МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

УДК 531.8

АКТИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ЗВЕНА

ГОРИНЕВСКИЙ Д. М., ЗВЯГИНА Т. Ю.

Рассматривается система, состоящая из инерционного привода, осуществляющего поворот невесомого упругого звена с грузом на конце. Такая модель описывает движение манипулятора с упругим звеном при учете только первой моды колебаний. Сходные уравнения движения имеет еще ряд механических систем [1, 2]. Это, например, математический маятник на управляемом массивном основании – модель грузоподъемной машины [1]. Отклонение груза от вертикали соответствует деформации звена, а перемещение основания – углу поворота двигателя. Другая система, имеющая похожие уравнения движения – сосуд с массивной жидкостью на перемещающемся основании, если в такой системе рассматривать лишь первую моду колебаний [2]. Деформации звена в этом случае соответствует отклонение поверхности жидкости от горизонтали, а углу поворота двигателя – перемещение основания.

Исследуется задача синтеза регулятора, обеспечивающего быстрое демпфирование колебаний в системе. В случае линейной обратной связи применима техника аналитического конструирования регуляторов [3]. При этом критерий качества работы регулятора задается через квадратичный по переменным состояния функционал. Этот функционал подбирают так, чтобы получившийся регулятор обеспечивал заданную скорость затухания колебаний [4]. В публикуемой работе изучается задача выбора коэффициентов обратной связи, обеспечивающих заданный запас устойчивости системы (заданную скорость затухания колебаний). Эта задача решается на основе исследования неравенств Гурвица.

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из неподвижно закрепленного электродвигателя с редуктором, осуществляющего поворот невесомого упругого звена. На конце звена закреплен груз.

Будем рассматривать задачу гашения колебаний упругого звена без стабилизации его конечного положения. При такой постановке задачи порядок рассматриваемой системы уравнений понижается и она допускает более полное исследование.

Для составления уравнений воспользуемся вторым методом Лагранжа. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы:

$$T={}^1/_2J\varphi^{\cdot 2}+{}^1/_2J_1(\varphi^\cdot+x^\cdot)^2,\qquad \Pi={}^1/_2Cx^2 \tag{1.1}$$

где φ – угол поворота звена, задаваемый приводом, x – разность между углом поворота, задаваемого приводом, и углом поворота радиуса-вектора груза, возникающая в результате упругой податливости звена, J – общий приведенный момент инерции двигателя с редуктором, J_1 – момент инерции звена с грузом, C – жесткость звена. Запишем обобщенную силу, действующую по координате φ, в пренебрежении индуктивностью якоря электродвигателя [5]:

$$Q_1=M-\beta\varphi^\cdot \tag{1.2}$$

Здесь $\beta\varphi^\cdot$ – момент сопротивления, вызванный противоэлектродвижущей силой, M – управляющий момент, создаваемый приводом. Управляющий момент будем формировать в результате линейной обратной связи по измеряемым параметрам: угловой скорости $\varphi^\cdot$, деформации звена x и скорости деформации $x^\cdot$ (k, $\varkappa$ и β_1 – постоянные величины):

$$M=kx+\varkappa x^\cdot-\beta_1\varphi^\cdot \tag{1.3}$$

Угловую скорость вращения привода $\varphi^{\cdot}$ можно измерить с помощью тахогенератора, жестко соединенного с двигателем. Угловое перемещение x пропорционально деформации в некоторой точке звена, которую можно измерить, например, с помощью тензорезисторов. Для получения сигнала о скорости деформации $x^{\cdot}$ необходимо дифференцирование сигнала о деформации. В соответствии с (1.1)—(1.3) уравнения движения имеют вид

$$(J+J_1)\varphi^{\cdot\cdot}+(\beta+\beta_1)\varphi^{\cdot}+J_1x^{\cdot\cdot}-\varkappa x^{\cdot}-kx=0$$
$$J_1\varphi^{\cdot\cdot}+J_1x^{\cdot\cdot}+Cx=0 \tag{1.4}$$

Обозначим

$$\zeta=(\beta+\beta_1)[\Omega(J+J_1)]^{-1},\ \mu=J_1(J+J_1)^{-1}$$
$$\xi=k[\Omega^2(J+J_1)]^{-1},\quad \Omega^2=CJ_1^{-1} \tag{1.5}$$
$$\eta=\varkappa[\Omega^2(J+J_1)]^{-1},\quad \tau=\Omega t$$

Здесь безразмерные коэффициенты обратной связи: ζ — по угловой скорости вращения, задаваемого приводом; ξ — по деформации звена, η — по скорости деформации; μ — отношение момента инерции звена с грузом к моменту инерции всей системы ($0<\mu<1$), Ω — круговая частота собственных колебаний звена с грузом при жестко закрепленном двигателе. Примем в качестве единицы измерения времени $\Theta/(2\pi)$, где Θ — период свободных колебаний звена с грузом при жестко закрепленном двигателе. Обозначим D оператор дифференцирования по безразмерному времени τ.

Преобразованные в соответствии с (1.5) уравнения движения (1.4) примут вид

$$(D+\zeta)\omega+(\mu D^2-\eta D-\xi)x=0$$
$$D\omega+(D^2+1)x=0,\ \omega=d\varphi/d\tau$$

Запишем характеристическое уравнение системы

$$P(z)=(1-\mu)z^3+(\zeta+\eta)z^2+(1+\xi)z+\zeta=0 \tag{1.6}$$

Корни характеристического уравнения можно представить в виде $z=-\delta_k+iw_k$, где δ_k и w_k — действительные числа. Будем искать запас устойчивости системы $\delta=\min_k\delta_k$ [6] по Цыпкину — Бромбергу. Эта величина характеризует скорость затухания колебаний в системе. Найдем δ из условия, что после замены $z=w-\delta$ хотя бы один из корней характеристического уравнения (1.6) будет находиться на мнимой оси, а остальные слева от нее. Подставив $z=w-\delta$ в (1.6), получим

$$P_1(w)=a_3w^3+a_2w^2+a_1w+a_0=0 \tag{1.7}$$
$$a_0=-(1-\mu)\delta^3+(\zeta+\eta)\delta^2-(1+\xi)\delta+\zeta$$
$$a_1=3(1-\mu)\delta^2-2(\zeta+\eta)\delta+(1+\xi)$$
$$a_2=-3(1-\mu)\delta+(\zeta+\eta),\ a_3=1-\mu$$

Условия Гурвица для уравнения (1.7) имеют вид

$$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3>0 \tag{1.8}$$
$$\Delta_1=3(1-\mu)\delta^2-2(\zeta+\eta)\delta+(1+\xi)$$
$$\Delta_2=-8(1-\mu)^2\delta^3+8(1-\mu)(\zeta+\eta)\delta^2-2[(1+\xi)(1-\mu)+$$
$$+(\zeta+\eta)^2]\delta+[\zeta(\xi+\mu)+\eta(1+\xi)]$$
$$\Delta_3=-(1-\mu)\delta^3+(\zeta+\eta)\delta^2-(1+\xi)\delta+\zeta$$

В пространстве ξ, η, ζ, μ неравенства (1.8) определяют открытую область, во всех точках которой запас устойчивости больше δ. Граница этой области при фиксированном δ — поверхность равной δ-устойчивости [6]. Эта область лежит выше плоскости $\Delta_1=0$, выше поверхности второго порядка $\Delta_2=0$ и выше плоскости $\Delta_3=0$.

Рассмотрим при фиксированных μ, δ и η зависимость ξ от ζ. Плоскости $\Delta_1=0$, $\Delta_3=0$ и поверхность $\Delta_2=0$ дают следующие зависимости соответственно:

$$\xi=f_1(\zeta)=2(\zeta+\eta)\delta-3(1-\mu)\delta^2-1 \tag{1.9}$$

$$\xi=f_3(\zeta)=(\delta+1/\delta)\zeta-(1-\mu)\delta^2-1+\delta\eta \tag{1.10}$$

$$\xi=f_2(\zeta)=2\delta\zeta-(1-\mu)(4\delta^2-1)+2\eta\delta-$$
$$-1-(1-\mu)[\eta-2(1-\mu)\delta](\zeta+[\eta-2(1-\mu)\delta])^{-1} \tag{1.11}$$

При $\eta-2(1-\mu)\delta<0$, в частности при $\eta=0$, правая ветвь гиперболы $\xi=f_2(\zeta)$ лежит выше наклонной асимптоты. При $\eta-2(1-\mu)\delta>0$ правая ветвь гиперболы $\xi=f_2(\zeta)$ лежит ниже наклонной асимптоты. Асимптотами гиперболы (1.11) будут прямые

$$\xi=2\delta\zeta-(1-\mu)(4\delta^2-1)-1+2\eta\delta \tag{1.12}$$

$$\zeta=2(1-\mu)\delta-\eta \tag{1.13}$$

Из условий устойчивости (1.8) видно, что ветвь гиперболы $\xi=f_2(\zeta)$ (1.11), находящаяся левее асимптоты (1.13), всегда находится в зоне неустойчивости, а ветвь гиперболы (1.11), находящаяся правее асимптоты (1.13), при $2(1-\mu)\delta-\eta>0$ находится в зоне устойчивости, а при $2(1-\mu)\delta-\eta\leqslant0$ пересекает эту область. Поэтому будем рассматривать лишь ветвь гиперболы (1.11), находящуюся правее асимптоты (1.13).

При $\eta-2(1-\mu)\delta\leqslant0$ функция $\xi=f_2(\zeta)$ имеет экстремум. Обозначим $\xi_0=\min_\zeta f_2(\zeta)$ и $\zeta_0=\operatorname{argmin} f_2(\zeta)$, а также через (ζ_1, ξ_1) и (ζ_2, ξ_2) $(\zeta_1<\zeta_2)$ точки пересечения гиперболы (1.11) и прямой (1.10).

Область, в которой действительные части корней характеристического уравнения (1.7) по абсолютной величине больше δ, при фиксированных δ, μ и η представляет собой сегмент, отсеченный на ветви гиперболы (1.11) прямой (1.10) и лежащий выше гиперболы (1.11) и ниже прямой (1.10). Эта область должна также лежать выше прямой (1.9).

Будем искать при заданном запасе устойчивости δ такие коэффициенты обратной связи по скорости $\zeta=\zeta^*$, по деформации $\xi=\xi^*$ и по скорости деформации $\eta=\eta^*$, чтобы

$$\rho_\delta(\eta^*, \xi^*)=\min_{\eta,\xi}\rho_\delta(\eta, \xi),\ \rho_\delta(\eta, \xi)=|\xi|+|\eta| \tag{1.14}$$

Соответствующие коэффициенты назовем оптимальными. В некоторых случаях минимальное значение величины $|\xi|+|\eta|$ может достигаться при нескольких значениях ζ. При этом за ζ^* будем принимать минимальное из этих значений.

Чтобы получить сигнал о скорости деформации, нужно дифференцировать сигнал о деформации, при этом усиливаются высокочастотные шумы. Поэтому интересно рассмотреть случай отсутствия обратной связи по скорости деформации, т. е. случай $\eta=0$. В п. 2 рассмотрен случай $\eta=0$, при этом «оптимальными» считаются коэффициенты обратной связи по угловой скорости $\zeta=\zeta*$ и деформации $\xi=\xi*$, минимизирующие $\rho_\delta(\eta, \xi)$. Из всех возможных при этом значений $\zeta*$ выбрано минимальное. Таким образом

$$\rho_\delta(0, \xi*)=\min_\xi \rho_\delta(0, \xi) \tag{1.15}$$

Такой выбор критерия оптимальности коэффициентов обратной связи объясняется тем, что угловая скорость измеряется с помощью тахогенератора, жестко соединенного с двигателем, и поэтому коэффициент обратной связи по угловой скорости может быть велик. На сигналы о деформации и о скорости деформации влияют шумы; здесь существует погрешность измерения. Она проявится тем сильнее, чем больше соответствующие коэффициенты обратной связи.

В условие оптимальности (1.14) абсолютные величины безразмерных коэффициентов обратной связи по деформации ξ и скорости деформации η входят с единичными коэффициентами. Такой выбор весовых коэффициентов определяется тем, что наиболее существенны шумы с частотой, равной собственной частоте колебаний системы (с единичной безразмерной частотой).

2. Рассмотрим сначала случай, когда обратная связь по производной от деформации отсутствует, т. е. $\eta=0$. При $\eta=0$ и фиксированных δ и μ из (1.11) получим

$$\xi=f_2(\zeta)=2\delta\zeta-(1-\mu)(4\delta^2-1)-1+[2(1-\mu)^2\delta][\zeta-2(1-\mu)\delta]^{-1} \tag{2.1}$$

Асимптоты гиперболы (2.1) есть

$$\begin{gathered}\xi=2\delta\zeta-(1-\mu)(4\delta^2-1)-1\\ \zeta=2(1-\mu)\delta\end{gathered} \tag{2.2}$$

Уравнения прямых (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\xi=f_1(\zeta)=2\zeta\delta-3(1-\mu)\delta^2-1 \tag{2.3}$$

$$\xi=f_3(\zeta)=\zeta(\delta+1/\delta)-(1-\mu)\delta^2-1 \tag{2.4}$$

Будем искать при $\eta=0$ оптимальные в смысле (1.15) коэффициенты обратной связи по скорости и деформации ($\zeta*$, $\xi*$).

1. При $0<\delta\leqslant 1$ наклон асимптоты (2.2) меньше или равен наклону прямой (2.4) и $\zeta_2<\zeta_0$. Область, в которой вещественные части корней характеристического уравнения (1.6) по абсолютной величине больше δ, неограничена. Таким образом, $\xi*=\xi_0$ при $\xi_0\geqslant 0$; $\xi*=0$ при $\xi_0\leqslant 0$.

Оптимальной будет точка (ζ_0, ξ_0) при $\xi_0\geqslant 0$, точка пересечения гиперболы (2.1) с осью $O\zeta$ при $\xi_2\geqslant 0$ и точка пересечения прямой (2.4) с осью $O\zeta$ при $\xi_2<0$. Таким образом, при $0<\delta\leqslant 1$:

$$\begin{gathered}\xi*=0,\ 0<(1-\mu)\leqslant(4\delta+1)^{-1}\\ \xi*=(1-\mu)(4\delta+1)-1,\ (4\delta+1)^{-1}<(1-\mu)<1\\ \zeta*=\delta[(1-\mu)\delta^2+1](\delta^2+1)^{-1},\ 0<(1-\mu)\leqslant(2\delta^2+3)^{-1}\\ \zeta*=2(1-\mu)\delta+\mu(4\delta)^{-1}-[(\mu/4\delta)^2-(1-\mu)^2]^{1/2}\\ (2\delta^2+3)^{-1}\leqslant(1-\mu)<(4\delta+1)^{-1}\\ \zeta*=(1-\mu)(2\delta+1),\ (4\delta+1)^{-1}\leqslant(1-\mu)<1\end{gathered} \tag{2.5}$$

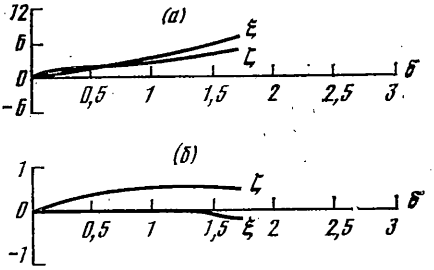
2. При $1<\delta\leqslant\sqrt{3}$ будет $\zeta_0<\zeta_1$, а наклон асимптоты (2.2) больше, чем наклон прямой (2.4). Область δ-устойчивости ограничена — это сегмент, отсеченный прямой (2.4) на ветви гиперболы (2.1). Таким образом, $\xi*=\xi_1$ при $\xi_1\geqslant 0$, $\xi*=0$ при $\xi_1<0$, $\xi_2\geqslant 0$ и $\xi*=\xi_2$ при $\xi_2<0$.

Оптимальной будет точка (ζ_1, ξ_1) при $\xi_1\geqslant 0$, точка пересечения прямой (2.4) с осью $O\zeta$ при $\xi_1<0$ и $\xi_2\geqslant 0$, точка (ζ_2, ξ_2) при $\xi_2<0$. Итак, при $1<\delta\leqslant\sqrt{3}$:

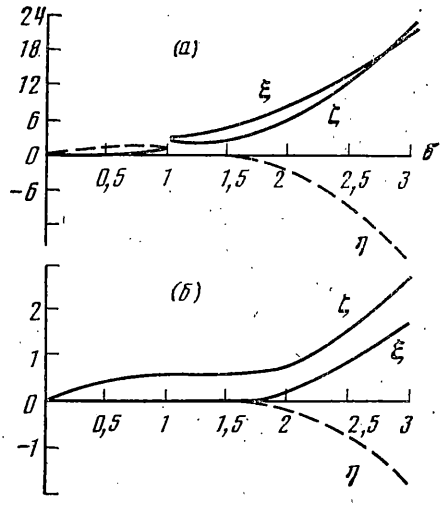
$$\begin{gathered}\xi*=(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)(\delta^2-1)^{-1}-1,\ 0<(1-\mu)<(\delta^2-1)[\delta^2(\delta^2+3)]^{-1}\\ \xi*=0,\ (\delta^2-1)[\delta^2(\delta^2+3)]^{-1}\leqslant(1-\mu)\leqslant(2\delta^2+3)^{-1}\\ \xi*=(1-\mu)(2\delta^2+3)-1,\ (2\delta^2+3)^{-1}<(1-\mu)<1\\ \zeta*=2(1-\mu)\delta^3(\delta^2-1)^{-1},\ 0<(1-\mu)<(\delta^2-1)[\delta^2(\delta^2+3)]^{-1}\\ \zeta*=[(1-\mu)\delta^2+1]\delta(\delta^2+1)^{-1},\ (\delta^2-1)[\delta^2(\delta^2+3)]^{-1}\leqslant\\ \leqslant(1-\mu)\leqslant(2\delta^2+3)^{-1}\\ \zeta*=3(1-\mu)\delta,\ (2\delta^2+3)^{-1}\leqslant(1-\mu)<1\end{gathered} \tag{2.6}$$

3. При $\delta>\sqrt{3}$ точка пересечения гиперболы (2.1) и прямой (2.3) совпадает с (ζ_1, ξ_1) — точкой пересечения гиперболы (2.1) с прямой (2.4), а наклон прямой (2.4) в этом случае меньше, чем наклон прямой (2.3). Следовательно, в этом случае условия Гурвица (1.8) несовместны. Значит, при выбранном законе управления, в отсутствие обратной связи по скорости деформации, запас устойчивости системы всегда меньше $\sqrt{3}$.

Итак, оптимальные коэффициенты обратной связи, в отсутствие обратной связи по скорости деформации, даны выражениями (2.5) и (2.6). Графики зависимости этих коэффициентов от запаса устойчивости δ приведены на фиг. 1 (*а*—μ=0,1, *б* — μ=0,9 — это случаи, когда инерция привода соответственно на порядок больше и на порядок меньше инерции звена).



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Пусть теперь коэффициент обратной связи по скорости деформации η не равен нулю. Будем искать оптимальные в смысле (1.14) коэффициенты (ζ^*, ξ^*, η^*). Сначала фиксируем δ, μ и η, при этом выберем оптимальные коэффициенты (ζ^*, ξ^*) так, чтобы абсолютная величина коэффициента обратной связи по деформации ξ была минимальна. В результате найдем $\xi^*=\xi^*(\eta)$. После этого будем искать ξ^* и η^* из условия (1.14). При этом $\rho(\eta^*, \xi^*)=\min_\eta \rho(\eta, \xi^*(\eta))$.

Обозначим $\eta_1=(1-\mu)\delta(3-\delta^2)$ и $\eta_2=2(1-\mu)\delta(1-\delta^2)$. При $\eta=\eta_1$, $\zeta_1=\zeta_2$ и $\xi_1=\xi_2$ прямая (1.10) касается гиперболы (1.11). При $\eta<\eta_2$ точка (ζ_1, ξ_1) пересечения прямой (1.10) и гиперболы (1.11) лежит левее вершины гиперболы (ζ_0, ξ_0), всегда $\eta_2<\eta_1$.

Исследование области, в которой вещественные части корней уравнения (1.6) по абсолютной величине не больше δ, проводится аналогично исследованию этой области при $\eta=0$ в п. 2.

При $\eta-2(1-\mu)\delta>0$ искомая область всегда неограничена и, следовательно, в зависимости от положения точки (ζ_2, ξ_2) оптимальной будет точка (ζ_2, ξ_2), если $\xi_2\geqslant 0$, и точка пересечения прямой (1.10) с осью 0ζ, если $\xi_2<0$. При $\eta-2(1-\mu)\delta\leqslant 0$ область δ-устойчивости не ограничена в случае $\delta\leqslant 1$ (наклон асимптоты (1.12) меньше наклона прямой (1.10)) и ограничена при $\delta>1$. Рассуждая аналогично, можно найти положение оптимальной точки в этих случаях.

Выпишем зависимость ξ^* от η. Рассмотрим сначала случай $\delta\geqslant 1$. Тогда, при $(1-\mu)\geqslant(3\delta^2)^{-1}$:

$$\begin{gathered}\xi^*=-\mu+2[2\delta(1-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]]^{1/2}, \quad \eta\leqslant\eta_2 \\ \xi^*=-\eta/\delta+(1-\mu)(2\delta^2+3)-1, \quad \eta_2<\eta\leqslant\eta_1\end{gathered} \tag{3.1}$$

При $(4\delta^2+1)^{-1}\leqslant(1-\mu)<(3\delta^2)^{-1}$:

$$\begin{gathered}\xi^*=-\mu+2\{2\delta(1-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]\}^{1/2}, \quad \eta<\eta_2 \\ \xi^*=-\eta/\delta+(1-\mu)(2\delta+3)-1, \quad \eta_2\leqslant\eta\leqslant\delta[(1-\mu)(2\delta^2+3)-1] \\ \xi^*=0, \quad \delta[(1-\mu)(2\delta^2+3)-1]\leqslant\eta\leqslant{}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta] \\ \xi^*=-2\eta\delta(\delta^2-1)^{-1}+(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)(\delta^2-1)^{-1}-1 \\ {}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\leqslant\eta\leqslant\eta_1\end{gathered} \tag{3.2}$$

При $0<(1-\mu)\leqslant(4\delta^2+1)^{-1}$:

$$\begin{gathered}\xi^*=-\mu+2\{2\delta(1-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]\}^{1/2}, \\ \eta\leqslant 2\delta(1-\mu)-\mu^2[8\delta(1-\mu)]^{-1} \\ \xi^*=0, \quad 2\delta(1-\mu)-\mu^2[8\delta(1-\mu)]^{-1}\leqslant\eta\leqslant \\ \leqslant{}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\xi^*=-2\eta\delta/(\delta^2-1)+(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)(\delta^2-1)^{-1}-1$$
$$^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\leqslant\eta\leqslant\eta_1$$

Теперь рассмотрим случай $0<\delta<1$.

При $(3\delta^2)^{-1}\leqslant(1-\mu)<1$:

$$\begin{gathered}\xi^*=-\mu+2\{2\delta(1-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]\}^{1/2},\ \eta\leqslant\eta_2\\ \xi^*=-\eta/\delta+(1-\mu)(2\delta^2+3)-1,\ \eta_2\leqslant\eta\leqslant\eta_1\\ \xi^*=\eta2\delta[1-\delta^2]^{-1}+(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)[\delta^2-1]^{-1}-1,\ \eta_1\leqslant\eta\end{gathered} \tag{3.4}$$

При $(4\delta^2+1)^{-1}\leqslant(1-\mu)\leqslant(3\delta^2)^{-1}$:

$$\begin{gathered}\xi^*=-\mu+2\{2\delta(1-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]\}^{1/2},\ \eta\leqslant\eta_2\\ \xi^*=-\eta/\delta+(1-\mu)(2\delta^2+3)-1,\ \eta_2\leqslant\eta\leqslant\delta[(1-\mu)(2\delta^2+3)-1]\\ \xi^*=0,\ \delta[(1-\mu)(2\delta^2+3)-1]\leqslant\eta\leqslant{}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\\ \xi^*=\eta2\delta(1-\delta^2)^{-1}+(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)(\delta^2-1)^{-1}-1\\ {}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\leqslant\eta\end{gathered} \tag{3.5}$$

При $0<(1-\mu)\leqslant(4\delta^2+1)^{-1}$:

$$\begin{gathered}\xi^*=-\mu+2\{2\delta(1-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]\}^{1/2}\\ \eta\leqslant2\delta(1-\mu)-\mu^2[8\delta(1-\mu)]^{-1}\\ \xi^*=0,\quad 2\delta(1-\mu)-\mu^2[8\delta(1-\mu)]^{-1}\leqslant\eta\leqslant{}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\\ \xi^*=\eta2\delta(1-\delta^2)^{-1}+(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)(\delta^2-1)^{-1}-1\\ {}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\leqslant\eta\end{gathered} \tag{3.6}$$

Теперь будем искать такие ξ^* и η^*, что $\rho(\xi^*,\ \eta^*)=|\xi^*(\eta^*)|+$ $+|\eta^*|\to\min$. Обозначим $\xi_1^*=\xi^*(\eta_1)$, а $\xi_2^*=\xi^*(\eta_2)$.

Рассмотрим случай $\delta\geqslant\sqrt{3}$, тогда $\eta_2<\eta_1\leqslant0$. Кривая $\xi^*=-\mu+2\{2\delta(1-$ $-\mu)[2\delta(1-\mu)-\eta]\}^{1/2}$ дает зависимость ξ^* от η при условии, что оптимальными коэффициентами являются $(\zeta_0,\ \xi_0)$, оптимальная точка $(\zeta^*,\ \xi^*)$ есть точка минимума гиперболы (1.11). Это так только для $\xi_0\geqslant0$. Значит, эта кривая всегда находится выше прямой $\xi^*=0$, следовательно, величина $\rho(\eta)$ на участке такой зависимости ξ^* от η достигает минимума в конечной точке, при максимальном η.

Так как при $\delta>1+\sqrt{2}$ наклон любого из участков зависимости $\xi^*(\eta)$ (3.1)–(3.3):

$$\begin{gathered}\xi^*=-2\eta\delta/(\delta^2-1)+(1-\mu)\delta^2(\delta^2+3)/(\delta^2-1)-1\\ \xi^*=0,\ \xi^*=-\eta/\delta+(1-\mu)(2\delta^2+3)-1\end{gathered} \tag{3.7}$$

меньше, чем наклон прямой $\xi^*=-\eta$, то величина $\rho(\eta)$ достигает минимума в конечной точке $(\eta_1,\ \xi_1^*)$ $(\eta_1\leqslant0)$. Таким образом, при $\delta\geqslant1+\sqrt{2}$ оптимальными коэффициентами обратной связи по угловой скорости ζ^*, по деформации ξ^*, по скорости деформации η^* будут:

$$\eta^*=(1-\mu)\delta(3-\delta^2),\ \xi^*=3(1-\mu)\delta^2-1,\ \zeta^*=(1-\mu)\delta^3 \tag{3.8}$$

При $\sqrt{3}\leqslant\delta<1+\sqrt{2}$ наклон первой прямой (3.7) больше, чем наклон прямой $\xi^*=-\eta$, следовательно, при $\sqrt{3}\leqslant\delta<1+\sqrt{2}$ в (3.2) и (3.3) величина $\rho(\eta)$ достигает минимума при $\eta={}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]$. Таким образом, при $\sqrt{3}\leqslant\delta<1+\sqrt{2}$ оптимальные коэффициенты обратной связи при $0<(1-\mu)\leqslant(3\delta^2)^{-1}$:

$$\begin{gathered}\eta^*={}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta]\\ \xi^*=0,\ \zeta^*={}^1/_2\delta[1-\delta^2(1-\mu)]\end{gathered} \tag{3.9}$$

При $(3\delta^2)^{-1}\leqslant(1-\mu)<1$:

$$\begin{gathered}\eta^*=(1-\mu)\delta(3-\delta^2),\ \xi^*=3(1-\mu)\delta^2-1\\ \zeta^*=(1-\mu)\delta^3\end{gathered} \tag{3.10}$$

Пусть теперь $1 \leqslant \delta < \sqrt{3}$. Рассуждая аналогично случаю $\delta \geqslant \sqrt{3}$, получим оптимальные коэффициенты обратной связи (ζ^*, ξ^*, η^*) при $0 < (1-\mu) \leqslant (\delta^2-1)[\delta^2(\delta^2+3)]^{-1}$:

$$\eta^* = {}^1/_2[(1-\mu)\delta(\delta^2+3)-(\delta^2-1)/\delta] \quad (3.11)$$
$$\xi^*=0, \quad \zeta^* = {}^1/_2\delta[1-\delta^2(1-\mu)]$$

При $(\delta^2-1)[\delta^2(\delta^2+3)]^{-1} < (1-\mu) < (2\delta^2+3)^{-1}$:

$$\eta^*=0, \quad \xi^*=0, \quad \zeta^*=\delta[(1-\mu)\delta^2+1](\delta^2+1)^{-1} \quad (3.12)$$

При $(2\delta^2+3)^{-1} \leqslant (1-\mu) < 1$:

$$\eta^*=0, \quad \xi^*=(1-\mu)(2\delta^2+3)-1, \quad \zeta^*=3(1-\mu)\delta \quad (3.13)$$

Рассмотрим наконец случай, когда $0<\delta<1$. Используя формулы (3.4)—(3.6), получим, аналогично случаю $\delta \geqslant \sqrt{3}$, оптимальные коэффициенты обратной связи (ζ^*, ξ^*, η^*) при $(3\delta^2)^{-1} \leqslant (1-\mu) < 1$:

$$\eta^*=(1-\mu)\delta(3-\delta^2), \quad \xi^*=(1-\mu)3\delta^2-1, \quad \zeta^*=(1-\mu)\delta^3 \quad (3.14)$$

При $(4\delta^2+1)^{-1} \leqslant (1-\mu) < (3\delta^2)^{-1}$:

$$\eta^*=\delta[(1-\mu)(2\delta^2+3)-1] \quad (3.15)$$
$$\xi^*=0, \quad \zeta^*=\delta[1-2\delta(1-\mu)]$$

При $(4\delta+1)^{-1} \leqslant (1-\mu) < (4\delta^2+1)^{-1}$:

$$\eta^*=2\delta(1-\mu)-\mu^2[8\delta(1-\mu)]^{-1} \quad (3.16)$$
$$\xi^*=0, \quad \zeta^*=\mu(2-\mu)[8\delta(1-\mu)]^{-1}$$

При $(2\delta^2+3)^{-1} \leqslant (1-\mu) < (4\delta+1)^{-1}$:

$$\eta^*=0, \quad \xi^*=0 \quad (3.17)$$
$$\zeta^*=2(1-\mu)\delta+\mu(4\delta)^{-1}-[(\mu/4\delta)^2-(1-\mu)^2]^{1/2}$$

При $0<(1-\mu) \leqslant (2\delta^2+3)^{-1}$:

$$\eta^*=0, \quad \xi^*=0, \quad \zeta^*=\delta[(1-\mu)\delta^2+1](\delta^2+1)^{-1} \quad (3.18)$$

Итак, оптимальные в смысле (1.18) безразмерные коэффициенты обратной связи по угловой скорости ζ^*, деформации ξ^* и скорости деформации η^* определяются выражениями (3.8)—(3.18). Графики зависимости этих коэффициентов от запаса устойчивости приведены на фиг. 2. (a — $\mu=0{,}1$, $б$ — $\mu=0{,}9$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551 с.
4. *Anderson B. D. O., Moore J. B.* Linear system optimisation with prescribed degree of stability // Proc. IEE. 1969. V. 116. No. 12. P. 2083—2087.
5. *Чиликин М. Г., Сандлер А. С.* Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.
6. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.X.1986