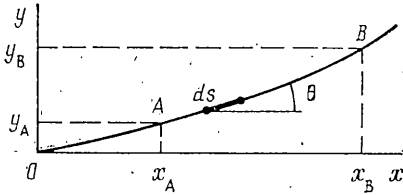


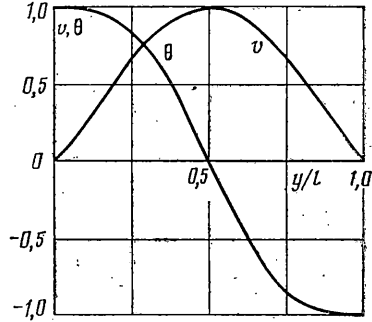
УСТОЙЧИВОСТЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ

АЛФУТОВ Н. А., ПОПОВ Б. Г.

С помощью энергетического критерия устойчивости, не требующего определения начального напряженного состояния, получено решение задачи устойчивости прямого упругого стержня, осевые сжимающие силы в котором возникают вследствие взаим-



Фиг. 1



Фиг. 2

ного гравитационного притяжения его частиц. Задачи устойчивости самогравитирующих упругих систем впервые были рассмотрены в [1]. Основная специфическая особенность таких задач заключается в поведении гравитационных сил при отклонениях системы от исходного состояния равновесия: результирующая сила, действующая на каждый элемент системы, со стороны всех ее других элементов, зависит интегральным образом от деформации всей системы. Задача устойчивости прямого стержня, находящегося под действием только собственных гравитационных сил, исследовалась в [2].

1. Задачу устойчивости свободного стержня, находящегося в собственном гравитационном поле, рассмотрим в обычной линеаризованной постановке. Поскольку определение начальных напряжений в самогравитирующем стержне связано с трудностями [1], целесообразно проводить исследование с помощью энергетического критерия бифуркационной потери устойчивости в форме Тимошенко, не требующей определения начальных напряжений [3]. Свободный стержень может терять устойчивость без растяжения оси; поэтому те дополнительные перемещения второго порядка малости, на каких совершают работу внешние силы при потере устойчивости (в данном случае гравитационные силы), определяются особенно просто из чисто геометрических соотношений [4]. Итак, энергетический критерий берем в виде

$$\delta(\Delta W) = \delta(\Delta U + \Delta V) = 0 \tag{1.1}$$

здесь  $\Delta W$  — изменение полной потенциальной энергии,  $\Delta U$  — изменение внутренней энергии, равное энергии изгиба стержня

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds \tag{1.2}$$

где  $EI$  — изгибная жесткость стержня,  $\theta$  — угол наклона касательной к оси стержня,  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль нерастяжимой оси стержня,  $l$  — длина стержня.

Изменение потенциала гравитационных сил  $\Delta V$  равно

$$\Delta V = - \int_0^l \left\{ \int_s^l G \frac{m(s)m(s_1)}{(s_1-s)^2} \Delta_{AB} ds_1 \right\} ds \tag{1.3}$$

В это выражение входит определяемая законом Ньютона сила взаимодействия  $Gm(s)m(s_1)dsds_1/(s_1-s)^2$  двух элементарных масс стержня, расположенных в точках  $A$  и  $B$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m=m(s)$  — погонная масса стержня,  $(s_1-s)$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$  до потери устойчивости. Эта сила при изгибе стержня совершает работу на относительном сближении точек  $A$  и  $B$ , обозначенном в выражении (1.3) через  $\Delta_{AB}$ , причем величина этого сближения должна быть подсчитана с точностью до квадратичных слагаемых относительно  $\theta$ . Из фиг. 1 следует:

$$x_A = \int_0^s \cos \theta ds, \quad y_A = \int_0^s \sin \theta ds, \quad x_B = \int_0^{s_1} \cos \theta ds, \quad y_B = \int_0^{s_1} \sin \theta ds \tag{1.4}$$

Новое расстояние между точками  $A$  и  $B$  на изогнутом стержне равно  $[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2]^{1/2}$ . Следовательно,

$$\Delta_{AB} = (s_1 - s) - \left[ \left( \int_0^s \cos \theta ds - \int_0^{s_1} \cos \theta ds \right)^2 + \left( \int_0^s \sin \theta ds - \int_0^{s_1} \sin \theta ds \right)^2 \right]^{1/2}$$

и, ограничиваясь в разложениях квадратами угла  $\theta$ , получим

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{2} \left[ \int_s^{s_1} \theta^2 ds - (s_1 - s)^{-1} \left( \int_s^{s_1} \theta ds \right)^2 \right] \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta W = & \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_s^l \frac{Gm(s) m(s_1)}{(s_1 - s)^2} \left[ \int_s^{s_1} \theta^2 ds - (s_1 - s)^{-1} \left( \int_s^{s_1} \theta ds \right)^2 \right] ds_1 \right\} ds \end{aligned} \quad (1.6)$$

Полученный функционал имеет довольно сложную структуру, но не содержит (и это главное) никаких неустранимых особенностей, какие появляются при определении начальных сил в одномерной модели самогравитирующего стержня [1].

2. Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, у которого  $m(s) = \rho S$ , где  $\rho$  — плотность материала стержня,  $S$  — площадь поперечного сечения. Тогда функционал (1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta W = & \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds - \\ & - \frac{G\rho^2 S^2}{2} \int_0^l \int_s^l \left[ (s_1 - s)^{-2} \int_s^{s_1} \theta^2 ds - (s_1 - s)^{-3} \left( \int_s^{s_1} \theta ds \right)^2 \right] ds_1 ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для оценки критической длины стержня  $l_*$  воспользуемся методом Рэлея — Ритца, взяв простейшую аппроксимирующую функцию  $\theta = cs$ , где  $c$  — свободный параметр. После несложных преобразований получим

$$\Delta W = 1/2 c^2 (EI l - G\rho^2 S^2 l^3 / 72) \quad (2.2)$$

Из условия (4.1) находим (при  $c \neq 0$ ) критическое соотношение между параметрами стержня ( $k=72$ ):

$$l_*^2 = kEI / (G\rho^2 S^2) \quad (2.3)$$

Это соотношение определяет критическую длину самогравитирующего стержня, т. е. значение длины, при превышении которой его прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой.

Приведенное решение не претендует на высокую точность, но дает структуру критического соотношения между параметрами стержня и оценку порядка величин критических параметров. Дальнейшее уточнение значения коэффициента  $k$  в формуле (2.3) целесообразно вести численно.

3. Рассмотрим дискретную модель стержня, состоящую из безмассовых элементов, имеющих изгибную жесткость, и  $(N+1)$  узлов, в которых находятся сосредоточенные массы  $M_i$ . Функционал изменения полной потенциальной энергии  $\Delta W$  (1.6) в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta W = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} EI_i \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds - \\ & - \frac{G}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N+1} \frac{M_i M_j}{(s_j - s_i)^2} \left[ \int_{s_i}^{s_j} \theta^2 ds - (s_j - s_i)^{-1} \left( \int_{s_i}^{s_j} \theta ds \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

и воспользоваться линейной аппроксимацией угла поворота  $\theta$  в пределах каждого элемента

$$\theta = \theta_i + s(\theta_{i+1} - \theta_i) / \Delta_i \quad (s_i \leq s \leq s_{i+1}) \quad (3.2)$$

где  $\Delta_i$  — длина  $i$ -го элемента. Если выбрать в качестве обобщенных степеней свободы углы поворота сечений, т. е. компоненты вектора — столбца  $\Theta = \|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N+1}\|^T$ , то для (3.1) условие стационарности (1.1) приведет к обобщенной задаче на собственные значения

$$(A - kB)\Theta = 0 \quad (3.3)$$

где для стержня постоянного поперечного сечения  $k = G(\rho SI)^2/EI$ .

Для дискретной модели при равномерном разбиении на  $N$  конечных элементов и аппроксимациях (3.2) матрица жесткости системы получается путем суммирования (по схеме метода конечных элементов) матриц  $A_{(i)}$ :

$$A_{(i)} = N \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица приведенных начальных напряжений  $B$  в (3.3) вычисляется следующим образом:

$$B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N+1} (B_{ij}^I + B_{ij}^{II}), \quad B_{ij}^I = \frac{1}{N} \frac{m_i m_j}{(j-i)^2} C_{ij}^I$$

где  $m_k = 1/2$  при  $k=1, N+1$  и  $m_k = 1$  при  $2 \leq k \leq N$ , а  $C_{ij}^I$  получается суммированием по схеме МКЭ ( $j-i$ ) матриц  $b$ :

$$b = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{vmatrix}$$

и образует ленточную симметричную матрицу, занимающую строки от  $i$  до  $j$ . Ненулевые коэффициенты матрицы  $B_{ij}^{II}$  образуют квадратный матричный блок, располагающийся в пределах строк и столбцов с номерами  $i$  и  $j$ :

$$B_{ij}^{II} = -\frac{1}{N} \frac{m_i m_j}{(j-i)^3} C_{ij}^{II}$$

$$C_{ij}^{II} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Результаты решения обобщенной задачи на собственные значения (3.3) приведены ниже ( $n$  — число элементов):

$n$	2	4	8	16	32	80
$k$	64	54	51	50	49,76	49,68

Таким образом уточненное значение коэффициента  $k$  в формуле (2.3) можно принять равным 49,7.

Форма потери устойчивости стержня показана на фиг. 2, где  $v$  — нормальный прогиб,  $\theta$  — угол поворота нормали.

Задачи устойчивости самогравитирующих систем поучительны с нескольких точек зрения. Прежде всего в них привлекает внимание уже упоминавшаяся необычная интегральная зависимость поведения местных результирующих сил от деформации всей системы, качественно усложняющая решение задачи устойчивости. Но, кроме того, в этих задачах оказалось очень трудно найти начальное напряженное состояние. В [1] это удалось сделать для кольца и стержня только прямоугольного поперечного сечения, для чего пришлось решать объемную задачу самогравитации, поскольку одномерные модели самогравитирующего кольца и самогравитирующего стержня при определении начальных напряжений приводили к неустраиваемым особенностям.

Однако, как показывает приведенное решение задачи устойчивости самогравитирующего стержня, делать это не обязательно. Определять докритическое состояние системы при решении задачи устойчивости необходимо только в тех случаях, когда начальное напряженное состояние отыскивается в нелинейной постановке. В тех случаях, когда начальное напряженное состояние определяется с помощью уравнений линейной теории упругости, задачи устойчивости можно решать не определяя начальных напряжений в системе (см., например, [5]).

Отметим, что использованный в [2] функционал справедлив только для «мертвых» внешних сил и специфику поведения гравитационных сил этот функционал не отражает. Кроме того, принятый в [2] закон распределения начальных сил в стержне отличен от результата [1]. Окончательная формула для критической длины стержня из [2] имеет вид (в обозначениях этой статьи):  $l_*^4 = \lambda EI / (\pi G \rho^2 S)$ , где  $\lambda = 42$ . Структура этой формулы качественно отличается от структуры (2.3). Как пред-

ставляется, это отличие обусловлено принятым в [2] законом распределения начальных сил в стержне. В настоящей работе начальные силы вообще не фигурировали в решении, а структура формулы (2.3) оказывается такой же, какая следует из закона распределения начальных сил [1].

Приведем несколько цифр, характеризующих степень опасности потери устойчивости стержней при действии гравитационных сил. Критическая длина стального стержня с постоянным квадратным сечением будет равна  $\sim 14 \cdot 10^3$  км. Причем, как это следует из структуры формулы (2.3), значение  $l_*$  не зависит от размера поперечного сечения.

В качестве второго примера рассмотрим свободный безмассовый стержень с закрепленными на его концах сосредоточенными массами. В этом случае для произвольной длины стержня критический момент инерции сечения будет равен  $J_* = GM_1M_2/(\pi^2E)$  и для стального стержня с квадратным сечением при  $M_1=M_2=10^6$  кг получим значение поперечного размера, равное  $\sim 4,5$  мм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. О некоторых необычных примерах устойчивости равновесия упругих систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 130–136.
2. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ. 1986. 224 с.
3. Алфугов Н. А., Балабух Л. И. Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряженного деформированного состояния // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 703–707.
4. Алфугов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1978. 311 с.
5. Алфугов Н. А., Попов В. Г. Расчет локально-нагруженных прямоугольных пластин на устойчивость вариационным методом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 120–126.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VI.1987

УДК 539.375

### К РАСЧЕТУ ПРЕДЕЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

МОРОЗОВ Н. Ф., ПЕТРОВ Ю. В., УТКИН А. А.

Основным параметром, позволяющим оценивать прочность упругих сред с трещинами, описываемых классической теорией упругости, служит коэффициент интенсивности напряжений. Его определение является одним из решающих моментов при оценке предельных нагрузок не только в статических, но и во многих динамических задачах, когда главный член асимптотики напряжений около вершины трещины характеризуется корневым ростом, имеет угловое распределение, аналогичное статическому, а инерционный эффект проявляется в том, что коэффициент интенсивности зависит от времени [1, 2]. Однако, когда прикладываемое воздействие отличается сильной сингулярностью, то известные асимптотические формулы, описывающие напряженное состояние у вершины трещины, не являются равномерными и справедливы лишь на достаточно больших по сравнению с  $r/c$  временах; здесь  $r$  — расстояние до вершины,  $c$  — скорость распространения колебаний. В этом случае применение коэффициента интенсивности оказывается невозможным. Оценка предельной интенсивности, при которой будет происходить разрушение, в таких задачах может быть проведена при помощи подхода, предложенного Новожиловым [3].

Рассмотрим задачу о нормальном падении антиплоской ступенчатой волны перемещения на полубесконечную трещину  $y=\pm 0$ ,  $x \leq 0$ , берега которой свободны от внешних нагрузок. Во внутренних точках разрезанной вдоль  $y=0$ ,  $x \leq 0$  плоскости напряженно-деформированное состояние описывается уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = \mu \partial u / \partial x, \quad \tau_{yz} = \mu \partial u / \partial y$$

Условие отсутствия нагрузок на разрезе выражается соотношением

$$\partial u / \partial y = 0, \quad (x \leq 0, y = \pm 0) \quad (2)$$

В моменты времени, предшествующие взаимодействию падающей волны с полубесконечной трещиной, волновое поле описывается функцией:

$$u|_{t < 0} = UH(ct+y), \quad c > 0 \quad (3)$$