

2. Кангур Х. Ф., Клейс И. Р. Экспериментальное исследование геометрии ударных лунок // Тр. Таллин. политехн. ин-та. 1985. № 609. С. 3–12.
3. Клейс, И. Р., Лепик Ю. Р., Узумыйс Х. Х., Кангур Х. Ф. Моделирование динамического внедрения сферического индентора // Тр. междунар. науч. конф. «Трение, износ и смазочные материалы». М.: Ин-т пробл. механики АН СССР. 1985. Т. 4. С. 452–455.
4. Давиденков Н. Н. Динамические испытания металлов. Л.; М.: Глав. ред. лит-ры по черн. металлургии. 1936. 394 с.
5. Гольдсмит В. Удар и контактные явления при средних скоростях // Физика быстропротекающих процессов. М.: Мир. 1971. Т. 2. С. 151–203.

Таллин

Поступила в редакцию  
15.V.1986

УДК 539.374

## К ВОПРОСУ ОБЪЯСНЕНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ МОДУЛЯ ДОГРУЗКИ

БЛИНОВ Э. И.

В рамках варианта теории деформации твердого тела, в основу которого положено понятие о термодинамической неравновесности (нестабильности) состояния деформируемого материала, количественно описаны значения мгновенного модуля сдвига при ортогональном изломе траектории нагружения во времени.

1. Как известно, теории пластичности, не учитывающие фактор времени, дают разные значения мгновенного модуля сдвига  $G_i = \delta\tau_{xz}/\delta\gamma_{xz}|_{\delta\sigma=0}$ : по теории течения  $G_i = G$ , где  $G$  — упругий модуль сдвига; по теории малых упругоэластических деформаций  $G_i = G[1 + 3G(E_s^{-1} - E^{-1})]^{-1}$ ; по теории скольжения Батдорфа — Будянского (формула Чикала)  $G_i = G[1 + 3/2G(E_s^{-1} - E^{-1})]^{-1}$ , где  $E_s$  и  $E$  — значения секущего модуля на диаграмме растяжения в конце этапа растяжения и упругого модуля растяжения; по теории скольжения Леонова — Русинко  $G_i = G[1 + \kappa G(E_s^{-1} - E^{-1})]^{-1}$ , где  $\kappa$  зависит от растягивающего напряжения, незначительно изменяясь вместе с ним ( $1/8 \leq \kappa \leq 1$ ) [1].

Что касается экспериментального определения  $G_i$  (см. [2]), то в ряде работ получено  $G_i = G$ , а в других  $G_i < G$ . Обычные теории пластичности не могут объяснить такие результаты экспериментов, так как с точки зрения этих теорий они противоречивы. Поэтому естественной представляется попытка перехода к теориям деформации, учитывающим термически активируемые процессы, протекающие в деформируемом твердом теле с конечными скоростями, т. е. к теориям, учитывающим фактор времени. Действительно, анализ специальных экспериментов по учету фактора времени в условиях обычных «статических» нагружений<sup>1</sup> показал, что он играет существенную роль в поведении деформируемых при комнатной температуре металлов и сплавов. Без учета фактора времени объяснить и описать поведение деформируемого металла можно только для отдельных частных случаев его нагружения, не охватывая всего явления в целом. Результаты экспериментов на сложное нагружение без их «развертки» во времени не могут претендовать на однозначность [3].

В основу теории пластичности, учитывающей фактор времени, положим понятие о неустойчивости (термодинамической неравновесности) состояния деформируемого материала. Рассмотрим феноменологический элемент твердого тела, испытывающего деформацию. Его состояние в некоторый момент времени является равновесным термодинамически, если фиксирование деформации и температуры в этот момент означает фиксирование всей конфигурации. Из реального состояния термодинамически равновесное достигается путем релаксации напряжений при фиксированных деформации и температуре. Очевидно, что во всех случаях, когда деформация зависит от скорости нагружения, такой элемент в каждый момент времени находится в термодинамически неравновесном состоянии.

Напряжения, которые остаются после перехода элемента деформируемого тела в термодинамически равновесное состояние назовем «равновесными». Напряжения, которые получаются в результате вычитания компонент тензора равновесных напряжений ( $\psi_{ij}$ ) из соответствующих компонент тензора полных напряжений ( $\sigma_{ij}$ ), назовем «неравновесными» ( $\varphi_{ij}$ ). Таким образом всегда имеет место тождество:

$$\varphi_{ij} = \sigma_{ij} - \psi_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> Вавакин А. С., Викторов В. В., Механикова И. М., Мохель А. Н., Салганик Р. А., Степанова Л. П., Христианович С. А. Экспериментальное и теоретическое изучение влияния временных эффектов на пластическое деформирование сталей при комнатной температуре. М.: 1983. — 62 с. (Препринт) АН СССР Ин-т пробл. механики: № 241); Вавакин А. С., Мохель А. Н., Степанов Л. П. Исследование характера пластического деформирования стали 30ХГСА в точках резкого излома траектории нагружения (Р-М опыты). — М., 1983. — 103 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2895.

Согласно теории деформации твердого тела, построенной на таких представлениях [4, 5], необратимая деформация полностью определяется равновесными напряжениями. Релаксация неравновесных напряжений, при постоянном значении полных, согласно (1.1), вызывает увеличение равновесных, что объясняет и определяет необратимую деформацию при релаксации неравновесных напряжений, сопровождающуюся соответствующим упрочнением материала. Если теперь нагружение продолжить, то можно постулировать, что до тех пор пока полные напряжения не возрастут настолько, когда будет преодолено это дополнительное упрочнение, необратимой деформации не будет. Приращение полных напряжений после которого вновь начинается необратимая деформация находится из условия, что оно при непрерывном нагружении должно дать такую же необратимую деформацию, какая была получена при его фиксированном значении, тем самым преодолев дополнительное упрочнение.

Такое представление теорией деформации [4, 5] поведения деформируемого твердого тела позволяет, в частности, описывать особенности деформации типа эффекта Хаазена — Келли [6]<sup>2</sup>, объясняя появление упругого участка диаграммы  $\sigma_z \sim \varepsilon_z$  после выдержки при «ступенчатом» растяжении.

Возвратимся к вопросу определения мгновенного модуля сдвига. Итак,  $G_i = \delta\tau_{xz}/\delta\gamma_{xz}$  при  $\delta\sigma_z = 0$  после растяжения за предел текучести тонкостенного цилиндра напряжением  $\sigma_z$ . Представим дополнительную деформацию сдвига в виде суммы обратимой  $\delta\gamma_{xz}^l$  и необратимой  $\delta\gamma_{xz}^n$  частей:  $\delta\gamma_{xz} = \delta\gamma_{xz}^l + \delta\gamma_{xz}^n$ , а приращение касательного напряжения в виде равновесной  $\delta\tau_{xz}^p$  и неравновесной  $\delta\psi_{xz}$  частей:  $\delta\tau_{xz} = \delta\tau_{xz}^p + \delta\psi_{xz}$ . При этом по определению получим

$$GG_i/(G - G_i) = (\delta\tau_{xz}^p + \delta\psi_{xz})/\delta\gamma_{xz}^n \quad (1.2)$$

С точки зрения термодинамики все обычные теории пластичности описывают необратимые процессы деформации, составленные из последовательности равновесных состояний. Поэтому отношение  $\delta\tau_{xz}^p/\delta\gamma_{xz}^n$  представляет собой отношений приращения касательного напряжения к неупругой деформации при догрузке кручением, вычисленного по теории пластичности не учитывающей фактор времени. Возьмем это отношение, вычисленное в рамках теории скольжения Батдорфа — Будянского или теории Сандерса, т. е. в виде

$$\delta\gamma_{xz}^n/\delta\tau_{xz}^p = 3/2(E_s^{-1} - E^{-1}) \quad (1.3)$$

Подставив (1.3) в (1.2) получаем мгновенный модуль сдвига

$$G_i = G \left[ \frac{3}{2}(E_s^{-1} - E^{-1}) + \delta\gamma_{xz}^n/\delta\psi_{xz} \right] \times \\ \times \left[ \frac{3}{2}(E_s^{-1} - E^{-1}) + [1 + \frac{3}{2}G(E_s^{-1} - E^{-1})] \delta\gamma_{xz}^n/\delta\psi_{xz} \right]^{-1} \quad (1.4)$$

Анализ этой формулы позволяет следующим образом охарактеризовать исследуемое явление. Если неравновесное напряжение считать (как это делается в обычных теориях пластичности) пренебрежительно малым, т. е. положить  $\delta\psi_{xz} = 0$ , то значение  $G_i$ , вычисляемое по формуле (1.4), будет совпадать с его значением, вычисляемым по теории скольжения Батдорфа — Будянского или теории Сандерса

$$G_i = G \left[ 1 + \frac{3}{2}G(E_s^{-1} - E^{-1}) \right]^{-1} \quad (1.5)$$

Если догрузка проводится после некоторой выдержки при постоянном растягивающем напряжении, то за это время происходит деформация ползучести, определяемая релаксацией неравновесного напряжения и, согласно постулированному выше, по крайней мере в первый момент догрузки необратимая деформация будет отсутствовать ( $\delta\gamma_{xz}^n = 0$ ). При этом из (1.4) получаем, что мгновенный модуль сдвига равен упругому:  $G_i = G$ , т. е. совпадает со значением, определяемым по теории течения.

Величина мгновенного модуля догрузки при непрерывном переходе от растяжения к кручению зависит от скорости догрузки, поскольку от нее зависит приращение неравновесного напряжения, а вместе с ним и отношение  $\delta\gamma_{xz}^n/\delta\psi_{xz}$ . При достаточно большой скорости догрузки  $\delta\psi_{xz} \gg \delta\gamma_{xz}^n$   $G_i$  и  $G$  будет близким к  $G$ , а при достаточно малой — близким к значению, определяемому по формуле (1.5). Таким образом, согласно формуле (1.4), для одного и того же материала, путем подбора соответствующих условий проведения эксперимента, можно получить значения мгновенного модуля сдвига, начиная от минимального, определяемого по формуле (1.5), и кончая максимальным — равным упругому.

Аналогичные выводы получены при экспериментальных исследованиях характера неупругого деформирования металлов и сплавов при резких изломах траектории нагружения, проводившихся с учетом фактора времени.

2. Найдем отношение  $\delta\gamma_{xz}^n/\delta\psi_{xz}$ , полагая для простоты, что связь между равновесными напряжениями и необратимыми деформациями устанавливается теорией Сандерса [7]. Воспользуемся тензорным уравнением, определяющим соотношение между неравновесными напряжениями и полными деформациями, которое согласно результатам [4], имеет вид

$$d\psi_{ij}/dt + B_{ijkl}\psi_{kl} = H_{ijkl}d\varepsilon_{kl}/dt \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

<sup>2</sup> См. публ., указ. с. 2.

Отсюда в случае догрузки тонкостенного цилиндра первоначально изотропного материала, растянутого до  $\sigma_* = \text{const}$ , соответственно получаем

$$\frac{\delta\gamma_{xz}}{\delta\psi_{xz}} = \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{G} \right) + \frac{B}{c} \psi_z^* \frac{1}{\psi_{xz}^*} - \frac{1}{G} \frac{\delta\tau_{xz}^p}{\delta\psi_{xz}} - \frac{D}{c} \frac{\delta\epsilon_z^n}{\delta\psi_{xz}} \quad (2.2)$$

где  $\psi_z^*$  — значение  $\psi$  в момент, предшествующий излому траектории нагружения;  $\psi_{xz}^* = \delta\psi_{xz}/\delta t$  — скорость изменения  $\psi_{xz}$  в момент начала догрузки;  $B, D, c$  — постоянные материала;  $\tau_{xz}^p$  — равновесное касательное напряжение.

Результаты [7] для теории пластичности Сандерса позволяют записать ( $A = \text{const}$ ):

$$\delta\epsilon_z^n = (2/\sqrt{3}) A \delta\tau_{xz}^p, \quad \delta\tau_{xz}^p = 2/3 \delta\gamma_{xz}^n (E_s^{-1} - E^{-1})^{-1} \quad (2.3)$$

Подставляя эти значения в (2.2) получим

$$\delta\gamma_{xz}^n / \delta\psi_{xz} = F + R \psi_z^* / \psi_{xz}^* \quad (2.4)$$

$$F = 3/2 (E_s^{-1} - E^{-1}) (c^{-1} - G^{-1}) / [3/2 (E_s^{-1} - E^{-1}) + (G^{-1} + (2/\sqrt{3}) (AD/c))] \quad (2.5)$$

$$R = 9/4 (B/c) (E_s^{-1} - E^{-1}) [(E_s^{-1} - E^{-1}) + G^{-1} + 2AD/(\sqrt{3}c)]^{-1}$$

При выполнении постулата о пороге текучести в первый момент догрузки  $\delta\gamma_{xz}^n = 0$  и, следовательно,  $G_s = G$ . Подставляя (2.4) в (1.4) убеждаемся, что это возможно только при  $\delta\gamma_{xz}^n / \delta\psi_{xz} = 0$ , т. е. когда  $F = 0$  и, следовательно,

$$\delta\gamma_{xz}^n / \delta\psi_{xz} = R \psi_z^* / \psi_{xz}^* \quad (2.6)$$

так что всегда  $c = G$ .

Постоянная материала  $A$  входит в формулу

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} + \frac{2}{3} A \left[ \arccos \frac{\Phi_s}{\Phi_z} + \frac{\Phi_s}{\Phi_z} \left( 1 - \frac{\Phi_s}{\Phi_z} \right)^{1/2} \right] \Phi_z \quad (2.7)$$

определяющую связь между напряжением и деформацией при простом растяжении по теории пластичности Сандерса. Поэтому для определения значения постоянной  $A$  необходимо описать формулой (2.7) универсальную кривую соотношений между равновесным растягивающим напряжением и деформацией  $\Phi_z \sim \epsilon_z$ , которая может быть получена, например, как кривая, соединяющая точки с наибольшей деформацией после выдержек при постоянном напряжении при ступенчатом растяжении<sup>3</sup>.

Постоянную  $B$  можно получить описав результаты экспериментов пропорционального растяжения и кручения, а при их отсутствии — из опыта на кручение при постоянном растягивающем напряжении за пределом текучести.

Необходимую для расчетов по формуле (2.6) связь между  $\tau_{xz}^*$  и  $\psi_{xz}^*$  в момент ортогонального излома траектории нагружения получим подставив (2.3) в (2.2) с учетом (1.1):

$$\psi_{xz}^* = \tau_{xz}^* - B \psi_{xz}^* [1 + 3/2 G (E_s^{-1} - E^{-1}) + 2AD/\sqrt{3}]^{-1}$$

Рассмотрим результаты экспериментов на образцах из стали 30 ХГСА<sup>4</sup>. Результаты «ступенчатого» растяжения показаны на фиг. 1 светлыми кружочками в координатах  $\sigma_z \cdot 9,81^{-1}$ , МПа  $\sim \epsilon_z$ , %. Соединив точки наибольших деформаций после выдержек при постоянных напряжениях плавной пунктирной линией получим кривую  $\Phi_z \sim \epsilon_z$ . Эту кривую опишем аналитически формулой (2.7). Результаты расчетов при  $\Phi_s = 28,4$  МПа и  $A = 9,5 \cdot 10^{-7}$  МПа показаны на фиг. 1 темными кружочками.

Постоянная  $D$  входит в уравнение (2.1), которое для случая простого растяжения имеет решение

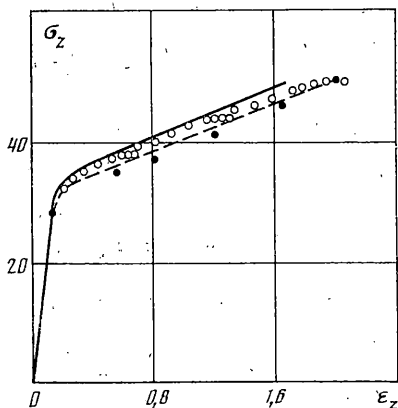
$$\psi_z(t) = D \left[ \epsilon_z(t) - g \int_0^t \exp[-g(t-\tau)] \epsilon_z(\tau) d\tau \right] \quad (2.8)$$

Построим диаграмму быстрого растяжения ( $\sigma_z^* = 9$  МПа/с) образца до точки излома траектории нагружения. На фиг. 1 эта диаграмма проведена сплошной линией. Разность между полным напряжением и равновесным в момент фиксирования некоторой деформации дает неравновесное напряжение при этой деформации. Соответствие с опытными данными результатов расчетов по формуле (2.8) получается при  $D = 10^3$  МПа и  $g = 0$ .

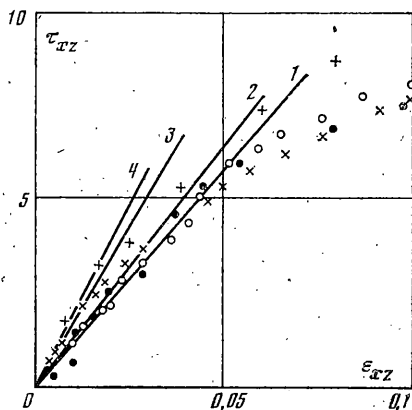
Для определения постоянной  $B = B_{xzzz}$  снова воспользуемся результатами опытов, но уже на втором звене траектории нагружения. Малое приращение деформации сдвига в окрестности угловой точки, вычисляемое по формуле (2.4), совпадает для этого образца с экспериментом при  $B = 5,7 \cdot 10^{-3}$  МПа.

Опытные значения  $G_i$  показаны на фиг. 2 лучами 1 —  $G_{23}$ , 2 —  $G_{25}$  и 3 —  $G_{13}$ , восстановленными из начала координат, совмещенного с точкой излома траектории. Крестиками, светлыми и темными точками нанесены опытные данные по догрузке различных образцов кручением. Образцы нагружались с разными скоростями без

<sup>3, 4</sup> См. публ., указ. с. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

выдержки в точке излома траектории нагружения. Звездочками показаны опытные данные нагружения с выдержкой в точке излома, а лучом 4 —  $G_{26}$  — упругий модуль сдвига. Результаты расчетов по формуле (1.4) значений мгновенного модуля сдвига, при вычисленных выше значениях постоянных и упомянутых экспериментальных данных, показаны на фиг. 2 теми же сплошными лучами. На фиг. 2  $\sigma_z$  показано в  $9,81 \cdot \text{МПа}$ , а  $\epsilon_{xz}$  — в %.

Автор выражает благодарность К. Н. Русинко за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести, Львов: Вища шк., 1981. 148 с.
2. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 336—520.
3. Вавакин А. С., Василь Р. А., Викторов В. В., Мохель А. Н., Салганик Р. А., Степанов Л. П., Христианович С. А. Предложения по стандартизации представления к публикации результатов испытаний в соответствии с ГОСТом 7.33—81 применительно к сложному нагружению // Изв. АН СССР МТТ, 1983. № 6. С. 163—165.
4. Русинко К. Н., Блинов Э. И. Аналитическое описание термоупругопластического деформирования твердого тела // Прикл. механика, 1981. Т. 17. № 11. С. 48—53.
5. Блинов Э. И. Термодинамика в теории пластичности // Неклассические задачи механики деформируемого твердого тела (Динамика сплошной среды. 61) Новосибирск: 1983. С. 12—18.
6. Naasen P., Kelly A. A yield phenomenon in face-centered cubic single crystals. Acta metallurg., 1975. No. 5. P. 192—199.
7. Ключников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 722—731.

Львов

Поступила в редакцию  
5.VI.1984