МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННЫХ УСКОРЕНИЙ И ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ НА УХОДЫ СВОБОДНОГО ГИРОСКОПА С НЕКОНТАКТНЫМ ПОДВЕСОМ

ЛИНЬКОВ Р. В., УРМАН Ю. М.

Изучается влияние ускорений на уходы квазисферического ротора при условии, что нет резонансных соотношений между частотой вибрации и скоростями вращения свободного твердого тела. Задача решается в предположении, что отклонения формы поверхности ротора по сферической малы и аксиально симметричны. Источники, определяющие поле подвеса, также предполагаются аксиально-симметричными. На основе уравнений поступательного и вращательного движений квазисферического ротора строится математическая теория уходов свободного гироскопа при наличии постоянных и переменных ускорений. Для получения силовой функции используется гармонический анализ на сфере. Проводится усреднение силовой функции по свободному движению Эйлера – Пуансо и по периоду переменного ускорения. Анализируется зависимость моментов от ускорений и их влияние на движение гироскопа.

Ранее уходы несбалансированного ротора, возникающие при вибрации основания, изучались в [1–3]. Моменты, обусловленные несферичностью ротора, а также систематические уходы в постоянном поле тяжести Земли исследованы в [4–6].

1. Рассмотрим осесимметричный подвес квазисферического ротора. Пусть X_n ($n=1, 2, 3$) — опорная прямоугольная система координат с началом O на оси подвеса и осью X_3 вдоль нее; Y_n — прямоугольная система с началом O_1 в центре масс ротора и параллельная X_n; Z_n — система координат, связанная с вектором кинетического момента $\mathbf{H}$ (ось Z_3 направлена по $\mathbf{H}$) и, наконец, связанная с ротором система ξ_n, оси которой направлены вдоль главных осей эллипсоида инерции ротора с моментами инерции $A=B$, C.

Положение вектора кинетического момента $\mathbf{H}$ в системе координат Y_n определяется двумя сферическими углами ρ и σ. Переход от системы координат Z_n к ξ_n происходит после трех последовательных поворотов соответственно на углы ψ, θ, φ, которые определим следующим образом: ψ — вокруг оси Z_3, θ — вокруг нового положения оси Z_2, φ — вокруг окончательного положения оси Z_3.

Силовая функция подвеса квазисферического ротора в общем случае имеет вид

$$U=V(\mathbf{r}, I)+\varepsilon W(\theta^{\vee}, \mathbf{r}, I) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс ротора относительно опорной системы координат; I — для определенного типа подвеса либо ток в магнитах, либо потенциал электродов, которые регулируются в зависимости от смещения центра масс шара; $\theta^{\vee}$ — вектор конечного поворота; ε — малый параметр, связанный с несферичностью ротора. Первый член выражения (1.1) представляет собой силовую функцию шарового ротора, а второй член учитывает малую несферичность и дебаланс.

Уравнения движения центра масс и вращения относительно центра масс имеют вид [7]:

$$\begin{gathered} m\mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\nabla V+m[\mathbf{g}+\mathbf{a}(t)]+\varepsilon\nabla W \\ H^{\cdot}=\varepsilon\partial W/\partial\psi,\ \sigma^{\cdot}=\varepsilon(H\sin\rho)^{-1}\partial W/\partial\rho \\ \rho^{\cdot}=\varepsilon(H\sin\rho)^{-1}(\cos\rho\partial W/\partial\psi-\partial W/\partial\sigma) \\ \theta^{\cdot}=\varepsilon(H\sin\theta)^{-1}(\cos\theta\partial W/\partial\psi-\partial W/\partial\varphi) \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\varphi^{\cdot}=H(C^{-1}-A^{-1})\cos\theta+\varepsilon(H\sin\theta)^{-1}\partial W/\partial\theta$$
$$\psi^{\cdot}=HA^{-1}-\varepsilon H^{-1}(\operatorname{ctg}\rho\partial W/\partial\rho+\operatorname{ctg}\theta\partial W/\partial\theta)$$

где m — масса ротора, g — ускорение свободного падения, $\mathbf{a}(t)$ — периодическое ускорение (вибрация) с нулевым средним, H — модуль вектора кинетического момента. Система (1.2) должна быть дополнена дифференциальными уравнениями, описывающими изменение источника поля из-за действия регулирования в подвесе, что условно запишем в виде

$$F(I,\ I^{\cdot},\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}^{\cdot})=0 \qquad (1.3)$$

Будем предполагать, что система, состоящая из первого уравнения (1.2) и (1.3), имеет периодическое решение с периодом внешней силы. Решение системы уравнений (1.2), (1.3) будем искать методом осреднения. Для разделения быстрых и медленных движений применим общую схему осреднения [8]. Порождающая система получается при $\varepsilon=0$. При этом величины H, ρ, σ, θ будут постоянными. Решив систему порождающих уравнений, подставив найденное решение в правые части уравнений для медленных переменных, после осреднения получим уравнение первого приближения. Так как система содержит три частоты: прецессии, вращения и вибрации, то результат осреднения существенно зависит от того, соизмеримы (резонанс) или несоизмеримы эти частоты. Предполагается, что резонансные соотношения между частотами отсутствуют. В рассматриваемом случае осреднение можно провести осредняя силовую функцию; уравнения медленных движений вектора кинетического момента на интервале времени $1/\varepsilon$ будут иметь вид

$$\begin{gathered}\rho^{\cdot}=-\varepsilon(H\sin\rho)^{-1}\partial\langle W\rangle/\partial\sigma\\ \sigma^{\cdot}=\varepsilon(H\sin\rho)^{-1}\partial\langle W\rangle/\partial\rho\\ H=H_0=\text{const},\ \theta=\theta_0=\text{const}\end{gathered} \qquad (1.4)$$

где $\langle W\rangle$ — осредненная по порождающему решению силовая функция. Таким образом, задача определения уходов гироскопа сводится к решению уравнений (1.4).

2. Для исследования движения вектора кинетического момента рассмотрим более подробно силовую функцию W. Используя гармонический анализ на сфере, ее можно представить в форме суммы скалярных произведений двух неприводимых тензоров [9]:

$$W=\sum_k(\varepsilon_k N_k)=\sum_k\sum_{\mu=-k}^{k}\varepsilon_{k\mu}N_{k\mu},\qquad N_{k\mu}=\int_S fY_{k\mu}\,ds \qquad (2.1)$$

где ε_k — неприводимый тензор, определяемый формой поверхности ротора; N_k — силовой тензор, зависящий от координат центра масс ротора, интенсивности источников поля и геометрии подвеса [10]; f — плотность поверхностных сил на невозмущенной сфере; $Y_{k\mu}$ — сферическая функция, определенная без множителя $[(2k+1)/(4\pi)]^{1/2}$.

Гармоника конкретного индекса k силовой функции (2.1) для осесимметричного ротора может быть представлена через углы (ρ,σ), характеризующие положение вектора кинетического момента в системе Y_n, и углы Эйлера ψ, θ, φ, определяющие положение ротора относительно системы координат, связанной с вектором кинетического момента [9] ($D_{\mu n}{}^{k}$ — обобщенная сферическая функция [11]):

$$W_k=(\varepsilon_k N_k)=\varepsilon_{k0}\sum_{\mu,n}D_{\mu n}{}^{k}(\sigma,\rho,0)D_{n0}{}^{k}(\psi,\theta,\varphi)N_{k\mu} \qquad (2.2)$$

Осредним (2.2) по свободному движению Эйлера — Пуансо, т. е. по углам φ, ψ:

$$\langle W_k\rangle_{\psi,\varphi}=\varepsilon_{k0}P_k(\cos\theta_0)\sum_{\mu}\overline{Y}_{k\mu}(\rho,\sigma)N_{k\mu} \qquad (2.3)$$

где $P_k(\cos\theta_0)$ — полином Лежандра, зависящий от угла нутации θ_0. Силовая функция (2.3) для каждого конкретного индекса k отвечает силовому взаимодействию конкретной формы ротора, осредненной по свободному движению, с полем подвеса; $k=1$ соответствует несовпадению центра масс с точкой приложения результирующей силы поля подвеса (дебаланс); $k=2$ — эллипсоидальности, $k=3$ — грушевидности и т. д.

Можно показать, что с точностью до квадратичных членов компоненты силового тензора $N_{k\mu}$ зависят от координат центра масс следующим образом (A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k, G_k — постоянные, $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица):

$$
\begin{aligned}
N_{k0} &= A_k + x_3 B_k + x_3^2 C_k + (x_1^2 + x_2^2) D_k \\
N_{k1} &= -{}^1/_2 [k(k+1)]^{1/2} (x_1 + i x_2)(E_k + x_3 F_k) \\
N_{k2} &= {}^1/_2 [(k+2)!/(k-2)!]^{1/2} (x_1 + i x_2)^2 G_k
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Если подвес имеет плоскость симметрии, то для четных индексов k $B_k=F_k=0$, а для нечетных $A_k=C_k=D_k=E_k=G_k=0$.

Подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$
\begin{aligned}
\langle W_k \rangle_{\varphi,\psi} &= \varepsilon_{k0} P_k(\cos\theta_0) \{ [A_k + x_3 B_k + x_3^2 C_k + \\
&+ (x_1^2 + x_2^2) D_k] P_k(\cos\rho) + P_k^1(\cos\rho)(x_1 \cos\sigma + x_2 \sin\sigma)(E_k + x_3 F) + \\
&+ P_k^2(\cos\rho) [(x_1^2 - x_2^2)\cos 2\sigma + 2 x_1 x_2 \sin 2\sigma] G_k \}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Коэффициенты A_k, $B_k \ldots G_k$ в (2.5) зависят от тока (в случае линейной среды они пропорциональны I^2), который в свою очередь, зависит от x_3 из-за регулирования. Будем считать, что ток не зависит от углового положения ротора и регулируется по закону $I=I_0-q(p)x_3$, где I_0 — опорный ток, $q(p)$ — передаточная функция регулятора от смещения к току. В (2.5) появятся дополнительные слагаемые

$$
A_k = A_k(I_0) - A_k^{(1)} q(p) x_3 + {}^1/_2 A_k^{(2)} (q x_3)^2
\tag{2.6}
$$

$$
B_k = B_k(I_0) - B_k^{(1)} q(p) x_3, \qquad E_k = E_k(I_0) - E_k^{(1)} q(p) x_3
$$

$$
A_k^{(1)} \equiv (\partial A_k / \partial I)\,|_{I=I_0}\; A_k^{(2)} \equiv (\partial^2 A_k / \partial I^2)\,|_{I=I_0}
$$

где $B_k^{(1)}$ и $E_k^{(1)}$ вычисляются аналогично $A_k^{(1)}$.

Коэффициенты C_k, D_k, F_k, G_k в (2.5) следует считать зависящими лишь от I_0. После подстановки (2.6) в (2.5) получается усредненная по быстрому вращению силовая функция с явной зависимостью от поступательных координат x_n.

Различие влияния на уходы гироскопа постоянных и переменных ускорений состоит в том, равны нулю или нет средние значения тех или иных слагаемых в (2.5), (2.6). При постоянных ускорениях $x_{n0} \neq 0$ есть статические решения уравнений для поступательных координат. В случае вибраций ненулевые средние в (2.5), (2.6) дают, очевидно, квадратичные члены. Из-за нелинейности отклика x_n на вибрацию могут быть не равными нулю и $\langle x_n \rangle$. Их вычисление в общем виде не представляется возможным и требует полной конкретизации нелинейных уравнений для x_n. Если же ограничиться линейными уравнениями, то задачу можно решить до конца и выразить средние по периоду внешней силы слагаемые в (2.5), (2.6) через ускорения. В дальнейшем в выражениях моментов будем употреблять символ усреднения (треугольные скобки).

Подставляя (2.5), (2.6) в (1.4), запишем уравнения движения вектора кинетического момента

$$
\begin{aligned}
\rho^{\cdot} &= -(H \sin\rho)^{-1} \sum_k \varepsilon_{k0} P_k(\cos\theta_0) \{ P_k^1(\rho) [(\langle x_2 \rangle E_k - \langle x_2 q x_3 \rangle E_k^{(1)} + \\
&+ \langle x_2 x_3 \rangle F_k) \cos\sigma - (\langle x_1 \rangle E_k - \langle x_1 q x_3 \rangle E_k^{(1)} + \langle x_1 x_3 \rangle F_k) \sin\sigma] + \\
&+ 2 P_k^2(\rho) G_k [(\langle x_2^2 \rangle - \langle x_1^2 \rangle) \sin 2\sigma + 2 \langle x_1 x_2 \rangle \cos 2\sigma] \}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\sigma^{\cdot} = (H \sin\rho)^{-1} \sum_k \varepsilon_{k0} P_k(\cos\theta_0) \{ [A_k - \langle q x_3 \rangle A_k^{(1)} + \langle (q x_3)^2 \rangle A_k^{(2)}\, {}^1/_2 +
$$

$$+\langle x_3\rangle B_k-\langle x_3qx_3\rangle B_k^{(1)}+\langle x_3^2\rangle C_k+(\langle x_1^2\rangle+\langle x_2^2\rangle)D_k]\,\partial P_k/\partial\rho+$$

$$+[(\langle x_1\rangle E_k-\langle x_1qx_3\rangle E_k^{(1)}+\langle x_1x_3\rangle F_k)\cos\sigma+(\langle x_2\rangle E_k-\langle x_2qx_3\rangle E_k^{(1)}+$$
$$+\langle x_2x_3\rangle F_k)\sin\sigma]\,\partial P_k^1(\rho)/\partial\rho+G_k[(\langle x_1^2\rangle-\langle x_2^2\rangle)\cos 2\sigma+2\langle x_1x_2\rangle\times$$
$$\times\sin 2\sigma]\,\partial P_k^2(\rho)/\partial\rho\}$$

В отсутствие поперечных по отношению к оси симметрии подвеса внешних сил $x_1=x_2=0$ и движение гироскопа представляет собой круговую прецессию $\rho=\mathrm{const}$, $\sigma^{\cdot}(\rho)=\mathrm{const}$. При наличии поперечных сил x_1, $x_2\neq 0$, траектория трансформируется из круговой в более сложную кривую, ее центр не совпадает с осью симметрии подвеса и скорость движения вдоль траектории не остается постоянной. Для практики представляет интерес поведение гироскопа в таком режиме, когда угол между осью симметрии подвеса и вектором кинетического момента мал. Преобразуем (2.5) к углам Резаля, ограничиваясь вторым порядком малости. Углы Резаля определим поворотом на угол α вокруг оси Y_1 и поворотом на угол β вокруг новой оси Y_2. Тогда, учитывая, что связь между углами ρ, σ и α, β дается формулами $\sin\rho\cos\sigma=\sin\beta$, $\sin\rho\sin\sigma=-\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\rho=\cos\alpha\cos\beta$, найдем

$$P_k=1-{}^1/_4(k+1)k(\alpha^2+\beta^2)+\ldots \tag{2.8}$$
$$Y_{k1}=-{}^1/_2[k(k+1)]^{1/2}(\beta-i\alpha)+\ldots$$
$$Y_{k2}={}^1/_8[(k-2)!/(k+2)!]^{1/2}(\beta-i\alpha)^2+\ldots$$

Подставляя (2.8) в (2.3), суммируя по k и учитывая (2.6), найдем

$$\langle W\rangle=-{}^1/_2(\alpha^2+\beta^2)[A-\langle qx_3\rangle A^{(1)}+{}^1/_2\langle(qx_3)^2\rangle A^{(2)}+\langle x_3\rangle B-\langle x_3qx_3\rangle B^{(1)}+$$
$$+\langle x_3^2\rangle C+(\langle x_1^2\rangle+\langle x_2^2\rangle)D]+(\langle x_1\rangle\beta-\langle x_2\rangle\alpha)E+(\langle x_2qx_3\rangle\alpha-\langle x_1qx_3\rangle\beta)E^{(1)}+$$
$$+(\langle x_1x_2\rangle\beta-\langle x_2x_3\rangle\alpha)F+{}^1/_2(\langle x_1^2\rangle-\langle x_2^2\rangle)(\beta^2-\alpha^2)G-2\langle x_1x_2\rangle\alpha\beta G \tag{2.9}$$

$$A={}^1/_2\sum_k k(k+1)A_k\varepsilon_{k0}P_k(\cos\theta_0)$$

$$G={}^1/_4\sum_k(k-1)k(k+1)(k+2)G_k\varepsilon_{k0}P_k(\cos\theta_0)$$

где $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, B, $B^{(1)}$, C, D, E, F определяются выражениями, аналогичными A. Если силовая функция (2.9) описывает только дебаланс ($k=1$), то $G=0$.

Уходы гироскопа в окрестности оси симметрии подвеса определяются из уравнений

$$\alpha^{\cdot}=H^{-1}\partial\langle W\rangle/\partial\beta,\ \beta^{\cdot}=-H^{-1}\partial\langle W\rangle/\partial\alpha \tag{2.10}$$

Здесь $\langle\ \rangle$ — усреднение силовой функции как по свободному движению Эйлера — Пуансо, так и по периоду вынуждающей силы. Учитывая (2.9), можно представить (2.10) в виде

$$H\alpha^{\cdot}=-K_\beta\beta-S\alpha+\chi_1,\ H\beta^{\cdot}=K_\alpha\alpha+S\beta+\chi_2 \tag{2.11}$$

$$K_{\beta,\alpha}=A-A^{(1)}\langle qx_3\rangle+{}^1/_2A^{(2)}\langle(qx_3)^2\rangle+B\langle x_3\rangle-$$
$$-B^{(1)}\langle x_3qx_3\rangle+C\langle x_3^2\rangle+(D\pm G)\langle x_1^2\rangle+(D\mp G)\langle x_2^2\rangle$$
$$S=2G\langle x_1x_2\rangle,\ \chi_\lambda=E\langle x_\lambda\rangle+F\langle x_\lambda x_3\rangle-E^{(1)}\langle x_\lambda qx_3\rangle$$

Анализ влияния постоянных ускорений и вибраций на уходы гироскопа в окрестности оси симметрии подвеса позволяет сделать следующие выводы.

Как и при отсутствии ускорений, прецессионные движения вектора кинетического момента остаются незатухающими, однако период прецессии зависит от ускорений. Из круговой прецессия становится эллиптической, частота которой равна $\omega=H^{-1}(K_\alpha K_\beta-S^2)^{1/2}$. Исключение составляет случай, когда силовая функция определяется только дебалансом ротора. Тогда $G=0$ и из (2.11) следует, что $K_\alpha=K_\beta$ и прецессия круговая.

При большой величине коэффициента S ($S^2 > K_\alpha K_\beta$) состояние равновесия типа «центр» сменяется на состояние равновесия типа «седло».

При работе прибора в режиме слежения осью подвеса за осью ротора (идеальное слежение $\alpha=\beta=0$), моменты, зависящие от углов α, β, исключаются и уходы определяются моментами χ_λ. Если слежение неидеальное, то величина допустимого ухода из-за угловых жесткостей определяет требование к точности следящей системы при заданном периоде прецессии или, наоборот, при заданной точности следящей системы к величине периода прецессии.

Уход, определяемый моментами χ_λ, линейно и квадратично зависит от величин x_n. Уход от квадратичных составляющих отсутствует, если ускорения направлены вдоль оси подвеса или перпендикулярно к ней.

Допустимые смещения ротора в подвесе ограничены и меньше, чем величина зазоров. Лимитируемые смещениями ротора постоянные ускорения определяют допустимую статическую перегрузку прибора. В условиях вибраций смещения не должны превосходить статических значений. Поэтому из-за осреднения уходы, вызванные вибрациями, не превосходят уходов от постоянных ускорений при предельно допустимых перегрузках.

Уходы на разных частотах вибраций зависят от отклика системы на ускорения. К примеру, если система слабо демпфирована по поступательным степеням свободы, то в окрестности собственных частот колебаний тела даже при малых ускорениях имеют место большие смещения и, следовательно, уход велик. Наоборот, на высоких частотах, при которых в полной мере проявляются фильтрующие свойства подвеса, отклик мал и на большие ускорения, поэтому уход тоже мал.

В выражениях χ_λ и S содержатся члены, зависящие от смещений вдоль разных осей. При вибрациях возможны такие фазовые сдвиги, что $\langle x_n x_\lambda \rangle = 0$.

Компоненты силового тензора $N_{k\mu}$ являются функциями положения центра масс ротора $\mathbf{R}$ относительно начала опорной системы координат X_n, связанной с подвесом. Во многих задачах необходимо уметь разлагать компоненты тензора в ряд по смещениям центра масс, не нарушая его трансляционных свойств. Для решения этой задачи получим вначале разложение оператора трансляции $e^{\mathbf{R}\nabla}$. Воспользуемся известным разложением плоской волны $e^{i(\mathbf{kr})}$ в ряд по сферическим функциям

$$e^{i(\mathbf{kr})} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(\mathbf{kr}) \left(Y_l(\mathbf{k}) Y_l(\mathbf{r})\right) \qquad \text{(I)}$$

Используя этот ряд, формально получаем

$$e^{i(-i\mathbf{R}\nabla)} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(-i\mathbf{R}\nabla) \left(Y_l(\mathbf{R}) Y_l(\nabla)\right) \qquad \text{(II)}$$

Подставляя в (II) разложение функции Бесселя

$$j_l(x) = 2^l x^l \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda (\lambda+l)!}{\lambda!(2\lambda+2l+1)!} x^{2\lambda}$$

в котором $x \to -i\mathbf{R}\nabla$, имеем

$$e^{\mathbf{R}\nabla} = \sum_{l,m,\lambda} 2^l \frac{(\lambda+l)!(2l+1)}{\lambda!(2\lambda+2l+1)!} R^{2\lambda+l} Y_{lm}(\mathbf{R}) \nabla^{2\lambda+l} Y_{lm}(\nabla).$$

Введем обозначения $R^l Y_{lm}(\mathbf{R}) = J_{lm}(\mathbf{R})$, $\nabla^l Y_{lm}(\nabla) = J_{lm}(\nabla)$ — гармонический полином степени l. Тогда

$$e^{\mathbf{R}\nabla} = \sum_{l,m,\lambda} 2^l \frac{(\lambda+l)!(2l+1)}{\lambda!(2\lambda+2l+1)!} R^{2\lambda} J_{lm}(\mathbf{R}) \bar{J}_{lm}(\nabla) \nabla^{2\lambda} \qquad \text{(III)}$$

Если оператор применяется к гармонической функции Φ, то так как $\nabla^2\Phi=0$, то в сумме (III) $\lambda=0$ и оператор трансляции упрощается.

Рассмотрим силовой тензор N_k: $N_{k\mu} = \int_S f(\mathbf{R}+\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds$, где интегрирование идет по поверхности сферы радиуса a, $\mathbf{r}$ — текущий радиус точек сферы.

Применим оператор трансляции к функции $f(\mathbf{R}+\mathbf{r})$. Имеем

$$f(\mathbf{R}+\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{R}\nabla)} f(\mathbf{r}) = \sum_{l,m,\lambda} 2^l \frac{(\lambda+l)!(2l+1)}{\lambda!(2\lambda+2l+1)!} R^{2\lambda} J_{lm}(\mathbf{R}) \bar{J}_{lm}(\nabla) \nabla^{2\lambda} f(\mathbf{r})$$

Подставляя это выражение в интеграл, получаем

$$N_{k\mu} = \sum_{l,m,\lambda} 2^l \frac{(\lambda+l)!(2l+1)}{\lambda!(2\lambda+2l+1)!} R^{2\lambda} J_{lm}(\mathbf{R}) \int_S J_{lm}(\nabla) \nabla^{2\lambda} f(\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds \qquad \text{(IV)}$$

В силу осевой симметрии подвеса плотность поверхности сил является функцией только от сферического угла θ, поэтому интеграл в сумме не равен нулю только в случае, когда индексы m и μ равны. Поэтому окончательное разложение N_k имеет вид

$$N_{k\mu} = \sum_{l,\lambda} 2^l \frac{(\lambda+l)!(2l+1)}{\lambda!(2\lambda+2l+1)!} R^{2\lambda} J_{l\mu}(\mathbf{R}) \int_S J_{l\mu}(\nabla) \nabla^{2\lambda} f(\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds \qquad \text{(V)}$$

С точностью до квадратичных членов (V) запишется

$$N_{k\mu} = \int_S f(\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds + J_{1\mu}(\mathbf{R}) \int_S \bar{J}_{1\mu}(\nabla) f(\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds + {}^1/_3 J_{2\mu}(\mathbf{R}) \int_S \bar{J}_{2\mu}(\nabla) f(\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds + {}^1/_6 R^2 \int_S \nabla^2 f(\mathbf{r}) Y_{k\mu}\, ds \qquad \text{(VI)}$$

Полагая в (VI) $\mu=0, 1, 2$, получаем формулы (2.4), где

$$A_k = \int_S f(\mathbf{r}) P_k\, ds, \qquad B_k = \int_S \nabla_{x_3} f(\mathbf{r}) P_k\, ds$$

$$C_k = {}^1/_2 \int_S \nabla_{x_3}^2 f(\mathbf{r}) P_k\, ds, \qquad D_k = {}^1/_4 \int_S (\nabla^2 - \nabla_{x_3}^2) f(\mathbf{r}) P_k\, ds$$

$$E_k = \int_S (\nabla_{x_1} - i\nabla_{x_2}) f(\mathbf{r}) Y_{k1}\, ds$$

$$F_k = \int_S \nabla_{x_3} (\nabla_{x_1} - i\nabla_{x_2}) f(\mathbf{r}) Y_{k1}\, ds$$

$$G_k = {}^1/_4 \int_S (\nabla_{x_1} - i\nabla_{x_2})^2 f(\mathbf{r}) Y_{k2}\, ds$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко Ю. Г., Савченко Т. А.* Резонансные движения гироскопа с неконтактным подвесом на вибрирующем основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 16—23.
2. *Савченко Т. А.* Резонансные движения гироскопа с неконтактным подвесом при двухкомпонентной вибрации основания // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 9—16.
3. *Медведев А. В.* Динамика углового движения неконтактного гироскопа при случайной вибрации основания // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1985. № 1. С. 70—74.
4. *Урман Ю. М.* Уводящие моменты, вызываемые несферичностью ротора, в подвесе с аксиально-симметричным полем // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 24—31.
5. *Денисов Г. Г., Комаров В. Н.* О траекториях гироскопа с осесимметричным подвесом ротора при учете вращения Земли // Изв. вузов. Приборостроение. 1975. Т. 18. № 5. С. 88—92.
6. *Линьков Р. В., Урман Ю. М.* Уход неконтактного гироскопа в окрестности оси мира // Изв. вузов. Приборостроение. 1982. Т. 25. № 4. С. 56—59.
7. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
8. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем // М.: Изд-во МГУ, 1971. 500 с.
9. *Урман Ю. М.* Неприводимые тензоры и их применение в задачах движения твердого тела в силовых полях // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1983. Вып. 15. С. 75—87.
10. *Денисов Г. Г., Урман Ю. М.* Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию // Изв. АН СССР. МТТ. 1975, № 6, с. 5—14.
11. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.

Горький

Поступила в редакцию 9.VII.1986