

УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ
ДЛЯ ТЕЛ С ТОНКИМИ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

ПЕЛЕХ Б. Л., ФЛЕЙШМАН Ф. Н.

Дается постановка и предлагается приближенный метод решения основных задач теории упругости для тела с покрытием. Для оценки точности и выяснения области применимости этого метода исследуется деформация тел с тонким изотропным покрытием.

Различные методы исследования контактных задач для тел с тонкими покрытиями и прослойками даны в [1]. В [2] предложена модель взаимодействия твердых тел, сопряженных посредством тонких упругих криволинейных прослоек однородной или неоднородной структуры.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим равновесие упругого тела с тонким однородным упругим изотропным покрытием постоянной толщины $2h$, отнесенным к системе ортогональных координат смешанного типа (α_1, α_2, z) (ось z направлена по нормали к срединной поверхности покрытия). Ставится основная смешанная задача (по терминологии [3]), когда внешняя граница $S^+(z=h)$ тела с покрытием представляется в виде объединения $S^+ = \cup S_k^+$ четырех непересекающихся участков границ S_k^+ , на которых заданы соответственно следующие величины: внешние напряжения $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$; смещения u_1, u_2, w ; нормальная составляющая смещения w и касательные составляющие внешних напряжений σ_{13}, σ_{23} ; нормальная составляющая напряжений σ_{33} и касательные составляющие смещения u_1, u_2 .

Некоторые из множеств S_k^+ могут быть пустыми и тогда получаем, в частности, первую или вторую основные задачи. Для каждого из участков границы обобщенные краевые условия для тела с тонким покрытием, выведенные с точностью $O(h^2)$ при отсутствии массовых сил, можно записать в виде

$$\mathbf{T}_k^- + \varepsilon \mathbf{F}_k^- = \mathbf{T}_k^+ + \varepsilon \mathbf{F}_k^+ \quad (k=1, 4) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{T}_1^\mp = (\sigma_{13}^\mp, \sigma_{23}^\mp, \sigma_{33}^\mp)^T, \mathbf{T}_2^\mp = (u_1^\mp, u_2^\mp, w^\mp)^T \quad (1.2)$$

$$\mathbf{T}_3^\mp = (w^\mp, \sigma_{13}^\mp, \sigma_{23}^\mp)^T, \mathbf{T}_4^\mp = (\sigma_{33}^\mp, u_1^\mp, u_2^\mp)^T$$

$$\mathbf{F}_k^\mp = \{F_{kj}^\mp\}, \varepsilon = (2h/R)\mu/\mu_m \quad (j=1, 3) \quad (1.3)$$

$$F_{13}^+ = R\mu_m(2A_1A_2\mu)^{-1}[\partial(A_2\sigma_{13}^+)/\partial\alpha_1 + \partial(A_1\sigma_{23}^+)/\partial\alpha_2] \quad (1.4)$$

$$F_{1i}^+ = R\mu_m(2\mu)^{-1}[v(1-v)^{-1}A_i^{-1}\partial\sigma_{33}^+/\partial\alpha_i + 2K_0(1-v)^{-1}\sigma_{33}^+] \quad (i=1, 2)$$

$$F_{1i}^- = R\mu_m\{2K_0A_i^{-1}\partial w^-/\partial\alpha_i - (1+v)(1-v)^{-1}A_i^{-1}\partial(\theta_1^- + 2K_0w^-)/\partial\alpha_i - \\ - (\Delta_1 + 2K_0R_i)u_i^- - v(1-v)^{-1}(2\mu A_i)^{-1}\partial\sigma_{33}^-/\partial\alpha_i + \Phi_i^-- \\ - [R_i^{-1} + 2K_0(2-3v)(1-v)^{-1}](2\mu)^{-1}\sigma_{33}^-\}$$

$$F_{2i}^- = R\mu_m\mu^{-1}[\mu^{-1}\sigma_{i3}^- - (1-4v)(1-2v)^{-1}(2A_i)^{-1}\partial w^-/\partial\alpha_i + \\ + (K_0 + R_i^{-1})u_i^-], F_{23}^+ = R\mu_m(4\mu)^{-1}(1-v)^{-1}\theta_1^+$$

$$F_{23}^- = R\mu_m(1-v)^{-1}(2\mu)^{-1}[(1-2v)\mu^{-1}\sigma_{33}^- + 2K_0(1-3v)w^- + \\ + (1-4v)\theta_1^-/2], F_{33}^+ = 0$$

$$F_{13}^- = 2\mu_m R\{[2K_0^2(1+v)(1-v)^{-1} - (R_1R_2)^{-1}]w^- - u_1^-A_1^{-1}\partial K_0/\partial\alpha_1 - \\ - u_2^-A_2^{-1}\partial K_0/\partial\alpha_2 + 2v(1-v)^{-1}K_0\theta_1^- - K_0(1-2v)\mu^{-1}(1-v)^{-1}\sigma_{33}^- -$$

$$\begin{aligned}
& - (4A_1A_2\mu)^{-1} [\partial(A_2\sigma_{13}^-) / \partial\alpha_1 + \partial(A_1\sigma_{23}^-) / \partial\alpha_2] + \Phi_3^- / 2 \} \\
F_{2i}^+ &= R\mu_m (2\mu)^{-1} [2K_0u_i^+ + (1-2\nu)^{-1}A_i^{-1}\partial w^+ / \partial\alpha_i] \\
F_{33}^- &= R\mu_m\mu^{-1} [(\lambda+2\mu)^{-1}\sigma_{33}^- - \nu(1-\nu)^{-1}(\theta_1^- + 2K_0w^-)] \\
F_{3i}^- &= -R\mu_m \{ (2\mu)^{-1} [(4K_0+R_i^{-1})\sigma_{i3}^- + 2\nu A_i^{-1}(1-\nu)^{-1}\partial\sigma_{33}^- / \partial\alpha_i] + \\
& + (1+\nu)(1-\nu)^{-1}A_i^{-1}\partial\theta_i^- / \partial\alpha_i + (\Delta_i + 2K_0R_i^{-1})u_i^- - \\
& - \Phi_i(0, u_i^-, u_2^-, w^-/2) + [(1-\nu-4\nu^2)A_i^{-1}w^- \partial K_0 / \partial\alpha_i + \\
& + 2\nu(1-3\nu)K_0A_i^{-1}\partial w^- / \partial\alpha_i] (1-2\nu)^{-1}(1-\nu)^{-1} \\
F_{3i}^+ &= \mu_m R \{ (2\mu R_i)^{-1}\sigma_{i3}^+ - \Phi_i(0, 0, 0, w^+/2) + \\
& + (1-2\nu)^{-1} [2\nu K_0A_i^{-1}\partial w^+ / \partial\alpha_i + w^+ A_i^{-1}\partial K_0 / \partial\alpha_i] \} \\
F_{4i}^- &= \mu_m\mu^{-1} R \{ [\mu^{-1}\sigma_{i3}^- + [(1-\nu)^{-1}K_0 + R_i^{-1}]u_i^- - A_i^{-1}\partial w^- / \partial\alpha_i] \\
F_{43}^+ &= -R\mu_m \{ K_0(1+\nu)(1-\nu)^{-1}\theta_1^+ + \Phi_3(0, u_1^+/2, u_2^+/2, 0) - \\
& - (2A_1A_2)^{-1} [\partial(A_2R_2^{-1}u_1^+) / \partial\alpha_1 + \partial(A_1R_1^{-1}u_2^+) / \partial\alpha_2] - \\
& - K_0\mu^{-1}(2-\nu)(1-\nu)^{-1}\sigma_{33}^+ \} \\
F_{43}^- &= R\mu_m \{ 3K_0\nu\mu^{-1}(1-\nu)^{-1}\sigma_{33}^- + \Phi_3(0, u_1^-/2, u_2^-/2, w^-) - \\
& - (\mu A_1A_2)^{-1} [\partial(A_2\sigma_{13}^-) / \partial\alpha_1 + \partial(A_1\sigma_{23}^-) / \partial\alpha_2] + \\
& + (2A_1A_2)^{-1} [\partial(A_2R_2^{-1}u_1^-) / \partial\alpha_1 + \partial(A_1R_1^{-1}u_2^-) / \partial\alpha_2] - \\
& - (u_1^- - A_1^{-1}\partial K_0 / \partial\alpha_1 + u_2^- A_2^{-1}\partial K_0 / \partial\alpha_2) + 2\nu(1-\nu)^{-1}K_0\theta_1^- - \\
& - [2(R_1R_2)^{-1} - 4K_0^2(1+\nu)(1-\nu)^{-1}]w^- \} \\
F_{4i}^+ &= R\mu_m\mu^{-1}(1-\nu)^{-1}K_0u_i^+ + 2K_0 = R_1^{-1} + R_2^{-1} \\
\Delta_1 &= (A_1A_2)^{-1} [\partial(A_2A_1^{-1}\partial / \partial\alpha_1) / \partial\alpha_1 + \partial(A_1A_2^{-1}\partial / \partial\alpha_2) / \partial\alpha_2] \\
\theta_i^\pm &= (A_1A_2)^{-1} [\partial(A_2u_i^\pm) / \partial\alpha_1 + \partial(A_1u_2^\pm) / \partial\alpha_2]
\end{aligned}$$

Функции $\Phi_j(z, u_1, u_2, w)$ не приведены ввиду их громоздкости (в декартовой системе координат они равны нулю), $A_i, R_i(\alpha_1, \alpha_2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности покрытия, μ, μ_m — модули сдвига покрытия и тела матрицы соответственно, ε — малый параметр, характеризующий приведенную жесткость покрытия на растяжение, R — характерный линейный размер тела с покрытием (таким размером может служить, например, наименьший радиус кривизны поверхности $z=0$ или какая-либо другая величина); знак T сверху означает транспонирование. Если учесть, что для большинства реальных материалов $\mu/\mu_m < 100$, то малость параметра ε определяется в основном малостью отношения h/R .

Условия сопряжения (1.1) связывают между собой контактные напряжения ($\sigma_{13}^-, \sigma_{23}^-, \sigma_{33}^-$) и смещения (u_1^-, u_2^-, w^-) на поверхности сцепления $S^-(z=-h)$ с заданными на поверхности внешними напряжениями или смещениями с индексом «плюс» сверху. Векторы-столбцы F_k^+ и T_k^+ известны, а векторы F_k^- и T_k^- известным образом выражаются через вектор U упругих перемещений точек рассматриваемого тела, который зависит не только от координат, но и от малого параметра ε . Вектор U удовлетворяет трем дифференциальным уравнениям равновесия в смещениях, которые при отсутствии массовых сил могут быть записаны символически:

$$L[U(\varepsilon)] = 0 \quad (1.5)$$

Для изотропного, анизотропного или неоднородного тела, например, вид дифференциального оператора L можно найти в [4—6].

Искомый вектор упругих смещений U разложим в бесконечный ряд по степеням малого параметра ε :

$$U(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \varepsilon^n \quad (1.6)$$

где вектор-функции U_n зависят лишь от координат тела. Векторы T_k^- и F_k^- раскладываются в аналогичные ряды:

$$T_k^- = \sum_{n=0}^{\infty} T_{k,n}^- \varepsilon^n, \quad F_k^- = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}^- \varepsilon^n \quad (1.7)$$

где $T_{k,n}^-$ и $F_{k,n}^-$ известным образом выражаются через U_n .

Подставив (1.6) и (1.7) в уравнения (1.5) и условия сопряжения (1.1), сравниваем члены, содержащие одинаковые степени ε , и получаем новые смешанные задачи, содержащие вектор-функции U_n с последовательно возрастающими индексами. Индексу $n=0$ будет соответствовать задача

$$L[U_0]=0, \quad T_{k,0}^- = T_k^+ \quad (k=\overline{1,4}) \quad (1.8)$$

При $n \geq 1$ получаем ($\delta_{n,i}$ — символ Кронекера):

$$L[U_n]=0, \quad T_{k,n}^- = \delta_{n,i} F_k^+ - T_{k,n-1}^- \quad (k=\overline{1,4}) \quad (1.9)$$

Задачи (1.8), (1.9), служащие для определения векторов U_n ($n \geq 0$), являются классическими смешанными задачами для тела без покрытия, алгоритм решения которых предполагается известным. После их решения векторы U_n подставляются в (1.6) и находится вектор упругих перемещений для тела с покрытием.

Если параметр ε весьма мал, а условия сопряжения выведены с точностью $O(h^2)$, то в (1.6) естественно ограничиться лишь первыми двумя членами. Для получения приближенного решения

$$U(\varepsilon) = U_0 + \varepsilon U_1 \quad (1.10)$$

приходится решать дважды классическую смешанную задачу для тела без покрытия, а именно: один раз задачу (1.8) с реальными условиями на границе для определения U_0 и другой раз задачу (1.9) при $n=1$ с фиктивными граничными условиями для определения U_1 .

Существование и однозначная разрешимость основных задач вида (1.8), (1.9) для упругой изотропной однородной среды доказаны в [3].

2. Смешанная задача для полукруга с тонким покрытием. Упругий полукруг радиуса $(R-h)$ покрыт тонким инородным слоем толщиной $2h$ на криволинейной части границы S_1 , оперт свободно на гладкой абсолютно жесткой полуплоскости S_2 и находится в условиях плоской деформации. Воспользуемся полярными координатами (r, θ) с началом в центре полукруга, а в точках окружности $r=R$ — локальной системой координат (θ, z) (фигура).

На границе S_3 заданы условия третьей основной задачи

$$u_{\theta,0}^+ = 0, \quad \sigma_{r,\theta}^+ = 0 \quad (2.1)$$

На поверхности покрытия задано внешнее напряжение, т. е. условия первой основной задачи

$$\sigma_{rr}^+ = -p = \text{const}, \quad \sigma_{r,\theta}^+ = 0 \quad (2.2)$$

При решении поставленной задачи для полукруга, очевидно, достаточно рассмотреть целый круг с тонким покрытием под нормальным внешним давлением $p = \text{const}$. При этом условия симметрии (2.1) на гладком основании удовлетворятся автоматически. Приближенное решение задачи ищется в виде (1.10). Решая сначала осесимметрическую задачу о плоской деформации для круга с реальными граничными условиями (2.2), находим [7]:

$$u_{r,0}^m = -pr(1-2\nu_m)/(2\mu_m), \quad u_{\theta,0}^m = 0 \quad (2.3)$$

Для определения добавочных перемещений $u_{r,1}^m, u_{\theta,1}^m$, приближенно характеризующих влияние покрытия, решаем снова эту же задачу, но уже с крайними условиями (1.9), которые принимают вид

$$\sigma_{rr,1}^- = -\mu_m(1-\nu)^{-1}[2u_{r,0}^m/R - (1-2\nu)\sigma_{rr,0}^m/\mu] = -p_1 \quad (2.4)$$

Аналогично (2.3) записываем

$$u_{r,1}^m = -p_1 r (1 - 2\nu_m) / (2\mu_m), \quad u_{\theta,1}^m = 0 \quad (2.5)$$

Складывая (2.3) и (2.5), получаем окончательно решение для круга с покрытием

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^m = \sigma_{\theta\theta}^m = -p \{ 1 + 2h(1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1} R^{-1} [1 - \\ - k(1 + \nu_m)(1 + \nu)^{-1} / k_m] \}, \quad \sigma_{r\theta}^m = 0 \\ u_r^m = (1 + \nu_m) r \sigma_{rr}^m / (3k_m), \quad u_{\theta}^m = 0 \quad (r \leq R - h) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где k , ν , k_m , ν_m — объемный модуль и коэффициент Пуассона покрытия и круга соответственно. Для сравнения, решая поставленную задачу точно, находим для $0 \leq r \leq R - h$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^m = \sigma_{\theta\theta}^m = 2C, \quad \sigma_{r\theta}^m = 0 \\ u_r^m = 2rC(1 - \nu_1) / E_1, \quad u_{\theta}^m = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для $R - h \leq r \leq R + h$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = Ar^{-2} + 2B, \quad \sigma_{\theta\theta} = -Ar^{-2} + 2B, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \\ u_r = rE_2^{-1} [2B(1 - \nu_2) - Ar^{-2}(1 + \nu_2)], \quad u_{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \nu_1 = \nu_m / (1 - \nu_m), \quad E_1 = E_m / (1 - \nu_m^2) \\ \nu_2 = \nu / (1 - \nu), \quad E_2 = E / (1 - \nu^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Постоянные A , B , C определяем из граничных условий

$$\sigma_{rr}^m = \sigma_{rr}, \quad u_r^m = u_r(r = R - h), \quad \sigma_{rr} = -p(r = R + h) \quad (2.10)$$

Подстановкой выражений (2.7), (2.8) в условия (2.10) получаем систему трех уравнений, из которых определяем

$$\begin{aligned} A = (R^2 - h^2)^2 (4Rh)^{-1} (2C + p) \\ B = -[2p + (R - h)^2 (2Rh)^{-1} (2C + p)] / 4 \\ 2C = -p \{ 1 - (2h/R) [E_2(1 - \nu_1) / E_1 - (1 - \nu_2)] \times \\ \times [(1 + h/R)^2 + (2h/R)(E_2(1 - \nu_1) / E_1 - (1 - \nu_2))]^{-1} \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отсюда с учетом (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^m = -p \{ 1 + (2h/R)(1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1} [1 - k(1 + \nu_m)(1 + \nu)^{-1} / k_m] \times \\ \times [(1 + h/R)^2 - (2h/R)(1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1} [1 - k(1 + \nu_m)(1 + \\ + \nu)^{-1} / k_m]]^{-1} \} \\ u_r^m = (1 + \nu_m) \sigma_{rr}^m r / (3k_m) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Знаменатель в первой формуле (2.12) всегда положителен. Раскладывая выражения (2.12) в ряд по степеням $\varepsilon = 2h\mu / (R\mu_m)$ и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получаем формулы, которые тождественно совпадают с приближенным решением (2.6).

Анализ точного решения (2.12) показывает, что при $k / (1 + \nu) \leq k_m / (1 + \nu_m)$, т. е. когда материал слоя мягче, чем материал полукруга, нормальные напряжения $|\sigma_{rr}^m| \geq p$. Этим же свойством обладает решение (2.6). Отметим, что такой эффект нельзя получить, если воспользоваться условиями сопряжения, основанными на теории тонких стержней (см., например, [8]). Условия полного контакта полукруга с плоским основанием S_3 , т. е. условие $\sigma_{rr}^m < 0$, очевидно, выполняется.

Для сравнения в табл. 1 приведены значения нормальных напряжений $-\sigma_{rr}^m / p$, вычисленные по формулам (2.6) и (2.12). Анализ полученных результатов показывает, что при $h/R \leq 0,03$ и $\varepsilon \leq 0,3$ решение (2.6) отличается от точного (2.12) менее чем на 1,5%.

3. Смешанная задача для полушара с покрытием. Рассмотрим однородный изотропный полушар, сферическая поверхность S_1 которого покрыта тонким инородным слоем. Полушар лежит на абсолютно жестком гладком основании S_3 . На сферической поверхности покрытия $r = R + h$ заданы внешние напряжения

$$\sigma_{rr}^+ = -p = \text{const}, \quad \sigma_{r\theta}^+ = \sigma_{r\varphi}^+ = 0 \quad (3.1)$$

Таблица 1

ε	h/R				
	0,001	0,01	0,02	0,03	№
0,05	0,980	0,990	1,001	1,012	(2.12)
	0,979	0,990	1,001	1,013	(2.6)
0,1	0,960	0,970	0,981	0,992	(2.12)
	0,958	0,968	0,980	0,991	(2.6)
0,2	0,922	0,932	0,943	0,953	(2.12)
	0,915	0,925	0,937	0,948	(2.6)
0,3	0,887	0,897	0,908	0,918	(2.12)
	0,872	0,883	0,894	0,905	(2.6)

На гладком основании S_3 заданы условия третьей основной задачи

$$w^+ = 0, \quad \sigma_{xz}^+ = \sigma_{yz}^+ = 0 \quad (3.2)$$

Очевидно, что для решения задачи достаточно рассмотреть целый шар, отнесенный к сферическим координатам под нормальным давлением $p = \text{const}$. При этом условия (3.2), как условия симметрии относительно плоскости S_3 , выполняются автоматически. Из трех условий вида (3.1) на поверхности с тонким покрытием два условия удовлетворяются тождественно. Используя известное решение о внешнем давлении на однородную сферу без покрытия

$$u_{r,0}^m = -pr/(3k_m), \quad \sigma_{rr,0}^m = \sigma_{\theta\theta,0}^m = \sigma_{\varphi\varphi,0}^m = -p \quad (3.3)$$

решаем задачу (1.9) и окончательно получаем приближенное решение в виде

$$\sigma_{rr}^m = -p[1 - (4h/R)(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}(k/k_m - 1)] \quad (3.4)$$

$$u_r^m = \sigma_{rr}^m r / (3k_m)$$

Для этой задачи нетрудно получить и точное решение путем точного удовлетворения условий спая покрытия со сферой, а именно:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^m = -p \{ & 1 - (4h/R)(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} [1 + h^2/(3R^2)] (k/k_m - 1) \times \\ & \times [(1+h/R)^3 + (4h/R)(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} [1 + h^2/(3R^2)] (k/k_m - 1)]^{-1} \} \\ u_r^m = \sigma_{rr}^m r / (3k_m) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Знаменатель в (3.5) всегда положителен в силу того, что по условию задачи $h < R$, а $0 \leq \nu \leq 0,5$. Нетрудно проверить, что если в разложениях (3.5) по степеням ε пренебречь членами порядка ε^2 и выше, то получается решение, тождественно совпадающее с (3.4).

Таблица 2

ε	h/R				
	0,001	0,01	0,02	0,03	№
0,05	0,9626	0,9824	1,0042	1,0256	(3.5)
	0,9610	0,9816	1,0044	1,0273	(3.4)
0,15	0,8919	0,9108	0,9314	0,9519	(3.5)
	0,8785	0,8990	0,9219	0,9448	(3.4)
0,2	0,8604	0,8787	0,8989	0,9188	(3.5)
	0,8372	0,8578	0,8806	0,9035	(3.4)

Анализ точного решения (3.5) показывает, что производная от напряжений σ_{rr}^m как по параметру k/k_m , так и по параметру h/R всегда положительна. Это означает, что, как и следовало ожидать, по абсолютной величине нормальные контактные напряжения σ_{rr}^m в полусфере убывают с ростом жесткости покрытия. Поскольку при $k=k_m$ получается, что $\sigma_{rr}^m = -p$, то для значений $k < k_m$ будем иметь $|\sigma_{rr}^m| > p$. Другими словами, если материал слоя мягче основного материала, нормальные напряжения σ_{rr}^m больше, чем в однородном полусфере. Интересно отметить, что приближенное решение (3.4) отражает все перечисленные качества точного решения. На гладком основании S_3 выполняются условия полного контакта $\sigma_{rr}^m < 0$.

Для численного сравнения приближенного и точного решений в табл. 2 представлены значения напряжений $-\sigma_{rr}^m/p$, вычисленные по формулам (3.5) и (3.4) для некоторых значений параметра ε и приведенной толщины покрытия h/R . Анализ полученных результатов показывает, что при $h/R \leq 0,03$ и $\varepsilon \leq 0,2$ решение (3.4) отличается от точного (3.5) менее чем на 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.
2. Пелех Б. Л., Флейшман Ф. Н. Влияние тонких межфазных слоев на макроскопические характеристики композиционных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 68-73.
3. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука. 1976. 664 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
5. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 415 с.
6. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ. 1976. 368 с.
7. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.: Физматгиз. 1959. 364 с.
8. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во ЛГУ. 1960. 258 с.

Львов

Поступила в редакцию
15.IX.1986