

ставляется, это отличие обусловлено принятым в [2] законом распределения начальных сил в стержне. В настоящей работе начальные силы вообще не фигурировали в решении, а структура формулы (2.3) оказывается такой же, какая следует из закона распределения начальных сил [1].

Приведем несколько цифр, характеризующих степень опасности потери устойчивости стержней при действии гравитационных сил. Критическая длина стального стержня с постоянным квадратным сечением будет равна $\sim 14 \cdot 10^3$ км. Причем, как это следует из структуры формулы (2.3), значение l_* не зависит от размера поперечного сечения.

В качестве второго примера рассмотрим свободный безмассовый стержень с закрепленными на его концах сосредоточенными массами. В этом случае для произвольной длины стержня критический момент инерции сечения будет равен $J_* = GM_1M_2/(\pi^2E)$ и для стального стержня с квадратным сечением при $M_1=M_2=10^6$ кг получим значение поперечного размера, равное $\sim 4,5$ мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. О некоторых необычных примерах устойчивости равновесия упругих систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 130–136.
2. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ. 1986. 224 с.
3. Алфугов Н. А., Балабух Л. И. Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряженного деформированного состояния // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 703–707.
4. Алфугов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1978. 311 с.
5. Алфугов Н. А., Попов В. Г. Расчет локально-нагруженных прямоугольных пластин на устойчивость вариационным методом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 120–126.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1987

УДК 539.375

К РАСЧЕТУ ПРЕДЕЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

МОРОЗОВ Н. Ф., ПЕТРОВ Ю. В., УТКИН А. А.

Основным параметром, позволяющим оценивать прочность упругих сред с трещинами, описываемых классической теорией упругости, служит коэффициент интенсивности напряжений. Его определение является одним из решающих моментов при оценке предельных нагрузок не только в статических, но и во многих динамических задачах, когда главный член асимптотики напряжений около вершины трещины характеризуется корневым ростом, имеет угловое распределение, аналогичное статическому, а инерционный эффект проявляется в том, что коэффициент интенсивности зависит от времени [1, 2]. Однако, когда прикладываемое воздействие отличается сильной сингулярностью, то известные асимптотические формулы, описывающие напряженное состояние у вершины трещины, не являются равномерными и справедливы лишь на достаточно больших по сравнению с r/c временах; здесь r — расстояние до вершины, c — скорость распространения колебаний. В этом случае применение коэффициента интенсивности оказывается невозможным. Оценка предельной интенсивности, при которой будет происходить разрушение, в таких задачах может быть проведена при помощи подхода, предложенного Новожиловым [3].

Рассмотрим задачу о нормальном падении антиплоской ступенчатой волны перемещения на полубесконечную трещину $y=\pm 0$, $x \leq 0$, берега которой свободны от внешних нагрузок. Во внутренних точках разрезанной вдоль $y=0$, $x \leq 0$ плоскости напряженно-деформированное состояние описывается уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

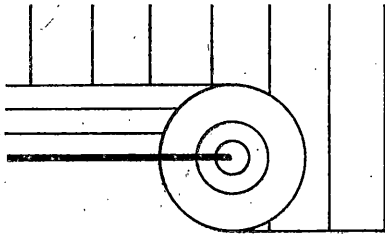
$$\tau_{xz} = \mu \partial u / \partial x, \quad \tau_{yz} = \mu \partial u / \partial y$$

Условие отсутствия нагрузок на разрезе выражается соотношением

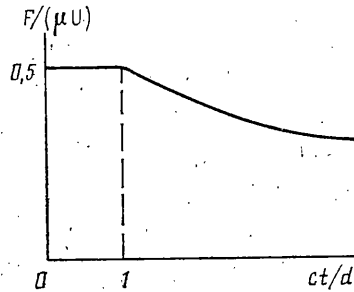
$$\partial u / \partial y = 0, \quad (x \leq 0, y = \pm 0) \quad (2)$$

В моменты времени, предшествующие взаимодействию падающей волны с полубесконечной трещиной, волновое поле описывается функцией:

$$u|_{t < 0} = UH(ct+y), \quad c > 0 \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $H(x)$ — функция Хевисайда, U — интенсивность ударного нагружения, которую в нашем случае полагаем постоянной. Предположим также, что для произвольного фиксированного положительного числа ε справедливо условие

$$u = \text{const} + O(r^\beta), \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (t \geq \varepsilon > 0, \beta > 0) \quad (4)$$

означающее, что конец трещины не является источником (сток) энергии [4] и обеспечивающее, в конечном счете, однозначное определение решения.

Решение задачи (1)–(4) известно и может быть найдено методом функционально-инвариантных решений Соболева [4, 5]. Однако в механике разрушения, где основной задачей часто является определение коэффициента интенсивности напряжений, более широко используется эффективный метод, основанный на интегральных преобразованиях и решении соответствующей задачи факторизации. Применяя этот метод, представим решение задачи (1)–(4) в виде суммы падающей и отраженной волны: $u = H(ct+y) + W(t, x, y)$, где $W=0$ при $t < 0$. Функция W определяется в виде обратного преобразования Фурье [6]:

$$W(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, x, y) e^{-i\omega t} d\omega \quad (5)$$

а $\varphi(\omega, x, y)$ находится из решения соответствующей стационарной задачи дифракции на полубесконечном разрезе. Ее решение может быть определено методом факторизации Винера — Хопфа [7] и имеет вид

$$\varphi(\omega, x, y) = \mp \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \exp(\mp \omega (\gamma^2 - 1)^{1/2} y - i\omega \gamma x)}{\omega \gamma (\gamma - 1)^{1/2}} d\gamma \quad (\omega > 0)$$

Верхние знаки соответствуют точкам, в которых $y > 0$; нижние — $y < 0$; разрезы в плоскости комплексной переменной γ проведены вдоль вещественной оси по лучам $y < -1$ и $\gamma > 1$, а ветви радикалов фиксированы условиями: $\text{Im}(\gamma^2 - 1)^{1/2} < 0$ при $-1 < \gamma < 1$ и $(\gamma + 1)^{1/2} > 0$ при $\gamma > -1$. Контур интегрирования проходит по точкам $\gamma + i0$ при $\gamma < -1$ и $\gamma - i0$ при $\gamma > -1$. Значения функции φ при $\omega < 0$ определяются соотношением $\varphi(\omega) = \overline{\varphi(-\omega)}$, где черта означает комплексное сопряжение. Соответствующая картина волновых фронтов при $t > 0$ показана на фиг. 1.

Учет условия (4) в процессе решения задачи позволяет определить поведение на бесконечности соответствующих Фурье — образов искоемых функций, откуда следуют асимптотические формулы для напряженного состояния у вершины выреза:

$$\tau_{xz} = -\frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (r \ll ct) \quad (6)$$

Здесь коэффициент интенсивности $K(t) = \sqrt{2}U/(\pi ct)^{1/2}$ неограниченно растет при $t \rightarrow 0$ и может быть найден общепринятым способом [1, 2] интегрирования по частоте коэффициента интенсивности соответствующей стационарной задачи. Однако такой способ определения $K(t)$ не гарантирует правильности результата на всем диапазоне времен. Так, в нашем случае асимптотика (6) не является равномерной и дает главную часть решения лишь при достаточно больших по сравнению с r/c временах. Поэтому при $t \sim r/c$ напряженное состояние в окрестности конца трещины нельзя описывать при помощи коэффициента интенсивности.

Рассмотрим точное решение. Интегралы в (5) могут быть вычислены при помощи приемов контурного интегрирования. Опуская выкладки, приведем окончательные выражения для функций напряжения и смещения на линии разреза

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= U[\mu \delta(ct) + H(ct-x)\mu[(ct-x)/x]^{1/2}/(\pi ct)] \quad (y=0, x>0) \\ \tau_{xz} &= 0 \quad (y=0, x>0), \quad u = UH(t) \quad (y=0, x>0) \\ \tau_{xz} &= \mp (\mu/\pi)H(ct+x)U[-x(ct+x)]^{-1/2} \quad (y=\pm 0, x<0) \\ u &= U[H(t) \pm H(t) \mp (2/\pi)H(ct+x) \arctg[(ct+x)/(-x)]^{1/2}] \quad (y=\pm 0, x<0) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Как следует из (7), при $t \sim r/c$ поведение напряжений у вершины выреза имеет более сложный, чем в (6) характер, а на фронте дифрагированной волны наблюдается корневая особенность. При $r \ll ct$ из (7) будут следовать соответствующие формулам (6) при $\theta=0$ выражения.

Попытка оценить значение предельной интенсивности U_* , при которой будет происходить разрушение, обычными способами связаны с определенными трудностями. В самом деле, коэффициент интенсивности $K(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, а формулы (6) теряют силу ввиду их относительного характера. Применение (7) и энергетического критерия Гриффитса [8] не дает возможности получить конечное значение предельной интенсивности, так как скорость освобождающейся энергии также неограниченно растет при $t \rightarrow 0$. Оценить предельную интенсивность в такого рода задачах можно при помощи обобщения известного в квазистатике силового подхода В. В. Новожилова. Таким обобщением может служить «импульсный» критерий следующего вида:

$$\max_t \int_{t-d/c}^t ds \int_0^d \sigma_1(s, x) dx = \frac{\sigma_c d^2}{c} \quad (8)$$

где d — характерный структурный параметр среды. Для сред с правильной атомной структурой d может трактоваться как межатомное расстояние; $\sigma_1(t, x)$ — максимальное растягивающее напряжение, σ_c — теоретическая прочность. Проводя на основании (7) необходимые вычисления, получаем

$$F(t) = \begin{cases} U\mu/2 & (0 < t \leq d/c) \\ U\mu \{ [d(ct-d)]^{1/2} + ct \arcsin(d/ct)^{1/2} \} / (\pi ct) & (t > d/c) \end{cases}$$

$$F(t) = \int_0^d \sigma_1(t, x) dx$$

Соответствующий график показан на фиг. 2. Таким образом, на временном интервале $0 < t < d/c$ сила, действующая на «структурный элемент» со стороны волнового поля, максимальна и постоянна по величине. Начиная с момента $t = d/c$, она монотонно убывает, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к нулю. Учитывая сказанное, для предельной интенсивности ударного импульса из (8) имеем

$$U_* = {}^{2/3} \sigma_c d / \mu \quad (9)$$

Так, например, если $\sigma_c = 0,1 E$, а коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$, то $U_* = 0,16 d$. Выразим (9) через удельную плотность поверхностной энергии $\gamma_* = \pi(1-\nu^2) \sigma_c^2 d / (4E)$ [8]; получим $U_* = 16\gamma_* [3\sigma_c \pi(1-\nu)]^{-1}$, т. е. в формуле для U_* наряду с удельной поверхностной энергией γ_* участвует теоретическая прочность σ_c . Возможность определения предельной интенсивности по существу связана с применением «двухпараметрического» силового подхода, который в квазистатическом случае непосредственно переходит в энергетический критерий. Принципиальная особенность рассмотренной ситуации состоит в том, что такого перехода здесь нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисковский В. Г., Партон В. З. Динамическая механика разрушения // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, т. 16. С. 1-78.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212-222.
4. Поручиков В. В. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. Соболев С. Л. Теория дифракции плоскости волн // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1934. № 41. 23 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
7. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.III.1987

УДК 539.374

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ УДАРЕ

КАНГУР Х. Ф., КЛЕЙС И. Р.

Важным показателем, характеризующим упругопластический удар, является коэффициент восстановления по Ньютону k . В литературе приводятся значения k , определенные по классическому методу удара падающего шарика о пластину: $k =$