**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988**

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ТОНКОМ СЛОЕ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ВОЛНИСТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

КАЛАМКАРОВ А. Л.

Применение метода осреднения процессов в периодических средах позволяет подойти к решению задач механики композиционных материалов регулярной структуры. В [1] на основе общей схемы осреднения [2, 3] развит двухмасштабный метод, позволивший выполнить переход от трехмерных уравнений линейной теории упругости для искривленного тонкого слоя из композитного материала с волнистыми поверхностями регулярной структуры с периодом, сравнимым с толщиной, к модели осредненной оболочки.

В данной работе метод осреднения [1] применен к выводу уравнений и соотношений упругости для тонкого анизотропного неоднородного (композитного) слоя переменной толщины, обладающего периодической структурой, в рамках нелинейной теории упругости. Построена модель осредненной пластины, позволяющая исследовать напряженно-деформированное состояние композитных, в частности армированных, сетчатых, слоистых пластин с периодической системой подкреплений (вафельных, ребристых и т. д.) в случае, когда относительные повороты волокон велики по сравнению с деформациями [4, 5].

Вывод нелинейных уравнений для однородного изотропного слоя дан в [6]. Достаточно полный обзор работ, связанных с приложениями метода осреднения в задачах механики композитных материалов представлен в [7].

1. Рассмотрим упругий тонкий слой с волнистыми поверхностями периодической структуры с ячейкой периодичности $\Omega_\varepsilon=\{0<x_1<\lambda\varepsilon,\ 0<x_2<\lambda\varepsilon,\ x_3^-<x_3<x_3^+\}$, $x_3^\pm=\pm\varepsilon/2\pm\lambda\varepsilon F^\pm(x_1/\lambda\varepsilon,\ x_2/\lambda\varepsilon)$. Безразмерный малый параметр ε определяет толщину слоя, λ — отношение продольных размеров ячейки к толщине (считается параметром порядка единицы), F^+ и F^- — в общем случае разные периодические функции, определяющие форму поверхностей слоя, $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — декартовы координаты, введенные в недеформированном теле.

Нелинейные уравнения равновесия в случае малых удлинений и сдвигов [4, 8], уравнения закона Гука, а также связь деформаций с перемещениями имеют вид

$$t_{ij,i}+P_j^*=0,\quad t_{ij}=\sigma_{ij}+\sigma_{ni}u_{j,n},\quad \sigma_{ij}=a_{ijkl}\varepsilon_{kl},\quad 2\varepsilon_{kl}=u_{k,l}+u_{l,k}+2u_{m,k}u_{m,l} \tag{1.1}$$

где t_{ij} — компоненты несимметричного тензора напряжений Кирхгофа [8], u_j — компоненты вектора перемещений $(u_{j,n}\equiv\partial u_j/\partial x_n)$, P_j^* — компоненты внешних объемных сил после деформации, коэффициенты упругости $a_{ijkl}(x_1/\lambda\varepsilon,\ x_2/\lambda\varepsilon,\ x_3/\varepsilon)$ — гладкие всюду вне совокупности непересекающихся поверхностей контакта, Ω_ε — периодические по x_1, x_2 функции, имеющие на поверхностях контакта разрывы первого рода.

На поверхностях тела $S^\pm$: $x_3=x_3^\pm$ выполняются условия [4, 8]:

$$t_{ij}n_i^\pm=\pm p_j^{*\pm} \tag{1.2}$$

где $n_i^\pm$ — компоненты орта нормали к поверхностям $S^\pm$ до деформации, $p_j^{*\pm}$ — компоненты внешних поверхностных сил после деформации.

Введем быстрые координаты $y_1=x_1/\lambda\varepsilon$, $y_2=x_2/\lambda\varepsilon$, $z=x_3/\varepsilon$ и, следуя методу двухмасштабных разложений [1—3], будем считать, что $d/dx_\mu=(\lambda\varepsilon)^{-1}\partial/\partial y_\mu+\partial/\partial x_\mu$ $(\mu=1,\ 2)$, $\partial/\partial x_3=\varepsilon^{-1}\partial/\partial z$. Решение определим в виде асимптотического ряда по малому параметру ε:

$$u_k = u_k^{(0)}(x) + \varepsilon u_k^{(1)}(x, y, z) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(x, y, z) + \ldots \qquad (1.3)$$
$$x = (x_1, x_2), \qquad y = (y_1, y_2)$$

где $u_k^{(l)}(x, y, z)$ $(l=1, 2, \ldots)$ — однопериодические функции по y_1, y_2.

Для внешних сил примем асимптотику [1]:

$$P_\mu^* = \varepsilon f_\mu^*(x, y, z), \quad P_3^* = \varepsilon^2 f_3^*(x, y, z) \qquad (1.4)$$
$$p_\mu^{*\pm} = \varepsilon^2 g_\mu^{*\pm}(x, y), \quad p_3^{*\pm} = \varepsilon^3 g_3^{*\pm}(x, y) \quad (\mu=1, 2)$$

Все определенные в (1.4) функции — периодические по y с ячейкой периодичности $\Omega = \{0<y_1<1, \ 0<y_2<1, \ z^-<z<z^+\}$, $z^\pm = \pm{}^1/_2 \pm \lambda F^\pm(y)$. Этим же свойством обладают коэффициенты упругости $a_{ijkl}(y, z)$. Пользуясь соотношениями (1.1), (1.3), получим

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \ldots \qquad (1.5)$$
$$t_{ij} = t_{ij}^{(0)} + \varepsilon t_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 t_{ij}^{(2)} + \ldots$$

При этом уравнения равновесия и условия на поверхностях (1.2) с учетом (1.4) разлагаются по ε следующим образом:

$$\varepsilon^{-1} h_j^{(-1)} + h_j^{(0)} + \varepsilon h_j^{(1)} + \varepsilon^2 h_j^{(2)} + \ldots = 0 \qquad (1.6)$$
$$h_j^{(-1)} = \partial t_{3j}^{(0)}/\partial z + \lambda^{-1} \partial t_{\alpha j}^{(0)}/\partial y_\alpha$$
$$h_j^{(0)} = t_{\alpha j,\alpha}^{(0)} + \partial t_{3j}^{(1)}/\partial z + \lambda^{-1} \partial t_{\alpha j}^{(1)}/\partial y_\alpha$$
$$h_j^{(1)} = t_{\alpha j,\alpha}^{(1)} + \partial t_{3j}^{(2)}/\partial z + \lambda^{-1} \partial t_{\alpha j}^{(2)}/\partial y_\alpha + f_j^*(\delta_{j1} + \delta_{j2})$$
$$h_j^{(2)} = t_{\alpha j,\alpha}^{(2)} + \partial t_{3j}^{(3)}/\partial z + \lambda^{-1} \partial t_{\alpha j}^{(3)}/\partial y_\alpha + f_j^* \delta_{j3}$$

$$(t_{ij}^{(0)} + \varepsilon t_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 t_{ij}^{(2)} + \varepsilon^3 t_{ij}^{(3)} + \ldots) n_i^\pm = \pm \varepsilon^2 g_j^{*\pm}(\delta_{j1} + \delta_{j2}) \pm \varepsilon^3 g_j^{*\pm} \delta_{j3} \quad (z=z^\pm) \qquad (1.7)$$

Здесь δ_{jl} — символ Кронекера; все индексы, обозначенные греческими буквами, принимают значения 1, 2, а латинскими — 1, 2, 3.

2. Введем обозначения дифференциальных операторов $\mathbf{L}_{ijk} = a_{ijk\mu} \lambda^{-1} \partial / \partial y_\mu + a_{ijk3} \partial/\partial z$. Для главных членов разложений (1.5) получим

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \mathbf{L}_{ijk} u_k^{(1)} + a_{ijk\alpha} u_{k,\alpha}^{(0)} + {}^1/_2 \lambda^{-1} \partial u_m^{(1)}/\partial y_\nu \mathbf{L}_{ij\nu} u_m^{(1)} + \qquad (2.1)$$
$$+ {}^1/_2 \, \partial u_m^{(1)}/\partial z \, \mathbf{L}_{ij3} u_m^{(1)} + u_{m,\alpha}^{(0)} \mathbf{L}_{ij\alpha} u_m^{(1)} + {}^1/_2 a_{ij\alpha\beta} u_{m,\alpha}^{(0)} u_{m,\beta}^{(0)}$$
$$t_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{i\beta}^{(0)} u_{j,\beta}^{(0)} + \sigma_{i3}^{(0)} \partial u_j^{(1)}/\partial z + \lambda^{-1} \sigma_{i\beta}^{(0)} \partial u_j^{(1)}/\partial y_\beta$$

Для $t_{ij}^{(0)}$ из соотношений (1.6), (1.7) получим следующую задачу:

$$h_j^{(-1)} = 0, \qquad t_{ij}^{(0)} n_i^\pm = 0 \qquad (z=z^\pm) \qquad (2.2)$$

Подставляя сюда соотношения (2.1), получим задачу для определения функций $u_k^{(1)}$. В этой задаче и всюду далее будем пренебрегать членами, содержащими произведения трех и более производных от компонент вектора перемещений $u_k^{(0)}$ по медленным координатам x_i ввиду их малости. С учетом этого и обобщая решение аналогичной задачи в рамках линейной теории [1], получим

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = 0, \qquad u_3^{(0)} = w(x) \qquad (2.3)$$
$$u_\beta^{(1)} = v_\beta(x) - z w_{,\beta} + W_\beta^{\mu\nu} w_{,\mu} w_{,\nu}, \qquad u_3^{(1)} = W_3^{\mu\nu} w_{,\mu} w_{,\nu}$$

где $W_k^{\mu\nu}(y, z)$ — Ω-периодические по y решения следующей локальной задачи на ячейке:

$$\lambda^{-1}\partial B_{i\beta}{}^{\mu\nu}/\partial y_\beta+\partial B_{i3}{}^{\mu\nu}/\partial z,\quad B_{ij}{}^{\mu\nu}n_j{}^{\pm}=0\quad (z=z^{\pm}) \tag{2.4}$$
$$B_{ij}{}^{\mu\nu}=\mathbf{L}_{ijk}W_k{}^{\mu\nu}+{}^1/{}_2(\delta_{\mu1}\delta_{\nu1}+\delta_{\mu2}\delta_{\nu2})a_{ij33}+{}^1/{}_2a_{ij\mu\nu}$$

На поверхностях разрывов функций $a_{ijkl}(y, z)$ выполняются условия непрерывности, отвечающие идеальному контакту

$$[W_k{}^{\mu\nu}]=0,\quad [\lambda^{-1}B_{i\beta}{}^{\mu\nu}n_\beta{}^*+B_{i3}{}^{\mu\nu}n_3{}^*]=0 \tag{2.5}$$

где $n_i{}^*$ — компоненты вектора нормали к поверхности разрыва.

При этом из соотношений (2.1) с принятой точностью получим

$$\sigma_{ij}^{(0)}=B_{ij}{}^{\mu\nu}w_{,\mu}w_{,\nu} \tag{2.6}$$

3. Определим операцию осреднения по Ω:

$$\langle\varphi\rangle=\int\limits_\Omega \varphi\, dy_1\, dy_2\, dz$$

Следуя методу осреднения [2, 3], для главных с учетом (2.2) членов соотношений (1.6), (1.7) получим следующую задачу:

$$h_j^{(0)}=\langle h_j^{(0)}\rangle,\qquad t_{ij}^{(1)}n_i{}^{\pm}=0\qquad (z=z^{\pm}) \tag{3.1}$$

При этом в силу периодичности по y и условий (3.1) при $z=z^{\pm}$ получим $\langle h_j{}^{(0)}\rangle=\langle t_{\alpha j}^{(0)}\rangle_{,\alpha}$. Пользуясь соотношениями (1.1), (2.3), с принятой точностью получим

$$\sigma_{ij}^{(1)}=\mathbf{L}_{ijk}u_k^{(2)}+a_{ij\mu\nu}\omega_{\mu\nu}+za_{ij\mu\nu}\tau_{\mu\nu}+ \tag{3.2}$$
$$+w_{,\theta}(\mathbf{L}_{ij\theta}u_3^{(2)}-\mathbf{L}_{ij3}u_\theta^{(2)})-a_{ij3\nu}w_{,\theta}\omega_{\theta\nu}-za_{ij3\nu}w_{,\mu}\tau_{\mu\nu}+2a_{ijm\nu}W_m{}^{\theta\mu}w_{,\theta}\tau_{\mu\nu}$$

$$t_{ij}^{(1)}=\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{i\beta}^{(1)}w_{,\beta}\delta_{j3}-\sigma_{i3}^{(1)}w_{,\beta}\delta_{j\beta} \tag{3.3}$$
$$\omega_{\mu\nu}\equiv v_{\mu,\nu},\qquad \tau_{\mu\nu}\equiv-w_{,\mu\nu}$$

Подставляя выражения (3.2), (3.3) в (3.1) с учетом соотношений (2.1), (2.6), получим задачу для определения функций $u_k^{(2)}$, решение которой можно представить в виде

$$u_k^{(2)}=U_k{}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}+V_k{}^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}+Q_k^{\theta\mu\nu}w_{,\theta}\omega_{\mu\nu}+R_k^{\theta\mu\nu}w_{,\theta}\tau_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

где $U_k{}^{\mu\nu}(y, z)$, $V_k{}^{\mu\nu}(y, z)$, $Q_k^{\theta\mu\nu}(y,z)$, $R_k^{\theta\mu\nu}(y,z)$ — Ω-периодические по y решения следующих локальных задач на ячейке:

$$\lambda^{-1}\partial b_{i\beta}{}^{\mu\nu}/\partial y_\beta+\partial b_{i3}{}^{\mu\nu}/\partial z=0 \tag{3.5}$$
$$b_{ij}{}^{\mu\nu}n_j{}^{\pm}=0\qquad (z=z^{\pm}),\qquad (b_{ij}{}^{\mu\nu}\leftrightarrow c_{ij}{}^{\mu\nu}\leftrightarrow q_{ij}^{\theta\mu\nu})$$

$$\lambda^{-1}\,\partial r_{i\beta}^{\theta\mu\nu}/\partial y_\beta+\partial r_{i3}^{\theta\mu\nu}/\partial z=b_{i\nu}{}^{\mu\theta}-\langle b_{i\nu}{}^{\mu\theta}\rangle$$

$$r_{ij}^{\theta\mu\nu}n_j{}^{\pm}=0\qquad (z=z^{\pm}) \tag{3.6}$$
$$b_{ij}{}^{\mu\nu}=\mathbf{L}_{ijk}U_k{}^{\mu\nu}+a_{ij\mu\nu},\qquad c_{ij}{}^{\mu\nu}=\mathbf{L}_{ijk}V_k{}^{\mu\nu}+za_{ij\mu\nu} \tag{3.7}$$
$$q_{ij}^{\theta\mu\nu}=\mathbf{L}_{ijk}Q_k^{\theta\mu\nu}+\mathbf{L}_{ij\theta}U_3{}^{\mu\nu}-\mathbf{L}_{ij3}U_\theta{}^{\mu\nu}-a_{ij3\nu}\delta_{\theta\mu}$$
$$r_{ij}^{\theta\mu\nu}=\mathbf{L}_{ijk}R_k^{\theta\mu\nu}+\mathbf{L}_{ij\theta}V_3{}^{\mu\nu}-\mathbf{L}_{ij3}V_\theta{}^{\mu\nu}-a_{ijm\nu}U_m{}^{\theta\mu}$$

На поверхностях разрывов характеристик материала выполняются условия, аналогичные (2.5).

$$[U_k{}^{\mu\nu}]=0\qquad (U_k{}^{\mu\nu}\leftrightarrow V_k{}^{\mu\nu}\leftrightarrow Q_k^{\theta\mu\nu}\leftrightarrow R_k^{\theta\mu\nu}) \tag{3.8}$$

$$[\lambda^{-1}b_{i\beta}{}^{\mu\nu}n_\beta{}^*+b_{i3}{}^{\mu\nu}n_3{}^*]=0\qquad (b_{ij}{}^{\mu\nu}\leftrightarrow c_{ij}{}^{\mu\nu}\leftrightarrow q_{ij}^{\theta\mu\nu}\leftrightarrow r_{ij}^{\theta\mu\nu})$$

Из соотношений (3.2) получим

$$\overset{(1)}{\sigma_{ij}} = b_{ij}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + c_{ij}^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu} + \overset{\theta\mu\nu}{q_{ij}}\, w_{,\theta}\omega_{\mu\nu} + \overset{\theta\mu\nu}{r_{ij}}\, w_{,\theta}\tau_{\mu\nu} \qquad (3.9)$$

Следует отметить, что n_i^* в условиях (2.5), (3.8) — компоненты нормали к поверхностям контакта в системе координат y_1, y_2, z, а $n_i^{\pm}$ в условиях (1.7), (2.4), (3.5), (3.6) — компоненты ортов нормалей к поверхностям $S^{\pm}$ в координатах x_1, x_2, x_3 и вычисляются по формулам

$$n_i^{\pm} = \{\mp\partial F^{\pm}/\partial y_1, \quad \mp\partial F^{\pm}/\partial y_2, \ 1\}(\omega^{\pm})^{-1} \qquad (3.10)$$
$$\omega^{\pm} = [1+(\partial F^{\pm}/\partial y_1)^2 + (\partial F^{\pm}/\partial y_2)^2]^{1/2}$$

При $\lambda\neq 1$ они не совпадают с компонентами нормалей к поверхностям $z=z^{\pm}(y)$ в координатах y_1, y_2, z.

Анализируя локальные задачи (3.5), (3.7) для функций $U_k^{\mu\nu}$ и (2.4) для $W_k^{\mu\nu}$, можно доказать, что

$$2W_\alpha^{\mu\nu} = U_\alpha^{\mu\nu} \quad (\alpha=1,\,2), \qquad 2W_3^{12} = U_3^{12} \qquad (3.11)$$
$$2W_3^{11} = U_3^{11} - z, \qquad 2W_3^{22} = U_3^{22} - z, \qquad B_{ij}^{\mu\nu} = {}^1/_2 b_{ij}^{\mu\nu}$$

Соотношения (3.11) уже учитывались выше при записи локальной задачи (3.6), (3.7) для функций $\overset{\theta\mu\nu}{r_{ij}}$

Все локальные задачи линейны относительно искомых функций и имеют единственные с точностью до постоянных слагаемых решения. Эта неоднозначность устраняется наложением условий $\langle U_k^{\mu\nu}\rangle_y = 0$ при $z=0$ $(U_k^{\mu\nu} \leftrightarrow V_k^{\mu\nu} \leftrightarrow W_k^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{\theta\mu\nu}{Q_k} \leftrightarrow \overset{\theta\mu\nu}{R_k})$, где индекс y означает осреднение только по координатам y_1, y_2. Данные условия учитывались при выводе соотношений (2.3), (3.11) и поясняют смысл функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, $w(x)$ в (2.3), определяющих перемещения точек срединной плоскости обшивки ($z=0$).

Задачи относительно функций $U_k^{\mu\nu}$, $V_k^{\mu\nu}$ совпадают с соответствующими в рамках линейной теории [1], а две другие содержат эти функции в правых частях.

Из локальных задач и периодичности по y имеем следующие соотношения и свойства симметрии:

$$\langle b_{i3}^{\mu\nu}\rangle = \langle z b_{i3}^{\mu\nu}\rangle = 0 \quad (b_{i3}^{\mu\nu} \leftrightarrow c_{i3}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{\theta\mu\nu}{q_{i3}}) \qquad (3.12)$$

$$\langle \overset{\theta\mu\nu}{r_{i3}} \rangle = \langle z\rangle\langle b_{i\nu}^{\mu\theta}\rangle - \langle z b_{i\nu}^{\mu\theta}\rangle$$
$$\langle b_{\beta\theta}^{\mu\nu}\rangle = \langle b_{\mu\nu}^{\beta\theta}\rangle, \qquad \langle z b_{\beta\theta}^{\mu\nu}\rangle = \langle c_{\mu\nu}^{\beta\theta}\rangle, \qquad \langle z c_{\beta\theta}^{\mu\nu}\rangle = \langle z c_{\mu\nu}^{\beta\theta}\rangle \qquad (3.13)$$

Указанные коэффициенты симметричны также при перестановке индексов $\mu\leftrightarrow\nu$, $\beta\leftrightarrow\theta$.

С учетом (3.11), (3.12) из соотношений (2.1), (2.6), (3.3) получим

$$\langle \overset{(0)}{t_{\alpha\beta}} \rangle = \langle \overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle, \qquad \langle \overset{(0)}{t_{\alpha 3}} \rangle = \langle \overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle w_{,\beta}, \qquad \langle \overset{(1)}{t_{\alpha\beta}} \rangle = \langle \overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle \qquad (3.14)$$

$$\langle z\overset{(1)}{t_{\alpha\beta}} \rangle = \langle z\overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle, \qquad \langle \overset{(1)}{t_{\alpha 3}} \rangle = \langle \overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle w_{,\beta} + \langle \overset{\theta\mu\nu}{r_{\alpha 3}} \rangle w_{,\theta}\tau_{\mu\nu}$$

Соотношения (3.3), (3.9) содержат три функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, $w(x)$, определяющие компоненты вектора перемещений по формулам (1.3), (2.3), (3.4). С учетом (2.2), (3.1) получим систему уравнений относительно этих функций, приравнивая к нулю следующие члены уравнений (1.6)

$$\langle \overset{(0)}{h_\beta} \rangle + \varepsilon \overset{(1)}{h_\beta} = 0 \quad (\beta=1,2), \qquad \langle \overset{(0)}{h_3} \rangle + \varepsilon \overset{(1)}{h_3} + \varepsilon^2 \overset{(2)}{h_3} = 0 \qquad (3.15)$$

Пользуясь периодичностью по y, условиями (1.7) и соотношениями (1.6), осредним уравнения (3.15) (функции $\omega^{\pm}$ определены в (3.10)):

$$\langle \overset{(0)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\alpha} + \varepsilon(\langle \overset{(1)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\alpha} + g_\beta^* + \langle f_\beta^* \rangle) = 0 \qquad (3.16)$$

$$\langle \overset{(0)}{t_{\alpha3}} \rangle_{,\alpha}+\varepsilon\langle \overset{(1)}{t_{\alpha3}} \rangle_{,\alpha}+\varepsilon^2(\langle \overset{(2)}{t_{\alpha3}} \rangle_{,\alpha}+g_3^*+\langle f_3^*\rangle)=0$$

$$g_j^*=\int_0^1\int_0^1 (g_j^{*+}\omega^++g_j^{*-}\omega^-)\,dy_1\,dy_2$$

Осредняя первые уравнения (3.15), умноженные на z, получим

$$\langle z\rangle\langle \overset{(0)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\alpha}+\varepsilon(\langle z\overset{(1)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\alpha}-\langle \overset{(2)}{t_{3\beta}} \rangle+m_\beta^*+\langle zf_\beta^*\rangle)=0$$

$$m_\beta^*=\int_0^1\int_0^1 (z^+g_\beta^{*+}\omega^++z^-g_\beta^{*-}\omega^-)\,dy_1\,dy_2 \qquad (3.17)$$

Можно доказать, что с принятой точностью $\langle \overset{(2)}{t_{\beta3}} \rangle=\langle \overset{(2)}{t_{3\beta}} \rangle$, поэтому, пользуясь (3.17), исключим из второго уравнения (3.16) слагаемое $\langle \overset{(2)}{t_{\alpha3}} \rangle_{,\alpha}$:

$$\langle \overset{(0)}{t_{\alpha3}} \rangle_{,\alpha}+\varepsilon\langle \overset{(1)}{t_{\alpha3}} \rangle_{,\alpha}+\varepsilon[\langle z\rangle\langle \overset{(0)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\alpha}+\varepsilon(\langle z\overset{(1)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\alpha}+m_\beta^*+\langle zf_\beta^*\rangle)]_{,\beta}+$$
$$+\varepsilon^2(g_3^*+\langle f_3^*\rangle)=0 \qquad (3.18)$$

Пользуясь соотношениями (3.11), (3.12), (3.14), а также (2.6) и (3.3), получим

$$\langle \overset{(1)}{t_{\alpha3}} \rangle+\langle z\rangle\langle \overset{(0)}{t_{\alpha\beta}} \rangle_{,\beta}=\langle \overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle w_{,\beta}+\langle z\overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle_{,\beta} \qquad (3.19)$$

Из соотношений (3.14), (3.18), (3.19) получим уравнение

$$[(\langle \overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle+\varepsilon\langle \overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle)w_{,\beta}]_{,\alpha}+\varepsilon[(\langle z\overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle+\varepsilon\langle z\overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle)_{,\alpha}+$$
$$+\varepsilon(m_\beta^*+\langle zf_\beta^*\rangle)]_{,\beta}+\varepsilon^2(g_3^*+\langle f_3^*\rangle)=0 \qquad (3.20)$$

Первые уравнения (3.16) с учетом (3.14) можно записать в виде

$$(\langle \overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle+\varepsilon\langle \overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle)_{,\alpha}+\varepsilon(g_\beta^*+\langle f_\beta^*\rangle)=0 \qquad (\beta=1,2) \qquad (3.21)$$

Осредняя соотношения (2.6), (3.9) с учетом (3.11), получим

$$\langle z^l\sigma_{\alpha\beta} \rangle+\varepsilon\langle z^l\overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle=\langle z^lb_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\rangle(\varepsilon\omega_{\mu\nu}+{}^1\!/_2w_{,\mu}w_{,\nu})+\varepsilon\langle z^lc_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\rangle\tau_{\mu\nu}+$$
$$+\varepsilon\langle z^lq_{\alpha\beta}^{\theta\mu\nu} \rangle w_{,\theta}\omega_{\mu\nu}+\varepsilon\langle z^lr_{\alpha\beta}^{\theta\mu\nu} \rangle w_{,\theta}\tau_{\mu\nu} \qquad (l=0,1) \qquad (3.22)$$

Коэффициенты соотношений упругости (3.22) представляют собой эффективные модули жесткости осредненной пластины, они обладают свойствами симметрии (3.13). Подставляя (3.22) в уравнения (3.20), (3.21), получим систему трех разрешающих уравнений относительно функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, $w(x)$. При этом соотношения (1.5), (2.6), (3.9) позволяют с большой степенью точности восстановить трехмерную локальную структуру поля напряжений.

4. Установим связь построенной модели с геометрически нелинейной теорией пластин. Для главных членов усилий и моментов с учетом (1.5) получим

$$T_{\alpha\beta}=\varepsilon\langle \overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle+\varepsilon^2\langle \overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle, \qquad M_{\alpha\beta}=\varepsilon^2\langle z\overset{(0)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle+\varepsilon^3\langle z\overset{(1)}{\sigma_{\alpha\beta}} \rangle \qquad (4.1)$$

Уравнения (3.20), (3.21) с учетом соотношений (1.4), (4.1) совпадают с уравнениями равновесия в проекциях на недеформированные оси, справедливыми в рамках нелинейной теории пластин при среднем изгибе [9] (в уравнениях [9] для пластины в недеформированном состоянии надо положить $A=B=1$, $k_1=k_2=0$).

Влияние неоднородности материала и переменной толщины сказывается на значениях эффективных коэффициентов в соотношениях упругости (3.22).

Рассмотрим предельный частный случай однородной пластины постоянной толщины: $a_{ijkl}=\text{const}$, $F^\pm\equiv0$. Зависимости от y_1, y_2 отсутствуют, и все локальные задачи решаются точно. В изотропном случае ненулевые решения имеют вид

$$
\begin{gathered}
U_3{}^{11}=U_3{}^{22}=-\nu(1-\nu)^{-1}z,\quad V_3{}^{11}=V_3{}^{22}=-{}^1/_2\nu(1-\nu)^{-1}z^2\\
Q_1{}^{111}=Q_2{}^{222}=(1-\nu)^{-1}z,\quad Q_1{}^{122}=Q_2{}^{211}=\nu(1-\nu)^{-1}z\\
Q_1{}^{221}=Q_2{}^{112}=z,\quad R_1{}^{122}=R_2{}^{211}={}^1/_2\nu(1-\nu)^{-1}z^2\\
R_1{}^{221}=R_2{}^{112}=-{}^1/_2\nu(1-\nu)^{-1}z^2
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

В соответствии с соотношениями (3.7), учитывая (4.2), получим

$$
\begin{gathered}
\langle b_{11}{}^{11}\rangle=\langle b_{22}{}^{22}\rangle=(1-\nu^2)^{-1}E,\quad \langle b_{22}{}^{11}\rangle=\nu(1-\nu^2)^{-1}E\\
\langle b_{12}{}^{12}\rangle={}^1/_2E(1+\nu)^{-1},\quad \langle z b_{\alpha\beta}{}^{\mu\delta}\rangle=\langle c_{\alpha\beta}{}^{\mu\delta}\rangle=0\\
\langle z c_{\alpha\beta}^{\mu\delta}\rangle={}^1/_{12}\langle b_{\alpha\beta}^{\mu\delta}\rangle,\qquad q_{\alpha\beta}^{\theta\mu\delta}=r_{\alpha\beta}^{\theta\mu\delta}=0
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя (4.3) в формулы (3.22), (4.1), получим соотношения упругости, справедливые в нелинейной теории пластин при среднем изгибе. При этом для деформаций срединной плоскости получим

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1=\varepsilon v_{1,1}+{}^1/_2(w_{,1})^2,\quad \varepsilon_2=\varepsilon v_{2,2}+{}^1/_2(w_{,2})^2\\
\omega=\varepsilon(v_{1,2}+v_{2,1})+w_{,1}w_{,2}\\
\varkappa_1=-w_{,11},\quad \varkappa_2=-w_{,22},\quad \tau=-w_{,12}
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Здесь ε_1, ε_2, ω – относительные удлинения и сдвиг срединной плоскости, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ – ее искривление и кручение. Соотношения (4.4) с учетом (1.3), (2.3) совпадают с формулами Кармана [4, 6]. Отметим, что с помощью найденных в этом случае решений локальных задач (4.2), (3.11) из соотношений (1.3), (2.3), (3.4) получаются выражения для компонент вектора перемещений с точностью до членов порядка ε^2.

Полученная нелинейная модель осредненной пластины позволяет подойти к исследованию упругой устойчивости в случае малых докритических деформаций [4, 5, 8, 9]. При этом можно пользоваться обычными уравнениями устойчивости [5, 9], выписанными относительно усилий и моментов, и обычными формулами для деформаций срединной плоскости. Связь между усилиями, моментами и деформациями определяется при этом полученными выше соотношениями упругости (3.22), (4.1). Задача может быть значительно упрощена, если в этих соотношениях пренебречь слагаемыми, содержащими произведения $w_{,\theta}\omega_{\mu\nu}$ и $w_{,\theta}\tau_{\mu\nu}$ ввиду их малости по сравнению с другими членами.

Автор благодарит В. З. Партона и Б. А. Кудрявцева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З., Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А.* Напряженно-деформированное состояние искривленного анизотропного неоднородного слоя периодической структуры с волнообразными поверхностями // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 6. С. 1330—1335.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
3. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
4. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. 211 с.
5. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат. 1957. 432 с.
6. *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана. М.: Мир. 1983. 172 с.
7. *Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ. 1987. Т. 19. С. 78—147.
8. *Гузь А. Н., Бабич И. Ю.* Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. Киев: Вища шк., 1980. 167 с.
9. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука. 1978. 359 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.XII.1986