МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

О СКАЛЯРИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УПРУГИХ ПОЛЕЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

СИЗОВ В. П.

Представление тензорных полей перемещений, деформаций и напряжений через скалярные функции, позволяющее свести задачи нахождения этих полей к скалярным, обобщается на случай трансверсально-изотропных сред.

Динамические задачи теории упругости, описываемые векторным волновым уравнением Ламе, могут быть сведены к решению задачи на скалярные потенциалы φ, w, v, через которые в некоторых ортогональных криволинейных системах координат выражаются тензорные упругие поля. Аналогичная скаляризация полей в изотропных средах возможна также в системах координат с допустимыми преобразованиями вида

$$x^{a'}=x^a, \quad x^{\alpha'}=f^\alpha(x^b, x^c) \tag{1}$$

Индексы a, b, c — фиксированы, другие латинские индексы принимают значения a, b, c; греческие — b, c; x^i — координаты в локальном аффинном репере e_a, e_b, e_c; f^α — непрерывно дифференцируемые однозначные функции. Метрический тензор в евклидовом пространстве для криволинейных систем координат (1) имеет вид $g_{aa}=1$, $g_{a\alpha}=0$, $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^\alpha, x^\beta)$.

Поле перемещений в этом случае записывается следующим образом:

$$u_i=\nabla_i\varphi+\frac{1}{\varkappa_{(t)}}(\delta_i{}^a\varkappa^2_{(t)}+\nabla_i\nabla^a)w+\sqrt{g}(\delta_i{}^b\nabla^c-\delta_i{}^c\nabla^b)v \tag{2}$$

где $g=|g_{ij}|$; $\varkappa_{(t)}=\omega/v_{(t)}$ — волновое число поперечных волн; ω, $v_{(t)}$ — частота и скорость распространения поперечных волн; $\delta_i{}^j$ — символ Кронекера. Непосредственной подстановкой можно показать, что тензорное поле перемещений (2) удовлетворяет однородному уравнению движения Ламе, если функции φ, w, v являются решением скалярных уравнений Гельмгольца.

В случае ортогональных криволинейных систем координат соотношение (2) с точностью до постоянной величины совпадает с известными выражениями [1].

Цель настоящей работы — распространение данного метода на задачи для трансверсально-изотропных сред, описываемые уравнениями движения вида [2] (n_i — единичный вектор главной оси симметрии):

$$\rho\partial^2u^i/\partial t^2=\nabla_jc^{ijrs}\nabla_{(r}u_{s)} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}c^{ijrs}=c_1g^{ij}g^{rs}+c_2(g^{ir}g^{js}+g^{is}g^{jr})+c_3[(3n^in^j-g^{ij})g^{rs}+\\+(3n^rn^s-g^{rs})g^{ij}]+c_4[(3n^in^r-g^{ir})g^{js}+(3n^jn^s-g^{js})g^{ir}+\\+(3n^in^s-g^{is})g^{jr}+(3n^jn^r-g^{jr})g^{is}]+\\+c_5(35n^in^jn^rn^s-30n^{(i}n^jg^{rs)}+3g^{(ij}g^{rs)})\end{gathered} \tag{4}$$

$$c_1={}^1/_3(c_{\mathrm{I}}{}^{\{4\}}+2c_{\mathrm{I}}{}^{\{22\}}),\quad c_2={}^1/_3(c_{\mathrm{I}}{}^{\{4\}}-c_{\mathrm{I}}{}^{\{22\}}) \tag{5}$$

$$c_3={}^1/_{12}(c_g{}^{\{4\}}+2c_g{}^{\{22\}}),\quad c_4={}^1/_{12}(c_g{}^{\{4\}}-c_g{}^{\{22\}}),\quad c_5={}^1/_8c_n{}^{\{4\}}$$

$$c_{\mathrm{I}}{}^{\{4\}}={}^1/_{15}(8c_{11}+3c_{33}+4c_{13}+8c_{44}) \tag{6}$$

$$c_{\mathrm{I}}{}^{\{22\}}={}^1/_6(-c_{11}+3c_{12}+4c_{13}-4c_{44}),\quad c_g{}^{\{4\}}={}^2/_{21}(-8c_{11}+6c_{33}+2c_{13}+4c_{44})$$

$$c_g{}^{\{22\}}={}^1/_3(2c_{11}-6c_{12}+4c_{13}-4c_{44}),\quad c_n{}^{\{4\}}={}^8/_{35}(c_{11}+c_{33}-2c_{13}-4c_{44})$$

Константы, входящие в коэффициенты разложения (6), являются элементами матрицы упругих постоянных, записанной по свернутому индексу.

Совместим главную ось симметрии рассматриваемой среды с инвариантным относительно преобразований (1) вектором e_a, тогда $n^i = g^{ia}$ и выражение (4) может быть представлено в виде

$$c^{ijrs} = a_1 g^{ij} g^{rs} + 2a_2 g^{(i|r|} g^{j)s} + a_3 (g^{ia} g^{ja} g^{rs} + g^{ra} g^{sa} g^{ij}) + \\ + a_4 (g^{ia} g^{ra} g^{js} + g^{ja} g^{sa} g^{ir} + g^{ia} g^{sa} g^{jr} + g^{ja} g^{ra} g^{is}) + \\ + a_5 g^{ia} g^{ja} g^{ra} g^{sa} \qquad (7)$$

$$a_1 = c_1 - 2c_3 + c_5, \quad a_2 = c_2 - 2c_4 + c_5, \quad a_3 = 3c_3 - 5c_5$$

$$a_4 = 3c_4 - 5c_5, \quad a_5 = 35c_5$$

Подставляя данное выражение в (3), после преобразований запишем уравнение движения для монохроматических волн следующим образом:

$$-\{[-{}^1/_2(c_{11} - c_{12}) + c_{44}] \nabla_a \nabla_a + \omega^2 \rho\} u_i = c_{11} \nabla_i \nabla^s u_s - {}^1/_2 (c_{11} - c_{12}) \delta^{rsk}_{ijk} \nabla^j \nabla_r u_s + \\ + [-{}^1/_2 (c_{11} + c_{12}) + c_{13} + c_{44}] \nabla_i \nabla_a u_a + \delta_i{}^a \{[-{}^1/_2 (c_{11} + c_{12}) + c_{13} + c_{44}] \nabla_a \nabla^s u_s + \\ + [-{}^1/_2 (c_{11} - c_{12}) + c_{44}] \nabla^s \nabla_s u_a + [c_{11} + c_{33} - 2(c_{13} + 2c_{44})] \nabla_a \nabla_a u_a\} \qquad (8)$$

Придавая i значения a и β, выражение (8) представим в виде следующих двух:

$$(c_{13} + c_{44}) \nabla_a \nabla^s u_s + c_{44} \nabla^s \nabla_s u_a + \\ + [(-c_{13} + c_{33} - 2c_{44}) \nabla_a \nabla_a + \omega^2 \rho] u_a = 0 \qquad (9)$$

$$(-c_{44} \nabla_a \nabla_a - \omega^2 \rho) u_\beta = c_{11} \nabla_\beta \nabla^\alpha u_\alpha - {}^1/_2 (c_{11} - c_{12} \delta^{a\lambda\gamma}_{a\alpha\beta} \nabla^\alpha \nabla_\lambda u_\gamma + (c_{13} + c_{44}) \nabla_\beta \nabla_a u_a \qquad (10)$$

При выводе соотношений (9) и (10) использовались тождества

$$\delta^{rsk}_{ajk} \nabla^j \nabla_r u_s = \nabla_a \nabla^s u_s - \nabla^s \nabla_s u_a$$

$$\nabla_\beta \nabla^s u_s = \nabla_\beta \nabla^\alpha u_\alpha + \nabla_a \nabla_\beta u_a$$

$$\delta^{rsk}_{\beta jk} \nabla^j \nabla_r u_s = \nabla_a \nabla_\beta u_a + \nabla_a \nabla^a u_\beta + \delta^{a\lambda\gamma}_{a\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla_\lambda u_\gamma$$

Для допустимых преобразований (1) зависимость волнового движения от координаты x^a может быть представлена в виде функций $\exp(i\zeta x^a)$, где ζ — модуль проекции волнового вектора на направление e_a. Поэтому имеем

$$\nabla_a = \nabla^a = \partial/\partial x^a = i\zeta \qquad (11)$$

Запишем вектор u_β в виде двух слагаемых $\overset{(t)}{u_\beta}$ и $\overset{(k)}{u_\beta}$, где $\overset{(t)}{u_\beta}$ соответствует чисто поперечным волнам, существующим независимо от других типов волн. Этот вектор лежит в плоскости симметрии [3], т. е. $\overset{(t)}{u_a} = 0$. Учитывая выражение (11), из (10) получим

$$u_\beta = \overset{(t)}{u_\beta} + \overset{(k)}{u_\beta} \qquad (12)$$

$$\overset{(t)}{u_\beta} = {}^1/_2 (c_{11} - c_{12}) (\omega^2 \rho - \overset{2}{\zeta}_{(t)} c_{44})^{-1} \delta^{a\lambda\gamma}_{a\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla_\lambda u_\gamma \qquad (13)$$

$$\overset{(k)}{u_\beta} = c_{11} (\zeta_{(k)} c_{44} - \omega^2 \rho)^{-1} \nabla_\beta \nabla^\alpha u_\alpha + (c_{13} + c_{44}) (\zeta_{(k)} c_{44} - \omega^2 \rho)^{-1} \nabla_a \nabla_\beta \overset{(k)}{u_a} \qquad (14)$$

где $k = l, \tau$; индекс l относится к квазипродольным волнам, τ — к квазипоперечным.

Из соотношения (13) следует условие двумерной соленоидальности для поперечного вектора перемещений $\nabla^\beta \overset{(t)}{u_\beta} = 0$, а из (14) следует условие двумерной потенциальности для вектор $\overset{(k)}{u_\beta}$: $\delta^{a\lambda\gamma}_{a\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla_\lambda \overset{(k)}{u_\gamma} = 0$. В связи с этим в правой части уравнений (13) и (14) должны быть оставлены только соответствующие слагаемые $\overset{(t)}{u_\alpha}$ или $\overset{(k)}{u_\alpha}$ поля (12).

Используя формулу $\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_\beta=\nabla_\beta\nabla^\alpha u_\alpha-\delta^{a\ \gamma}_{\alpha\beta\alpha}\nabla^a\nabla_\lambda u_\gamma$, справедливость которой устанавливается непосредственной проверкой, выражение (13) может быть заменено уравнением Гельмгольца

$$(\nabla^\alpha\nabla_\alpha+\varkappa_1{}^2)u_\beta^{(t)}=0 \tag{15}$$

$$\varkappa_1{}^2=2(\omega^2\rho-\zeta_{(t)}^{(2)}c_{44})/(c_{11}-c_{12})=\varkappa_{(t)}^2-\zeta_{(t)}^2=\varkappa_{(t)}^2\sin^2\theta \tag{16}$$

где $\varkappa_{(t)}=\omega/v_{(t)}$ — модуль волнового вектора поперечных волн, θ — угол между волновым вектором и вектором e_a.

Произведем скаляризацию полей u_i. Для этого по аналогии с изотропным случаем (2), через скалярный потенциал v определим поперечное поле $u_\beta^{(t)}=\sqrt{g}(\delta_\beta{}^b\nabla^c-\delta_\beta{}^c\nabla^b)v$.

Функция v удовлетворяет уравнению с оператором (15). Собственные значения $\varkappa_1$ соответствуют фазовым скоростям $v_{(t)}$, определяемым из уравнения

$$v_{(t)}\rho={}^1/_2(c_{11}-c_{12})\sin^2\theta+c_{44}\cos^2\theta \tag{17}$$

которое следует из (16) и совпадает с известной формулой для одноосных кристаллов [3].

Уравнения для квазипродольных и квазипоперечных волн записываются из (9) и (10) следующим образом:

$$\nabla^s\nabla_s u_a^{(k)}+b_1^{(k)}u_a^{(k)}+b_2\nabla_a\nabla^s u_s^{(k)}=0 \tag{18}$$

$$\nabla_\beta\nabla^\alpha u_\alpha^{(k)}+b_3^{(k)}u_\beta^{(k)}+b_4\nabla_a\nabla_\beta u_a^{(k)}=0 \tag{19}$$

$$b_1^{(k)}=c_{44}{}^{-1}[\omega^2\rho-\zeta_{(k)}^2(-c_{13}+c_{33}-2c_{44})] \tag{20}$$

$$b_2=c_{44}{}^{-1}(c_{13}+c_{44});\qquad b_3^{(k)}=c_{11}{}^{-1}(\omega^2\rho-\zeta_{(k)}c_{44})$$

$$b_4=c_{11}{}^{-1}(c_{13}+c_{44})$$

По аналогии с (2) представим перемещения в виде

$$u_i^{(k)}=\nabla_i\varphi+\varkappa_{(k)}^{-1}(\delta_i{}^a\varkappa_{(k)}^2+\nabla_a\nabla_i)w \tag{21}$$

Здесь φ и w описывают соответственно квазипродольные и квазипоперечные волны, они являются решениями трехмерных уравнений Гельмгольца

$$\nabla^s\nabla_s\begin{Bmatrix}\varphi\\ w\end{Bmatrix}+\varkappa_{(k)}^2\begin{Bmatrix}\varphi\\ w\end{Bmatrix}=0 \tag{22}$$

где $\varkappa_{(k)}=\omega/v_{(k)}$; $v_{(l)}$, $u_{(\tau)}$ — скорость квазипродольных и квазипоперечных волн.

Для определения собственных значений $\varkappa_{(k)}$ подставим выражение (21) в (18) и (19) и, учитывая (22), получим

$$a_{11}\varphi+a_{12}w=0,\quad a_{21}\varphi+a_{22}w=0 \tag{23}$$

$$\begin{gathered}a_{11}=i[b_1^{(k)}-\varkappa_{(k)}^2(1+b_2)]\cos\theta\\ a_{12}=(b_1^{(k)}-\varkappa_{(k)}^2)\sin^2\theta\\ a_{21}=b_3^{(k)}-\varkappa_{(k)}^2(\sin^2\theta+b_4\cos^2\theta)\\ a_{22}=i[b_3^{(k)}-\varkappa_{(k)}^2(1-b_4)\sin^2\theta]\cos\theta\end{gathered} \tag{24}$$

Приравнивая определитель системы уравнений (23) нулю, находится уравнение для определения $v_{(k)}$ или $\varkappa_{(k)}$, которое совпадает с соответствующим уравнением для одноосных кристаллов [3].

Из выражения (23) следует сотношение $\varphi/w=-a_{12}/a_{11}=a_{22}/a_{21}$, используя которое запишем формулу (21) в виде

$$u_i^{(l)}=(D_1^{(l)}\nabla_i+D_2^{(l)}\nabla_a\delta_i^{\ a})\varphi,\quad u_i^{(\tau)}=(D_1^{(\tau)}\varkappa_{(\tau)}^{-1}\nabla_a\nabla_i+\varkappa_{(\tau)}\delta_i^{\ a})w \tag{25}$$

$$D_1^{(l)}=\frac{\varkappa_{(l)}^2 b_4}{b_3^{(l)}-(\varkappa_{(l)}^2-\zeta_{(l)}^2)(1-b_4)}=1+\frac{\zeta_{(l)}^2[b_1^{(l)}-\varkappa_{(l)}^2(1+b_2)]}{(\varkappa_{(l)}^2-\zeta_{(l)}^2)(b_1^{(l)}-\varkappa_{(l)}^2)}$$

$$D_1^{(\tau)}=\frac{-b_4\varkappa_{(\tau)}^2}{b_3^{(\tau)}-(\varkappa_{(\tau)}^2-\zeta_{(\tau)}^2)-b_4\zeta_{(\tau)}^2}=1+\frac{(\varkappa_{(\tau)}^2-\zeta_{(\tau)}^2)(b_1^{(\tau)}-\varkappa_{(\tau)}^2)}{\zeta_{(\tau)}^2(b_1^{(\tau)}-\varkappa_{(\tau)}^2(1+b_2))} \tag{26}$$

$$D_1^{(l)}=1-D_2^{(l)}\zeta_{(l)}^2/\varkappa_{(l)}^2$$

Полные поля перемещений, деформаций и напряжений, учитывающие все возможные волны, выражаются через функции φ, w, v, которые являются решениями соответствующих независимых скалярных уравнений Гельмгольца, следующим образом:

$$u_i=(D_1^{(l)}\nabla_i+D_2^{(l)}\nabla_a\delta_i^{\ a})\varphi+(D_1^{(\tau)}\varkappa_{(\tau)}^{-1}\nabla_a\nabla_i+\varkappa_{(\tau)}\delta_i^{\ a})w+g^{1/2}(\delta_i^{\ b}\nabla^c-\delta_i^{\ c}\nabla^b)v \tag{27}$$

$$u_{ij}=(D_1^{(l)}\nabla_i\nabla_j+D_2^{(l)}\nabla_{(i}\delta_{j)}^{a}\nabla_a)\varphi+(D_1^{(\tau)}\varkappa_{(\tau)}^{-1}\nabla_a\nabla_i\nabla_j+\varkappa_{(\tau)}\nabla_{(i}\delta_{j)}^{a})w+$$
$$+g^{1/2}(\nabla_{(i}\delta_{j)}^{b}\nabla^c-\nabla_{(i}\delta_{j)}^{c}\nabla^b)v$$

$$\sigma_{ij}=(d_1^{(l)}g_{ij}+d_2^{(l)}\delta_i^{\ a}\delta_j^{\ a}+d_3^{(l)}\delta_{(i}^{\ a}\nabla_{j)}\nabla_a+d_4^{(l)}\nabla_i\nabla_j)\varphi+ \tag{28}$$
$$+(d_1^{(\tau)}g_{ij}\nabla_a+d_2^{(\tau)}\delta_i^{\ a}\delta_j^{\ a}\nabla_a+d_3^{(\tau)}\delta_{(i}^{\ a}\nabla_{j)}+d_4^{(\tau)}\nabla_i\nabla_j\nabla_a)w+$$
$$+2g^{1/2}[a_2(\nabla_{(i}\delta_{j)}^{\ b}\nabla^c-\nabla_{(i}\delta_{j)}^{\ c}\nabla^b)+a_4(\delta_{(i}^{\ a}\delta_{j)}^{\ b}\nabla^c-\delta_{(i}^{\ a}\delta_{j)}^{\ c}\nabla^b)\nabla_a]v$$

$$d_1^{(l)}=-\varkappa_{(l)}^2a_1+\zeta_{(l)}^2a_3(D_1^{(l)}+D_2^{(l)}) \tag{29}$$

$$d_2^{(l)}=-\varkappa_{(l)}^2a_3-\zeta_{(l)}^2(2a_4D_2^{(l)}+a_5D_2^{(l)}+a_5D_1^{(l)})$$
$$d_3^{(l)}=2a_2D_2^{(l)}+2a_4(2D_1^{(l)}+D_2^{(l)}),\quad d_4^{(l)}=2a_2D_1^{(l)}$$
$$d_1^{(\tau)}=a_1\varkappa_{(\tau)}(1-D_1^{(\tau)})+a_3(\varkappa_{(\tau)}-\zeta_{(\tau)}^2\varkappa_{(\tau)}^{-1}D_1^{(\tau)})$$
$$d_2^{(\tau)}=a_3\varkappa_{(\tau)}(1-D_1^{(\tau)})+2a_4\varkappa_{(\tau)}+a_5(\varkappa_{(\tau)}-\zeta_{(\tau)}^2\varkappa_{(\tau)}^{-1}D_1^{(\tau)})$$
$$d_3^{(\tau)}=2a_2\varkappa_{(\tau)}+2a_4(\varkappa_{(\tau)}-2D_1^{(\tau)}\zeta_{(\tau)}^2/\varkappa_{(\tau)})$$
$$d_4^{(\tau)}=2a_2D_1^{(\tau)}/\varkappa_{(\tau)}$$

Для изотропной среды имеем $c_{11}=c_{33}=\lambda+2\mu$, $c_{13}=c_{12}=\lambda$, $c_{44}=\mu$; $a_1=\lambda$, $a_2=\mu$, $a_3=a_4=a_5=0$, $d_1^{(l)}=-\lambda\omega^2\rho/(\lambda+2\mu)$, $d_2^{(l)}=d_3^{(l)}=0$, $d_4^{(l)}=2\mu$, $d_1^{(\tau)}=d_2^{(\tau)}=0$, $d_3^{(\tau)}=2\mu\varkappa$, $d_4^{(\tau)}=2\mu/\varkappa$; $D_1^{(l)}=D_1^{(\tau)}=1$, $D_2^{(l)}=0$.

В этом случае уравнение (8) переходит в уравнение движения Ламе, а формулы (27), (28) и (29) в соответствующие соотношения для изотропных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
2. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
3. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 21.I.1987