

УДК 534.1

К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНОЙ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ
МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ
И МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

СИНЕВ А. В., СТЕПАНОВ Ю. В.

Известно решение задачи в линейной постановке по определению оптимальных параметров простейшей виброзащитной системы, состоящей из параллельно работающих пружины и демпфера, при воздействии типа белого шума по ускорению [1-4].

При больших уровнях воздействия необходимо использование виброзащитных систем, имеющих нелинейные упругие и демпфирующие характеристики.

Расчет колебаний нелинейных виброзащитных систем и выбор оптимальных характеристик осуществляется, как правило, с помощью численных методов [5]. Известны отдельные точные аналитические решения этой задачи [6].

Публикуемая работа посвящена приложению методов анализа и синтеза нелинейных систем, основанных на построении функциональных рядов и многомерного преобразования Лапласа [7]. В [8] указанные методы использовались при расчете оптимальной нелинейной упругой характеристики виброизолятора при случайном воздействии. В данной работе аналогичная задача решается применительно к виброзащитной системе, имеющей нелинейные характеристики демпфирования и упругости.

1. Предлагаемый метод расчета колебаний нелинейных систем базируется на представлении реакции нелинейной системы $x(t)$ на входное стационарное случайное воздействие $y(t)$ в виде функционального ряда Вольтерры с ядрами h_i ($i=1, 2, \dots$):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) y(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \prod_{r=1}^2 y(t-\tau_r) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (1.1)$$

С помощью многомерного преобразования Лапласа реакция нелинейной системы в комплексной области может быть записана в следующем виде:

$$X(s_1) = H_1(s_1) Y(s_1) + \{H_2(s_1, s_2) Y(s_1) Y(s_2)\}^* + \{H_3(s_1, s_2, s_3) Y(s_1) Y(s_2) Y(s_3)\}^* + \dots \quad (1.2)$$

где $H_1(s_1)$, $H_2(s_1, s_2)$, $H_3(s_1, s_2, s_3)$ — изображения ядер $h_1(\tau_1)$, $h_2(\tau_1, \tau_2)$, $h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ в комплексной области, которые могут быть получены из дифференциальных уравнений, описывающих колебания системы и записанных в операторной форме, методом построения итераций решения; звездочкой обозначается операция перехода к одной переменной s_1 , которую можно осуществить с помощью специальных таблиц [7]; $Y(s_i)$ ($i=1, 2, 3$) — изображение входного воздействия $y(t)$.

Формула (1.2) может быть непосредственно использована при определении реакции нелинейной системы на детерминированное воздействие.

Ограничимся рассмотрением только первых трех членов ряда (1.1), считая, что ядра Вольтерры, имеющие порядок больше трех, равны нулю. При определении спектральной плотности случайного процесса на выходе нелинейной системы примем допущение, что входной стационарный случайный процесс имеет нормальную плотность распределения с нулевым математическим ожиданием и моментные функции входного сигнала нечетных порядков равны нулю.

Автокорреляционная функция процесса $x(t)$ определяется по известной формуле: $k_x(\xi) = \langle [x(t) - m_x][x(t+\xi) - m_x] \rangle$, m_x — математическое ожидание процесса $x(t)$, а тупые скобки означают усреднение процесса по времени. Подставим в эту формулу вместо $x(t)$ и $x(t+\xi)$ ряды (1.1) и произведем усреднение по времени. При этом моментные функции четного порядка (второго, четвертого, шестого), получаемые после перемножения членов ряда (1.1) и усреднения по времени, выражаются через корреляционную функцию процесса $y(t)$:

$$m^i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = \Sigma \Pi k_y(\tau_j, \tau_k) \quad (i=2, 4, 6)$$

где суммирование производится по всем разбиениям величин $y(\tau_1), \dots, y(\tau_i)$ на всевозможные пары, а произведение вычисляется для всех пар в каждом разбиении [7].

После выполнения следующей операции:

$$\Phi_x(s_1) = \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\xi) e^{-s_1 \xi} d\xi \quad (1.3)$$

и соответствующих преобразований, включая использование равенства Парсеваля, получаем формулу для спектральной плотности процесса $x(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_x(s_1) = & H_1(-s_1) H_1(s_1) \Phi_y(s_1) + \frac{1}{\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_2(-s_1, -s_2) H_2(s_1, s_2) \Phi_y(s_2) \times \\ & \times \Phi_y(s_1) ds_2 + \frac{3}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [H_3(s_1, -s_2, s_2) H_1(-s_1) + H_3(-s_1, s_2, -s_2) H_1(s_1)] \times \\ & \times \Phi_y(s_2) \Phi_y(s_1) ds_2 + \\ & + \frac{9}{(2\pi j)^2} \int_{-j\infty}^{j\infty} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_3(-s_1, -s_2, s_2) H_3(-s_1, -s_3, s_3) \Phi_y(s_3) \Phi_y(s_2) \times \\ & \times \Phi_y(s_1) ds_3 ds_2 + \frac{6}{(2\pi j)^2} \int_{-j\infty}^{j\infty} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_3(-s_1, -s_2, -s_3) H_3(s_1, s_2, s_3) \times \\ & \times \Phi_y(s_3) \Phi_y(s_2) \Phi_y(s_1) ds_3 ds_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\Phi_y(s_i)$ ($i=1, 2, 3$) — спектральная плотность входного процесса; j — мнимая единица, $s_i = j\omega_i$ ($i=1, 2, 3$).

Для получения дисперсии процесса $x(t)$ необходимо проинтегрировать (1.4) по s_1 :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_x(s_1) ds_1 \quad (1.5)$$

Таким образом, формулы (1.3) и (1.4) определяют дисперсию реакции нелинейной системы через изображения ядер системы и спектральную плотность входного воздействия.

2. В качестве примера определим дисперсию ускорений на выходе простейшей виброзащитной системы при воздействии типа белого шума по ускорению: $\Phi(s_1) = S_0 / (2\pi)$, $S_0 = \text{const}$.

Рассмотрим сначала случай нелинейного демпфирования, когда характеристика сопротивления определяется формулой $F_1(x) = b_1 x + b_3 x^3$, b_1, b_3 — параметры, определяющие вид характеристики, x — скорость смещения массы относительно основания. Упругая характеристика при этом считается линейной ($\omega_0^2 = c/m = \text{const}$).

Для определения изображений ядер системы защиты запишем дифференциальное уравнение колебаний системы относительно основания $x'' + 2\beta\omega_0 x' + \omega_0^2 x = -y'' - (b_3/m)x^3$.

Ядро первого порядка получается из решения соответствующего линейного уравнения:

$$X(s_1) = H_1^x(s_1) Y(s_1), \quad H_1^x(s_1) = -1/\Delta(s_1) \\ \Delta(s_1) = s_1^2 + 2\beta\omega_0 s_1 + \omega_0^2$$

Ядро $H_2^x(s_1, s_2)$ в данном случае тождественно равно нулю, а ядро третьего порядка получается после подстановки в правую часть решения линейного уравнения и перехода в область переменных s_1, s_2, s_3 :

$$X(s_1, s_2, s_3) = H_3^x(s_1, s_2, s_3) Y''(s_1) Y''(s_2) Y(s_3) \\ H_3^x(s_1, s_2, s_3) = (b_3/m) s_1 s_2 s_3 \cdot [\Delta(s_1 + s_2 + s_3) \Delta'(s_1) \Delta(s_2) \Delta(s_3)]^{-1}$$

Для получения соответствующих ядер системы по ускорению H_1, H_2, H_3 используем формулы

$$Z''(s_1) = s_1^2 X(s_1) + Y''(s_1) = [s_1^2 H_1^x(s_1) + 1] Y''(s_1) = H_1(s_1) Y''(s_1) \\ Z''(s_1, s_2, s_3) = (s_1 + s_2 + s_3)^2 X(s_1, s_2, s_3) = \\ = (s_1 + s_2 + s_3)^2 H_3^x(s_1, s_2, s_3) Y''(s_1) Y''(s_2) Y''(s_3) = \\ = H_3(s_1, s_2, s_3) Y''(s_1) Y''(s_2) Y''(s_3)$$

откуда следует

$$H_1(s_1) = \frac{2\beta\omega_0 s_1 + \omega_0^2}{\Delta(s_1)}, \quad H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{b_3}{m} \frac{(s_1 + s_2 + s_3)^2 s_1 s_2 s_3}{\Delta(s_1 + s_2 + s_3) \Delta(s_1) \Delta(s_2) \Delta(s_3)}$$

Подставляя выражения для ядер системы в формулы (1.4), (1.5) и учитывая, что $\Phi(s_1) = S_0/(2\pi)$, после интегрирования получим соответствующие формулы для дисперсий смещения массы относительно основания (σ_x^2) и вертикальных ускорений (σ^2):

$$\sigma_x^2 = \frac{S_0}{\omega_0^3} \left[\frac{1}{4\beta} - \frac{3}{32\beta^3} \beta_3 + \frac{3}{4096} \frac{27 + 88\beta^2}{\beta^5(1 + 3\beta^2)} \beta_3^2 \right] \quad (2.1) \\ \sigma^2 = S_0 \omega_0 \left[\frac{4\beta^2 + 1}{4\beta} + \frac{3}{32} \frac{4\beta^2 - 1}{\beta^3} \beta_3 + \frac{3}{4096} \frac{27 + 292\beta^2 + 624\beta^4}{\beta^5(1 + 3\beta^2)} \beta_3^2 \right]$$

где $\beta_3 = b_3 S_0 / (m \omega_0^2)$ — безразмерный параметр, характеризующий кубическую часть характеристики демпфирования.

Рассмотрим теперь случай, когда нелинейной является упругая характеристика виброзащитной системы: $F_2(x) = cx + c_3 x^3$, а характеристика демпфирования является линейной. Дифференциальное уравнение колебаний и ядра системы в этом случае имеют вид (ядра системы первого порядка такие же, как и в первом случае):

$$x'' + 2\beta\omega_0 x' + \omega_0^2 x = -y'' - (c_3/m) x^3 \\ H_3^x(s_1, s_2, s_3) = (c_3/m) [\Delta(s_1 + s_2 + s_3) \Delta(s_1) \Delta(s_2) \Delta(s_3)]^{-1} \\ H_3(s_1, s_2, s_3) = (c_3/m) (s_1 + s_2 + s_3)^2 [\Delta(s_1 + s_2 + s_3) \Delta(s_1) \Delta(s_2) \Delta(s_3)]^{-1}$$

Формулы для дисперсий смещения массы и ускорения при нелинейной упругой характеристике имеют вид

$$\sigma_x^2 = \frac{S_0}{n^3} \left[\frac{1}{4B^2} - \frac{3}{16B^6} B_3 + \frac{3}{4096} \frac{336 + 220B^2 + 27B^4}{(3 + B^2) B^{10}} B_3^2 \right] \quad (2.2) \\ \sigma^2 = S_0 n \left[\frac{4 + B^2}{4} + \frac{3}{16B^2} B_3 + \frac{3}{4096} \frac{192 + 208B^2 + 27B^4}{(3 + B^2) B^6} B_3^2 \right]$$

где $B = \omega_0/n$, $B_3 = c_3 S_0 / (mn^5)$ — безразмерные параметры, определяющие линейную и кубическую части упругой характеристики.

Полученные формулы для дисперсий (2.1) и (2.2) можно трактовать как асимптотическое разложение дисперсий реакций нелинейной системы по степеням безразмерных параметров β_3 и B_3 . При этом точность полученных формул определяется степенью малости параметров β_3 и B_3 и ли-

нейным демпфированием в системе ($n=b_1/(2m)$). При $\beta_3=0$, $B_3=0$ формулы соответствуют решению линейной системы.

Для получения более точного решения необходимо в (1.1) рассматривать слагаемые, соответствующие ядрам порядка выше третьего. При этом в формулах (2.1), (2.2) появляются слагаемые, соответствующие более высоким степеням параметров β_3 и B_3 .

3. Проведем оптимизацию параметров системы по двум критериям качества: $\min[\sigma^2]$, $\min([\sigma^2] + \rho[\sigma_x^2])$; $[\sigma^2] = \sigma^2/(S_0\omega_0)$, $[\sigma_x^2] = \sigma_x^2\omega_0^3/(S_0)$ (для системы с нелинейной характеристикой демпфирования), $[\sigma^2] = \sigma^2/(S_0n)$, $[\sigma_x^2] = \sigma_x^2n^3/(S_0)$ (для системы с нелинейной упругой характеристикой), а σ^2 и σ_x^2 определяются по формулам (2.1), (2.2). В случае нелинейного демпфирования оптимизируются параметры β и β_3 , а в случае нелинейной упругой характеристики — параметры B и B_3 .

Оптимизация по первому критерию качества для случая нелинейного демпфирования ($\omega_0 = \text{const}$) приводит к формуле, определяющей зависимость между параметрами характеристики демпфирования, при которой обеспечивается наилучшая виброзащита:

$$\beta_3 = -\frac{64(4\beta^2-1)\beta^2(1+3\beta^2)}{27+292\beta^2+624\beta^4}$$

а также к формулам, определяющим наименьшую величину $[\sigma^2]$:

$$\min_{\beta_3}[\sigma^2] = \frac{4\beta^2+1}{4\beta} - \frac{3(4\beta^2-1)^2(1+3\beta^2)}{\beta(27+292\beta^2+624\beta^4)}$$

$$\min_{\beta, \beta_3}[\sigma^2] = 1, \quad \beta = b_1/(2\sqrt{cm}); \quad \beta_3 = b_3S_0/(m\omega_0^2)$$

Для случая нелинейной упругой характеристики ($n = \text{const}$) оптимальная зависимость между параметрами упругой характеристики и формула для наименьшей величины $[\sigma^2]$ имеют вид

$$B_3 = -\frac{128B^4(3+B^2)}{192+208B^2+27B^4}; \quad \min_{B_3}[\sigma^2] = \frac{4+B^2}{4} - \frac{12B^2(3+B^2)}{192+208B^2+27B^4}$$

$$\min_{B, B_3}[\sigma^2] = 1, \quad B = \frac{\omega_0}{n}, \quad n = \frac{b_1}{2m}, \quad B_3 = \frac{c_3S_0}{mn^5}$$

Ниже приводятся аналогичные результаты оптимизации по второму критерию качества:

для системы с нелинейной характеристикой демпфирования

$$\beta_3 = -64(4\beta^2-1-\rho)\beta^2(1+3\beta^2)/(\Delta_1+\Delta_2\rho)$$

$$\Delta_1 = 27+292\beta^2+624\beta^4, \quad \Delta_2 = 27+88\beta^2$$

$$\min([\sigma^2] + \rho[\sigma_x^2]) = \frac{4\beta^2+1+\rho}{4\beta} - \frac{3(1+3\beta^2)(4\beta^2-1-\rho)^2}{\beta(\Delta_1+\Delta_2\rho)}$$

$$\min_{\beta, \beta_3}([\sigma^2] + \rho[\sigma_x^2]) = \sqrt{1+\rho}$$

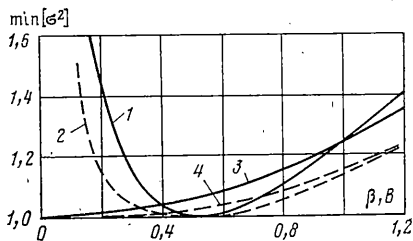
для системы с нелинейной упругой характеристикой

$$B_3 = -128(B^4-\rho)(3+B^2)B^4/(\Delta_1B^4+\Delta_2\rho)$$

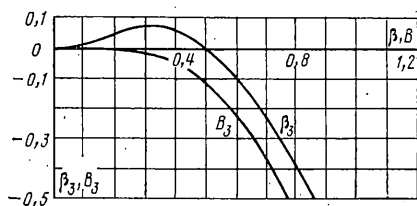
$$\Delta_1 = 192+208B^2+27B^4, \quad \Delta_2 = 336+220B^2+27B^4$$

$$\min_{B_3}([\sigma^2] + \rho[\sigma_x^2]) = \frac{4+B^2}{4} + \frac{\rho}{4B^2} - \frac{12(B^4-\rho)^2(3+B^2)}{B^2(\Delta_1B^4+\Delta_2\rho)}$$

Анализ результатов оптимизации характеристик упругости и демпфирования позволяет сделать следующие выводы. Нелинейная виброзащитная система не улучшает виброзащитные свойства линейной системы, если в последней реализованы оптимальные значения параметров, полученные по первому критерию качества. Если значения параметров линейной системы отличаются от оптимальных, то введением нелинейности можно улучшить виброзащитные свойства системы, при этом



Фиг. 1



Фиг. 2

чем больше это отличие, тем более эффективной становится нелинейная система по сравнению с линейной.

На фиг. 1 показаны кривые $\min[\sigma^2]$ в зависимости от β и B , показывающие, насколько можно снизить дисперсию ускорений изолируемой массы введением нелинейного демпфирования или нелинейной упругости. Сплошные кривые линии соответствуют линейной системе, а штриховые — нелинейной. Кривые 1, 2 соответствуют системе, в которой варьируются характеристики демпфирования, а кривые 3, 4 относятся к системе с переменной упругой характеристикой.

Зависимость оптимальных значений параметров β_3 и B_3 от β и B показана на фиг. 2. Анализ соответствующих кривых показывает, что если $\beta < 0,5$, то оптимальной является прогрессивная характеристика демпфирования; если $\beta > 0,5$, то характеристика демпфирования должна быть регрессивной. Нелинейная упругая характеристика при любом значении $\omega_0 \neq 0$ должна быть регрессивной.

Оптимизация параметров системы по второму критерию показывает, что нелинейная система не улучшает качество линейной системы. В частности, выигрыш по ускорению за счет введения регрессивной характеристики демпфирования или упругости нивелируется увеличением динамического хода виброзащитной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Синев А. В., Степанов Ю. В. К определению оптимального демпфирования виброзащитных систем // *Машиноведение*. 1985. № 1. С. 32–36.
2. Гурецкий В. В. Об оптимизации параметров системы амортизации при стационарных случайных воздействиях // *Машиноведение*. 1971. № 5. С. 23–28.
3. Потемкин Б. А., Сафронов Ю. Г., Синев А. В., Фролов К. В. Синтез оптимальной виброзащитной системы при случайных воздействиях с учетом динамических свойств тела человека // *Виброзащита человека-оператора и вопросы моделирования*. М.: Наука. 1973. С. 53–63.
4. Богомолов А. И., Степанов П. П. Определение оптимальных передаточных функций систем амортизации // *Изв. вузов. Машиностроение*. 1970. № 7. С. 55–59.
5. Фурунжиев Р. И. Автоматизированное проектирование колебательных систем. Минск: Высш. шк. 1977. 452 с.
6. Апостолов А. С., Ларин В. Б. Нелинейные задачи виброзащиты // *Математическая физика*. Киев: Наук. думка. 1981. Вып. 29. С. 5–12.
7. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука. 1976. 448 с.
8. Синев А. В. Параметрическая оптимизация нелинейных систем виброизоляции с использованием многомерного преобразования Фурье // *Машиноведение*. 1982. № 6. С. 31–36.

Москва

Поступила в редакцию
2.XII.1986