$. В этом случае $R^L(p) = R(0)/p$ и из (7) следует

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(\tau) \exp(-{}^1/_2 \gamma R(0) x) \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), с учетом (9) имеем

$$t = x - 2k\sigma_0 [1 - \exp(-{}^1/_2 \gamma R(0) x)] / R(0) + \tau \tag{11}$$

Покажем, что на самом деле выражения (10), (11) снова оказываются точным решением соответствующего одноволнового уравнения. Действительно, уравнение (4) в случае $R(t) = \text{const}$ интегрированием по частям приводится к уравнению

$$(1 - k\gamma\sigma) \partial\sigma/\partial t + {}^1/_2 \gamma R(0) \sigma + \partial\sigma/\partial x = 0$$

решение которого определяется уравнениями характеристик $dt/dx = 1 - k\gamma\sigma$, $d\sigma/dx = -{}^1/_2 \gamma R(0) \sigma$.

Интегрируя эти уравнения с учетом (5), приходим в точности к соотношениям (10) и (11).

Заметим, что соотношения (7)—(9) не дают точного решения задачи (4), (5). Проверка показывает, что (7)—(9) — всего лишь хорошее приближение, имеющее точность $O(\gamma^2 R'(t))$. Полученное асимптотическое решение пригодно до тех пор, пока не возникнет опрокидывания. Условие опрокидывания может быть получено с помощью стандартных методов [7], однако ввиду громоздкости здесь не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 9. С. 496—500.
2. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 883—898.
3. *Jeffrey A., Engelbrecht J.* Waves in nonlinear relaxing media // Wave Propagation in Viscoelastic Media. Research Notes in Mathematics No. 52. Boston etc.: Pitman. 1982. P. 95—123.
4. *Nigul U.* Asymptotic analyses of the pulse shape evolution and of the inverse problem... // Proc. IUTAM Symp. Nonlinear Deformation Waves. B. etc.: Springer. 1983. P. 225—272.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука. 1975. 287 с.
6. *Локшин А. А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 105—108.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1987