

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГИЕ МОДУЛИ КОГЕРЕНТНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД

ГРИНФЕЛЬД М. А., ЛАНГМАН С. Л.

Гетерогенные слоистые конфигурации, состоящие из периодической последовательности перемежающихся слоев различных физических фаз одного и того же химического вещества, чрезвычайно часто встречаются на практике и поэтому привлекают большое внимание материаловедов и петрологов [1, 2]. В данной работе на основе процедуры осреднения, основанной на вариационном подходе метода двухмасштабных разложений [3, 4], рассчитываются осредненные термоупругие модули слоистого материала, у которого в процессе деформирования возможен когерентный фазовый переход между составляющими [5, 6]. При таком переходе поля перемещений, отсчитываемые от некоторой начальной однофазной конфигурации, предполагаются непрерывными, а поля градиентов перемещений на фазовой границе терпят конечный разрыв — эти условия призваны моделировать гетерогенное равновесие твердых упругих фаз.

Предполагая, что переходу одной фазы в другую соответствует аффинная деформация, а также что обе фазы в своих опорных конфигурациях однородны и изотропны находятся осредненные модули температурного расширения, удельная теплоемкость при фиксированной макродеформации и изотермические модули упругости когерентной слоистой среды при любых концентрациях фаз. Показывается существенное отличие осредненных модулей такого материала от модулей «обычной» слоистой среды, где массообмен невозможен, при этом сами модули когерентной среды определяются через геометрические характеристики соответствующего фазового перехода. Приводятся явные выражения для осредненных модулей в некоторых простейших частных случаях.

1. Процедура расчета осредненных модулей двухфазного слоистого материала. Рассмотрим материал (ячейка периодичности которого показана на фигуре), состоящий из слоев веществ, на границе Γ между которыми возможен когерентный фазовый переход. Осредненная свободная энергия этого материала может быть найдена из решения следующей вариационной задачи [5]:

$$F(r_{ij}, T) = \text{extr}_{g^i, \Delta} \left\{ \int -\frac{1}{2} C_{ij} T^2 + B^{ij} T (r_{ij} + g_{i,j}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} C^{ijkl} (r_{ij} + g_{i,j}) (r_{kl} + g_{k,l}) dV - \int_{\Gamma} \Delta[\eta] \pm T d\Gamma \right\} / |V| \quad (1.1)$$

$$[g^i]_{\Gamma}^{\pm} = \Delta d^i, n^j|_{\Gamma} \quad (1.2)$$

$$[g^i]_{\pm}|_S = 0 \quad (1.3)$$

Символ \int^{\sim} обозначает сумму интегралов по областям, занимаемыми различными фазами, T — приращение абсолютной температуры, а r_{ij} — фиксированная макродеформация материала. Решение задачи (1.1) ищется по «быстрым» перемещениям g^i и смещению фазовой границы Δ , зависящим от быстрых переменных y^i , дифференцирование по которым обозначается индексом после запятой. Знаками «плюс» и «минус» отмечены величины по разные стороны Γ (относящиеся к разным фазам), при этом вектор единичной нормали n^i к границе слоев направлен в фазу плюс. Величина $[a]_{\Gamma}^{\pm} = a|_{\Gamma_+} - a|_{\Gamma_-}$, где $a|_{\Gamma_+}$ и $a|_{\Gamma_-}$ значения a с разных сторон Γ , а под $[a]_{\pm}|_S$ понимается разность значений поля a в соответствующих точках противоположных граней поверхности S элементарной ячейки V , с объемом $|V|$. В соответствии с [7] в предположении, что опорная конфигурация фазы плюс совпадает с начальной и материалы обеих фаз в

своих опорных неискаженных конфигурациях однородны и изотропны, тензоры модулей упругости и температурного расширения имеют вид

$$C_{\pm}^{ijkl} = \rho_{\pm} a_{\pm}^i a_{\pm}^j a_{\pm}^k a_{\pm}^l (\lambda_{\pm} x_{\pm}^{pj} x_{\pm}^{ql} + \mu_{\pm} (x_{\pm}^{pj} x_{\pm}^{ql} + x_{\pm}^{pl} x_{\pm}^{jq})) / \rho_{\pm} \quad (1.4)$$

$$B_{\pm}^{ij} = \rho_{\pm} a_{\pm}^i a_{\pm}^j (-\alpha_{\pm} K_{\pm} x_{\pm}^{pj}) / \rho_{\pm}$$

Здесь λ_{\pm} , μ_{\pm} , K_{\pm} — изотермические модули Ламе и объемного сжатия, α_{\pm} — объемный коэффициент температурного расширения, $C_{u\pm}$ — удельная теплоемкость при фиксированной деформации, ρ_{\pm} — плотность и η — удельная энтропия каждой из фаз. В соотношении (1.4) $x_{\pm}^{ij} = x^{ij}$, где x^{ij} — метрический тензор начальной конфигурации, при этом

$$\begin{aligned} a_{\pm}^{i,j} &= \delta_{\pm}^i, \quad a_{\pm}^{i,j} = \delta_{\pm}^i + d_{\pm}^i, \\ \rho_{\pm} &= \rho_{\pm} \det(a_{\pm}^{i,j})^{-1} \quad (1.5) \\ x_{\pm}^{ij} &= x^{kl} b_{\pm}^i b_{\pm}^j, \quad a_{\pm}^i b_{\pm}^j = \delta_{\pm}^i \end{aligned}$$

Тензор $a_{\pm}^{i,j}$ и соответствующий ему тензор d_{\pm}^i определяют однородную деформацию фазы минус относительно начального состояния. В (1.1) предполагается, что рассматриваемая равновесная конфигурация, около которой находятся модули, является ненапряженной (такая ситуация заведомо реализуется в физически важном случае, когда межфазные границы ориентированы вдоль плоскостей инвариантных собственной деформации). Предполагается также, что $d_{\pm}^i n^j = d^i = \text{const} \neq 0$, т. е. преобразование $a_{\pm}^{i,j}$ таково, что при переходе фазы плюс в фазу минус преобразование слоя не сводится к простому растяжению вдоль него (в этом случае как в [7], приращение температуры T нельзя задавать независимо от макродеформации r_{ij} и собственной деформации d_{\pm}^i , при этом оно может быть вычислено через них). Соотношение (1.3) является условием периодичности перемещений g^i на границе S .

Наряду с фазовым когерентным композитом, рассмотрим случай «обычного» контакта между двумя однородными анизотропными материалами. В этом случае задача осреднения имеет вид

$$\begin{aligned} F(r_{ij}, T) = \text{extr}_g \int - 1/2 C_u T^2 + B^{ij} T (r_{ij} + g_{i,j}) + \\ + 1/2 C^{ijkl} (r_{ij} + g_{i,j}) (r_{kl} + g_{k,l}) dV / |V| \quad (1.6) \end{aligned}$$

где B_{\pm}^{ij} , C_{\pm}^{ijkl} — тензоры модулей теплового расширения и упругости для соответствующих материалов. При решении задачи (1.6) условие (1.3) остается в силе, а условие (1.2) заменяется требованием жесткого контакта

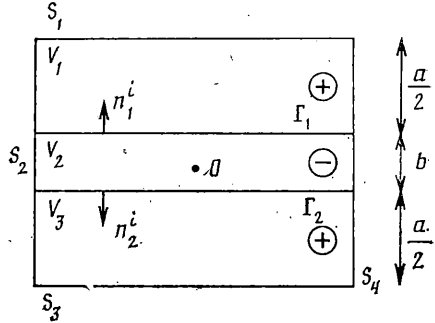
$$[g^i]_{\Gamma} = 0 \quad (1.7)$$

Для когерентного фазового композита варьирование соотношения (1.1) дает

$$\begin{aligned} \delta F = - \int \check{\sigma}_{ij}^{\pm} \delta g^i dV + \int_S (\sigma_{ij} + \check{\sigma}_{ij}) \delta g^i n^j dS - \\ - \int_{\Gamma} \delta g_{-}^i [\sigma_{ij} + \check{\sigma}_{ij}]_{-}^{+} n^j + \delta \Delta ([\eta]_{-}^{+} T + (\sigma_{ij+} + \check{\sigma}_{ij+}) n^j d^i) d\Gamma \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\check{\sigma}_{ij\pm} = C_{ijkl\pm} g^{h,l}, \quad \sigma_{ij\pm} = B_{ij\pm} T + C_{ijkl\pm} r^{h,l} \quad (1.9)$$

При выводе (1.8) учитывалось, что в соответствии с (1.2) $[\delta g^i]_{\Gamma} = \delta \Delta d^i$. Из условия обращения в нуль первой вариации δF получим сле-



дующие уравнения и граничные условия для оптимального поля g^i :

$$\sigma_{ij,\pm}^{\check{j}} = 0 \quad (1.10)$$

$$[\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\check{j}}] \pm n^j|_{\Gamma} = 0 \quad (1.11)$$

$$[\sigma_{ij}^{\check{j}}] \pm n^j|_s = 0 \quad (1.12)$$

$$(\sigma_{ij+} + \sigma_{ij+}^{\check{j}}) n^j d^i|_{\Gamma} + [\eta]_{\pm}^{\pm} T = 0 \quad (1.13)$$

Полученные соотношения дополняются также кинематическими условиями (1.2), (1.3).

В случае обычного слоистого материала из варьирования соотношения (1.6) получим, что оптимальные перемещения g^i задаются соотношениями (1.3), (1.7), (1.10)–(1.12), с учетом обозначений (1.9).

2. Решение задачи на ячейке. Из геометрии задачи (фигура) следует, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $n^i|_{\Gamma_2} = -n^i|_{\Gamma_1} = \text{const}$, $d^i|_{\Gamma_2} = -d^i|_{\Gamma_1}$, поэтому в дальнейшем под n^i и d^i будем подразумевать, соответственно, $n^i|_{\Gamma_1}$ и $d^i|_{\Gamma_1}$. Решение уравнений (1.2), (1.3), (1.10)–(1.13) (с учетом соотношений (1.4), (1.5), (1.9)) будем искать в виде

$$g^h = g^h(y, n^i) = g^h(h), \quad h = y, n^i \quad (2.1)$$

Из соотношений (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} g^{h,l} &= g^{*h} n^l, & g^{h,lj} &= g^{**h} n^l n^j \\ g^{*h} &= dg^h/dh, & g^{**h} &= d^2 g^h/dh^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1), (2.2) в уравнения равновесия (1.10), получим

$$C_{ijkl\pm} g^{h,lj} = C_{ijkl\pm} n^l n^j g^{**h}$$

Таким образом, чтобы перемещения в виде (2.1) удовлетворяли уравнениям равновесия достаточно положить

$$g_{\gamma}^h = \alpha_{\gamma}^h h + \beta_{\gamma}^h \quad (\gamma = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

где α_{γ}^h , β_{γ}^h — независимые от y^i векторы (γ — не тензорный индекс, указывающий область V_{γ} , в которой определено соответствующее перемещение). Отметим, что перемещения в виде (2.3) автоматически удовлетворяют уравнениям (1.2), (1.12) на боковых поверхностях типа S_2 и S_4 . Для поверхностей S_1 и S_3 эти уравнения, с учетом (2.3), дают

$$\alpha_1^h (a+b)/2 + \beta_1^h = -\alpha_3^h (a+b)/2 + \beta_3^h, \quad \alpha_1^h = \alpha_3^h \quad (2.4)$$

Скаляры a и b — толщины соответствующих слоев. Выполнение ограничения (1.2) влечет за собой

$$\begin{aligned} \alpha_1^h b/2 + \beta_1^h &= \alpha_2^h b/2 + \beta_2^h + \Delta_1 d^h|_{\Gamma_1} \\ -\alpha_3^h b/2 + \beta_3^h &= -\alpha_2^h b/2 + \beta_2^h - \Delta_2 d^h|_{\Gamma_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

а из уравнения (1.11) получим

$$\sigma_{ij+} n^j + C_{ijkl+} \alpha_1^k n^l n^j = \sigma_{ij-} n^j + C_{ijkl-} \alpha_2^k n^l n^j \quad (2.6)$$

$$(\sigma_{ij+} + C_{ijkl+} \alpha_1^k n^l) n^j d^i + [\eta]_{\pm} T = 0 \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) следует из (1.13). Из соотношений (2.4)–(2.7), в соответствии с (1.1), (2.3), необходимо определить α_{γ}^h ($\gamma = 1, 2, 3$).

Вычитая из первого уравнения (2.5) второе и учитывая (2.4), получим

$$\alpha_1^h b + \beta_1^h - \beta_3^h = \alpha_2^h b + d^h \Delta, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (2.8)$$

Так как в соответствии с (2.4) $\beta_1^h - \beta_3^h = -\alpha_1^h (a+b)$, то (2.8) приводится к виду

$$\alpha_1^h = -(b\alpha_2^h + \Delta d^h)/a \quad (2.9)$$

Подстановка соотношения (2.9) в (2.6) дает

$$\begin{aligned} \alpha_2^h (C_{ijkl+} b/a + C_{ijkl-}) n^l n^j &= \\ = ([\sigma_{ij}]_{\pm} - C_{ijkl+} n^l d^h \Delta/a) n^j \end{aligned} \quad (2.10)$$

Введем тензор D^{mi} такой, что

$$D^{mi}(c_-C_{ijhl+}+c_+C_{ijhl-})n^jn^l=\delta^m_k \quad (2.11)$$

$$c_- = b/(a+b), \quad c_+ = a/(a+b)$$

где c_+ , c_- — объемные концентрации соответствующих фаз в осредненном материале. Из определения (2.11) тензора D^{mi} сразу следует, что он симметричен. Используя соотношения (2.10), (2.11), получим

$$\alpha_2^m = c_+ D^{mi}([\sigma_{ij}]_-^+ - C_{ijhl+} n^l d^h \Delta/a) n^j \quad (2.12)$$

Подставляя теперь (2.9), (2.12) в (2.7), найдем, что

$$\Delta/a = (\sigma_{ij} - n^j d^i + C_{ijhl} n^l n^j d^i D^{hm} c_+ [\sigma_{mp}]_-^+ n_p + [\eta]_-^+ T) / c_+ A \quad (2.13)$$

$$A = C_{ijhl} n^l n^j d^i D^{hm} c_{mi} p_g + n^i n^g d^p$$

Соотношения (2.4), (2.9), (2.12), (2.13) полностью определяют α_γ^k , $\gamma=1, 2, 3$. Аналогично [8], используя (1.2), (1.10)–(1.13), можно показать, что

$$\int_{\Gamma} g_{i,j} (B^{ij} T + C^{ijkl} (r_{kl} + g_{k,l})) dV - \int_{\Gamma} \Delta [\eta]_-^+ T d\Gamma = 0$$

поэтому выражение для осредненной свободной энергии имеет вид

$$F(r_{ij}, T) = -1/2 T^2 \langle C_u \rangle + T r_{ij} \langle B^{ij} \rangle + 1/2 r_{ij} r_{kl} \langle C^{ijkl} \rangle + 1/2 (c_+ \alpha_1^i n^j \sigma_{ij+} + c_- \alpha_2^i n^j \sigma_{ij-} - [\eta]_-^+ T \Delta / (a+b)), \quad \langle a \rangle = \int_{\Gamma} a dV / |\Gamma| \quad (2.14)$$

Подставляя в (2.14) соотношения (2.9), (2.12), (2.13), получим

$$F = -1/2 T^2 \langle C_u \rangle + T r_{ij} \langle B^{ij} \rangle + 1/2 r_{ij} r_{kl} \langle C^{ijkl} \rangle - 1/2 c_- c_+ [\sigma_{ij}]_-^+ [\sigma_{pg}]_-^+ n^j n^g D^{ip} - 1/2 ([\eta]_-^+ T + n^j n^l n^g d^h D^{ip} (\sigma_{ij+} c_+ C_{pgkl-} + \sigma_{ij-} c_- C_{pgkl+}))^2 / A \quad (2.15)$$

где тензоры $\sigma_{ij\pm}$ определяются из (1.9). Аналогичные вычисления для обычного композита (уравнения (1.3), (1.7), (1.9)–(1.12)) приводят к другому выражению

$$F = -1/2 T^2 \langle C_u \rangle + T r_{ij} \langle B^{ij} \rangle + 1/2 r_{ij} r_{kl} \langle C^{ijkl} \rangle - 1/2 c_- c_+ [\sigma_{ij}]_-^+ [\sigma_{pg}]_-^+ n^j n^g D^{ip} \quad (2.16)$$

Соотношения (2.15), (2.16) позволяют указывать модули соответствующих композитов при любых концентрациях c_- , c_+ ($c_- + c_+ = 1$), как только будет найден тензор D^{mi} .

В частности, для обычного композита, когда оба материала изотропны, т. е. $C_{\pm}^{ijkl} = \lambda_{\pm} x^{ij} x^{kl} + \mu_{\pm} (x^{ik} x^{jl} + x^{il} x^{jk})$, из соотношения (2.11) следует

$$D^{mi} = (x^{mi} - n^m n^i (\lambda + \mu)^{\sim} / (\lambda + 2\mu)^{\sim}) / \mu^{\sim}, \quad a^{\sim} = c_- a_+ + c_+ a_- \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.16), найдем, что полученный материал будет трансверсально изотропен с модулями

$$B^{ij} = -\langle \alpha K \rangle x^{ij} + c_- c_+ [\alpha K]_-^+ ([\lambda]_-^+ x^{ij} + 2[\mu]_-^+ n^i n^j) / (\lambda + 2\mu)^{\sim} \quad (2.18)$$

$$C_u = \langle C_u \rangle + c_- c_+ [\alpha K]_-^+ / (\lambda + 2\mu)^{\sim}$$

$$C^{ijkl} = \langle \lambda \rangle x^{ij} x^{kl} + \langle \mu \rangle (x^{ik} x^{jl} + x^{il} x^{jk}) - c_- c_+ \{ ([\lambda]_-^+)^2 x^{ij} x^{kl} + 2[\mu]_-^+ [\lambda]_-^+ (x^{hl} n^i n^j + x^{ij} n^h n^l) \} / (\lambda + 2\mu)^{\sim} + [\mu]_-^+ (n^j n^l x^{hi} + n^i n^h x^{jl} + n^i n^h x^{lj} - 4(\lambda + \mu)^{\sim} / (\lambda + 2\mu)^{\sim} n^i n^j n^h n^l) / \mu^{\sim}$$

Тензор модулей упругости C^{ijkl} в этом случае полностью согласуется с выражением, указанным в [4].

3. Свойства слоистого двухфазного материала. Осредненные свойства слоистого материала, на границах которого возможен когерентный фазовый переход, существенно отличаются от осредненных свойств обычного слоистого композита. Пусть, например, объемная концентрация одного из составляющих композит материалов стремится к нулю. Положим для определенности $c_- \rightarrow 0$. Тогда для обычного композита осредненные свойства материала, как оно и должно быть, стремятся к соответствующим модулям фазы плюс, а в фазовом случае это будет не так (поскольку исследуются слоистые среды с твердыми компонентами, то предполагается, что $\mu_-, \mu_+ \neq 0$; $\mu_-, \mu_+ \neq \infty$, если эти условия не выполнены, то как видно из (2.18) при $c_- \rightarrow 0$ тензор модулей упругости для обычного композита не будет равен C_+^{ijkl} , что вполне понятно и из физических соображений). Так при $c_- \rightarrow 0$ соотношение (2.11) имеет вид

$$D^{mi} C_{ijkl} n^j n^l = \delta_{ik}^m, \quad A = C_{mipq} n^i n^q d^m d^p$$

и из выражения (2.15) получим

$$F = -1/2 T^2 C_{u+} + Tr_{ij} B_+^{ij} + 1/2 r_{ij} r_{kl} C_+^{ijkl} - 1/2 ([\eta]_-^+ T + B_+^{ij} T d_i n_j + C_+^{ijkl} r_{kl} d_i n_j)^2 / A \quad (3.1)$$

Используя соотношения (1.4) и представляя d^i в виде $d^i = d_1 n^i + d_2 f^i$, где единичный вектор f^i перпендикулярен n^i (т. е. $f^i n_i = 0$), получим для фазового случая материал со следующими осредненными свойствами:

$$\begin{aligned} C_u &= C_{u+} + ([\eta]_-^+ - \alpha_+ K_+ d_1)^2 / H \\ B^{ij} &= -\alpha_+ K_+ x^{ij} - ([\eta]_-^+ - \alpha_+ K_+ d_1) (\lambda_+ d_1 x^{ij} + \\ &\quad + 2\mu_+ d_1 n^i n^j + 2\mu_+ d_2 n^{(i} f^{j)}) / H \\ C^{ijkl} &= C_+^{ijkl} - (\lambda_+ d_1 x^{ij} + 2\mu_+ d_1 n^i n^j + 2\mu_+ d_2 n^{(i} f^{j)}) (\\ &\quad (\lambda_+ d_1 x^{kl} + 2\mu_+ d_1 n^k n^l + 2\mu_+ d_2 n^{(k} f^{l)}) / H \\ H &= (\lambda_+ + 2\mu_+) d_1^2 + \mu_+ d_2^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Скаляры d_1 и d_2 ($d_1^2 + d_2^2 \neq 0$) имеют смысл перемещений соответственно в направлениях n^i и f^i , которые испытывает вектор единичной нормали к границе слоя при переходе из фазы плюс в фазу минус. Отметим, что модули фазы минус в соотношения (3.2) не входят, существенную роль играют только геометрические характеристики фазового перехода. Соотношения (3.2) обобщают результаты работы [7], полностью согласуясь с ними.

Рассмотрим в качестве примера фазового композита случай, когда $a_{ij} = \delta_{ij} + d n^i n_j$. Тогда, из соотношений (1.4), (1.5) получим

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{d}{1+d} n^i n_j, \quad x^{-ij} = x^{ij} - \frac{d(d+2)}{(1+d)^2} n^i n^j \\ B^{-ij} &= -\alpha_- K_- ((1+d) x^{ij} - d n^i n^j) \\ C_-^{ijkl} &= (1+d) \left\{ \lambda_- x^{ij} x^{kl} + \mu_- (x^{ik} x^{jl} + x^{il} x^{jk}) - \frac{d(d+2)}{(1+d)^2} \mu_- x^{ik} n^j n^l - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{1+d} (\lambda_- (x^{ij} n^k n^l + x^{kl} n^i n^j) + \mu_- (x^{il} n^j n^k + x^{jk} n^i n^l)) + \right. \\ &\quad \left. + (1+1/d)^{-2} (\lambda_- + \mu_-) n^i n^j n^k n^l \right\}, \quad d^i = d n^i \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тензор D^{mi} будем искать в виде

$$D^{mi} = A_1 x^{mi} + A_2 n^m n^i \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (2.11) и приводя подобные члены, найдем, что

$$\begin{aligned} A_1 &= (c_- \mu_+ + c_+ \mu_- / (1+d))^{-1} \\ A_2 &= -A_1 \frac{c_- (\lambda_+ + \mu_+) + c_+ (\lambda_- + \mu_-) / (1+d)}{c_- (\lambda_+ + 2\mu_+) + c_+ (\lambda_- + 2\mu_-) / (1+d)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая соотношения (3.3)–(3.5) из (2.15) окончательно получим

$$C_u = \langle C_u \rangle + c_- c_+ [\alpha K]_-^{+2} / p + \frac{(1+d)p([\eta]_-^+ - d\langle \alpha K \rangle / p)^2}{d^2(\lambda_- + 2\mu_-)(\lambda_+ + 2\mu_+)} \quad (3.6)$$

$$B^{ij} = \langle B^{ij} \rangle + c_- c_+ [\alpha K]_-^+ ([\lambda]_-^+ x^{ij} + 2[\mu]_-^+ n^i n^j + \\ + \frac{d}{1+d} (\lambda_- + 2\mu_-) n^i n^j) / p - \frac{[\eta]_-^+ - d\langle \alpha K \rangle / p}{d(\lambda_- + 2\mu_-)(\lambda_+ + 2\mu_+)} ((1+d)\langle \lambda x^{ij} + 2\mu n^i n^j \rangle - \\ - dp_-(\lambda_- + 2\mu_-) n^i n^j)$$

$$C^{ijkl} = \langle C^{ijkl} \rangle - c_- c_+ (A_1 x_{sp} + A_2 n_s n_p) [C^{stkl}]_-^+ [C^{psij}]_-^+ n_i n_j - \\ - \frac{(d+1)n_s n_i n_j \langle C^{stij} \rangle \langle C^{pskl} \rangle}{p(\lambda_- + 2\mu_-)(\lambda_+ + 2\mu_+)}$$

$$p_+ = c_+ (\lambda_- + 2\mu_-) / (1+d), \quad p_- = c_- (\lambda_+ + 2\mu_+)$$

$$p = p_+ + p_-, \quad \langle a \rangle = p_+ a_+ + p_- a_-$$

В случае, когда $r_{ij} = n_i n_j$ (деформация материала перпендикулярно слоям), упругая энергия равна нулю (материал не сопротивляется такой деформации), а модуль теплового расширения равен $-\langle \eta \rangle \pm / d$, что находится в полном соответствии с результатами рассмотрения одномерной двухфазной структуры в [5]. Полученный материал будет трансверсально изотропен с осью симметрии направленной вдоль вектора n^i , при этом его модуль упругости одноосного нагружения поперек слоев равен нулю. При малой собственной деформации ($d \ll 1$) тензор модулей упругости в соответствии с (3.6) запишется в виде (в матричных обозначениях):

$$C_{11} = C_{12} = 0, \quad C_{22} = 4\langle \mu(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) \rangle \quad (3.7) \\ C_{23} = 2\langle \mu\lambda / (\lambda + 2\mu) \rangle, \quad C_{66} = \langle 1/\mu \rangle^{-1}.$$

Таким образом, осредненные модули слоистого материала, когда на границах раздела фаз возможен когерентный фазовый переход, существенно различаются от соответствующих модулей «обычного» двухкомпонентного материала. Они зависят от термодинамических и геометрических характеристик фазового перехода и даже в асимптотике нулевой концентрации одной из фаз будут отличны от модулей основной компоненты.

Расчет осредненных термоупругих модулей второго порядка гетерогенных слоистых конфигураций, состоящих из периодической последовательности перемежающихся слоев различных физических фаз одного и того же химического вещества, между которыми происходит когерентный переход, сводится к решению линейных алгебраических систем (2.9), (2.12), (2.13). Осредненные модули указанных конфигураций качественно отличаются от модулей обычной слоистой конфигурации той же геометрии и с теми же термоупругими модулями второго порядка, но с запретом массопереноса через границы раздела. Эти два типа модулей невозможно даже сопоставить количественно, так как модули двухфазного композита в отличие от «обычного» зависят от дополнительных параметров, характеризующих фазовое превращение. Весьма существенное отличие от обычного композита состоит также в том, что при стремлении толщины слоев одной из фаз к нулю, осредненные модули двухфазного композита стремятся к пределу, отличающемуся от модулей второй фазы. Это обстоятельство, однако, вполне ясно с физической точки зрения и является, в некотором смысле, аналогом того физического факта, что давление насыщенного пара чистой жидкой фазы однозначно определяется абсолютной температурой (в терминах осредненных модулей это означает, что не зависимо от модулей жидкости и пара и их концентрации осредненная изотермическая несжимаемость такой системы равна нулю, т. е. принципиально отличается от модулей чистых фаз).

Формулы (3.6) позволяют явно рассчитать осредненные термоупругие модули в случае слоистого материала из изотропных компонент для специального вида «собственной» деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристиан-Дж.* Теория превращений в металлах и сплавах. Т. 1. М.: Мир, 1978. 806 с.
2. *Классен-Неклюдова М. В.* Механическое двойникование кристаллов. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 261 с.
3. *Базвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1046—1048.
4. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
5. *Гринфельд М. А.* Об осреднении термодинамических параметров двухфазных сред // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 584—589.
6. *Гринфельд М. А.* Фазовые переходы первого рода в нелинейно-упругих материалах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 99—109.
7. *Гринфельд М. А.* Построение физически линейной теории когерентных переходов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 79—91.
8. *Гринфельд М. А., Лангман С. Л.* Осредненные термоупругие модули двухфазных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 8. С. 36—49.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1986