

УДК 624.072.24

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СКРУЧИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ

ГИБЯНСКИЙ Л. В., ЧЕРКАЕВ А. В.

Рассмотрена задача оптимального размещения нескольких материалов по сечению скручиваемого призматического стержня. Материалы предполагаются нелинейно-упругими либо упругопластическими, количество каждого материала задано. Цель проектирования — максимизация либо минимизация запасаемой упругой энергии при фиксированном угле закручивания единицы длины стержня. Показано, что эта проблема сводится к решению задачи кручения или некоторого нелинейного материала, закон состояния которого определяется данными оптимальной задачи. Проект характеризуется наличием зон пространственных скользящих режимов управления, которые в данном случае представляют собой области, занятые бесконечно часто чередующимися слоями из исходных материалов, расположенных либо вдоль линий уровня функции Прандтля (задача максимизации момента), либо поперек их (задача минимизации проекта). Приводятся примеры оптимальных проектов стержней круглого и квадратного поперечного сечения, изготовленных из двух упругопластических материалов. Задача об оптимальном решении линейно-упругих материалов изучалась в [4–7].

1. Рассмотрим цилиндрический стержень, изготовленный из N изотропных нелинейно-упругих материалов. Каждый из материалов характеризуется плотностью энергии G_i (i — номер материала), зависящий от модуля градиента функции Прандтля φ : $G_i = G_i(|\nabla \varphi|)$; функций G_i — выпуклые, возрастающие и такие, что $G_i(0) = 0$. Пусть односвязное сечение стержня S разбито на подобласти S_i ($\cup S_i = S$, $i = 1, \dots, N$), подобласть S_i занята i -м материалом. Функция Прандтля φ , определяющая напряженное состояние стержня, является решением вариационной задачи (суммирование здесь и далее по i от 1 до N);

$$I(\chi_1, \dots, \chi_N) = \sup_{\varphi} \int_S [2\varphi\theta_0 - \sum \chi_i G_i(|\nabla \varphi|)] dS, \quad \varphi \in W_p^{01}(S) \quad (1.1)$$

$$\chi_i(x) = 1 \quad (x \in S_i), \quad \chi_i(x) = 0 \quad (x \notin S_i)$$

где $W_p^{01}(S)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на границе ∂S области S , обладающих производными, суммируемыми с p -й степенью; число p должно быть выбрано так, чтобы существовал интеграл в правой части (1.1). Функционал $I(\theta_0)$ численно равен работе, произведенной внешним крутящим моментом M при закручивании единицы длины стержня на угол θ_0 , и характеризует крутильную жесткость стержня из нелинейного материала. Если материалы линейно-упругие (M линейно зависит от θ), то $I(1)$ равен значению крутящего момента, нужного, чтобы закрутить единицу длины стержня на единичный угол.

Сформулируем задачи оптимального проектирования.

Требуется найти такие функции $\chi_1, \dots, \chi_N$, чтобы функционал (1.1) достигал своего супремума или инфимума

$$I(\chi_1, \dots, \chi_N) \rightarrow \sup_{\chi_1, \dots, \chi_N} \quad (1.2)$$

$$I(\chi_1, \dots, \chi_N) \rightarrow \inf_{\chi_1, \dots, \chi_N} \quad (1.3)$$

при условии, что заданы площади областей, занятых каждым из мате-

$$\int_S \chi_i(x) dS = s_i \text{ mes } S \quad (i=1, \dots, N), \quad \sum s_i = 1 \quad (1.4)$$

Отметим, что в отличие от задач проектирования линейно-упругой конструкции вид оптимального проекта зависит от амплитуды воздействий, на которые он рассчитывается, т. е. от угла крутки θ_0 .

Покажем, что задача (1.2), (1.4) (или (1.3), (1.4)) сводится к решению задачи кручения стержня, изготовленного из некоторого нового нелинейного материала, функция энергии которого определяется параметрами задачи.

2. Учтем ограничения (1.4) множителями Лагранжа $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ и составим расширенный функционал задачи (1.2), (1.4) о максимизации крутящегося момента

$$J = \sup_{\chi_1, \dots, \chi_N} \{ I(\chi_1, \dots, \chi_N) - \sum \gamma_i \int_S \chi_i dS \}$$

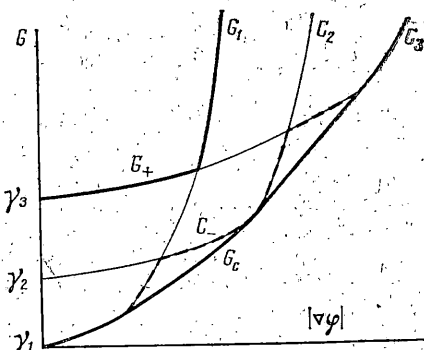
Изменяя порядок взятия супремумов по φ и χ_i , получим

$$\begin{aligned} J &= \sup_{\varphi} \left\{ \sup_{\chi_1, \dots, \chi_N} \int_S [2\varphi\theta_0 - \sum \chi_i (G_i(|\nabla\varphi|) + \gamma_i)] dS \right\} = \\ &= \sup_{\varphi} \int_S [2\varphi\theta_0 - G_-(|\nabla\varphi|)] dS \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$G_i(|\nabla\varphi|) = \min_i [G_i(|\nabla\varphi|) + \gamma_i] \quad (i=1, \dots, N)$$

Функция G_- зависит как от $|\nabla\varphi|$, так и от множителей γ_i ; параметры γ_i определяются данными задачи (1.2), (1.4). Эта функция (штриховая линия на фиг. 1), вообще говоря, не выпукла, поэтому супремум в (2.1) может не соответствовать никакой функции χ_i [8], что приводит к возникновению скользящих режимов управления — областей бесконечно частой осцилляции управлений χ_i и, следовательно, функции $\nabla\varphi$ [7]. Для решения проблемы (2.1) необходимо перейти к релаксированной форме задачи, заменив интегрант G_- его выпуклой оболочкой G_c [8, 9], равной

$$\begin{aligned} G_c(v) &= \min_{m_i, v_i} \sum m_i [G_i(v_i) + \gamma_i], \\ \sum m_i &= 1, \quad \sum m_i v_i = v \end{aligned} \quad (2.2)$$



Фиг. 1

При такой замене релаксированная задача будет иметь решение; точная верхняя грань исходной задачи будет совпадать с максимумом релаксированной; будет существовать такая последовательность управлений (реализующая скользящий режим управления), что значения функционала на ней стремятся к значению функционала релаксированной задачи, а среднее по малой окрестности любой точки значение аргумента функций G_- стремится к значению аргумента функции G_c , на котором достигается решение релаксированной задачи.

Интегрант (2.2) зависит от скалярного аргумента $v(x)$ — осредненного по малой окрестности точки x значения модуля градиента φ . Из определения релаксированной задачи [8] следует, что существует последовательность $\{\chi_i^h\}$, такая, что сам этот аргумент представляет собой модуль градиента осредненного потенциала $|\nabla\langle\varphi\rangle|$ (треугольные скобки — символ осреднения по малой окрестности точки x): $G_c = G_c(\langle|\nabla\varphi|\rangle) = G_c(|\nabla\langle\varphi\rangle|)$. Иначе говоря, G_c представляет собой энергию новой нелинейной эффективной среды, т. е. энергию композита, изготовленного из

исходных материалов путем их перемешиваний, а функция $\langle \varphi \rangle$ представляет собой потенциал задачи кручения стержня из композитного материала. Опишем свойства эффективной среды. Функция G_c на некоторых интервалах изменения совпадает с одной из функций $(G_i + \gamma_i)$, а в остальных интервалах, соответствующих скользящим режимам, линейно зависит от $|\nabla \varphi|$ (фиг. 1), причем на каждом таком интервале она является выпуклой комбинацией значений лишь двух функций [10]:

$$\begin{aligned} G_c(|\nabla \varphi|) &= m[G_i(|\nabla \varphi|_i) + \gamma_i] + \\ &+ (1-m)(G_j(|\nabla \varphi|_j) + \gamma_j) \\ i \neq j, \quad m \in [0, 1]; \quad |\nabla \varphi| &= m|\nabla \varphi|_i + (1-m)|\nabla \varphi|_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

Управляющие функции χ_i, χ_j на рассматриваемом материале бесконечно часто осциллируют, причем $\langle \chi_i \rangle = m, \langle \chi_j \rangle = 1-m, m$ — концентрация i -го материала в композите.

Решение вариационной задачи

$$\max_{\varphi} \int_S [2\varphi\theta_0 - G_c(|\nabla \varphi|)] dS \quad (2.4)$$

позволяет определить значение осредненного по малой окрестности градиента функции Прандтля φ . Уравнение Эйлера этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \varepsilon + 2\theta_0 &= 0 \\ \varepsilon &= \frac{dG_c(|\nabla \varphi|)}{d(|\nabla \varphi|)} = \frac{dG_c}{d|\nabla \varphi|} \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ε — вектор, составленный из компонент сдвиговых деформаций. Уравнение (2.5) выражает условие совместности деформаций. В зонах скользящего режима, где G_c — линейная функция $|\nabla \varphi|$, модуль вектора ε постоянен.

Определим микроструктуру композита, т. е. минимизирующую (2.1) последовательность $\{\chi_i^h\}$. Она должна удовлетворять некоторым требованиям.

Модуль осредненного значения φ должен совпадать с осредненным значением модуля φ (это следует из свойства релаксированной задачи). Поскольку модуль вектора — выпуклая функция его координат, то векторы $\nabla \varphi_i$ и $\nabla \varphi_j$, определяющие напряжения в фазах, должны быть параллельны.

На линии Γ , разделяющей зоны, занятые i -м и j -м материалами, должна быть непрерывна касательная составляющая вектора $\Delta \varphi$ (t — касательная к линии раздела):

$$\nabla \varphi_i \cdot t = \nabla \varphi_j \cdot t \quad (2.6)$$

Совместить указанные требования можно, если допустить, что непрерывная компонента вектора $\nabla \varphi$ равна нулю $\nabla \varphi(x) \cdot t = 0, \forall x \in \Gamma$ (тогда $|\nabla \varphi| = \nabla \varphi(x) \cdot n, \forall x \in \Gamma, n$ — нормаль) или, иными словами, предположив, что оптимальный композит представляет собой слоистый материал со слоями, ориентированными вдоль линий уровня функции φ . Одновременно можно заметить, что поля в i -м слое постоянны в малой окрестности точки и реализуют величины $\nabla \varphi_i$ в формуле (2.3).

Величины $|\nabla \varphi|_i$ определяются координатами концов интервалов несовпадения выпуклой оболочки G_c с функциями $(G_i + \gamma_i), (G_j + \gamma_j)$ (фиг. 1), а среднее значение $|\nabla \varphi|$ меняется внутри этих интервалов лишь вследствие изменения параметров m_i, m_j — концентраций материалов в слоях.

3. Рассмотрим задачу (1.3), (1.4) о минимизации запасаемой стержнем упругой энергии. Расширенный функционал имеет вид

$$J = \inf_{\chi_1, \dots, \chi_N} \sup_{\varphi} \int_S [2\varphi\theta_0 - \sum \chi_i (G_i(|\nabla \varphi|) + \gamma_i)] dS \quad (3.1)$$

Переставляя операции $\inf$ и $\sup$, получим оценку

$$J \geq J_+ = \sup_S \int [2\varphi\theta_0 - G_+(|\nabla\varphi|)] dS \quad (3.2)$$

$$G_+(|\nabla\varphi|) = \max_i [G_i(|\nabla\varphi|) + \gamma_i] \quad (i=1, \dots, N).$$

В отличие от G_- функция G_+ выпукла и всюду совпадает с одной из функций $(G_i + \gamma_i)$; задача (3.2) имеет решение. Заметим, что G_+ характеризуется, вообще говоря, наличием угловых точек $|\nabla\varphi|_{ij}$, где $G_i + \gamma_i = G_j + \gamma_j$; в этих точках не определена производная $dG_+/d|\nabla\varphi|$, т. е. не определена деформация (фиг. 1). Известно лишь, что

$$dG_+/d|\nabla\varphi| \leq |\varepsilon| \leq dG_j/d|\nabla\varphi| \quad (3.3)$$

Докажем, что в оценке (3.2) знак равенства действительно достигим. Пусть $\varphi(x)$ — решение задачи с функционалом J_+ . Построим последовательность $\{\varphi^k(x)\}$, минимизирующую (3.1), слабо сходящуюся к $\varphi(x)$ и такую, что последовательность значений $\{J(\varphi^k)\}$ сходится к $J_+(\varphi)$, т. е. покажем, как реализовать это решение исходными материалами. В тех частях области S , где $|\nabla\varphi| = |\nabla\varphi|_{ij}$, помещается один из имеющихся материалов. Зоны, где $|\nabla\varphi| = |\nabla\varphi|_{ij}$, могут, вообще говоря, иметь ненулевую меру. В этих областях поместим слоистый композит, ориентируя слои вдоль направления $\nabla\varphi$ (поперек линии уровня): $|\nabla\varphi| = \nabla\varphi \cdot t$. Условие (2.6) покажет, что $|\nabla\varphi|$ действительно постоянен в композитном материале. Таким образом, задача (1.3), (1.4) также характеризуется возникновением скользящих режимов, связанных теперь не с выпуклостью интегранта, а с его негладкостью. Осредненный модуль вектора ε равен

$$|\varepsilon| = m dG_i/d|\nabla\varphi| + (1-m) dG_j/d|\nabla\varphi| \quad (3.4)$$

он изменяется в интервале (3.3), когда концентрация i -го материала изменяется от 0 до 1. Функция $m(x)$ является решением системы из уравнения (3.4), условия совместимости (2.5) и условия постоянства $|\nabla\varphi|$ по x .

Итак, решение задач оптимального проектирования (1.2), (1.4) и (1.3), (1.4) может быть сведено к решению задач кручения стержней из нелинейных материалов с энергиями G_- и G_+ соответственно. Эти функции зависят от вектора параметров $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$. По решению задач кручения (2.5), (3.2), в которых векторы γ фиксированы, можно восстановить распределения материалов по сечению оптимальных стержней. Это распределение включает зоны, где материалы бесконечно часто чередуются (т. е. зоны композитов). Затем следует вычислить площади, занятые каждым из материалов и сравнить эти значения с ограничениями (1.4). Чтобы удовлетворить (1.4), следует градиентным методом произвести выбор векторов γ . Отметим, что решения задач (1.2), (1.3) в отсутствие ограничений (1.4) ($\gamma=0$) является тривиальным в случае линейно-упругих материалов, когда $G_i = |\nabla\varphi|^2/(2\mu_i)$, где μ_i — модуль сдвига i -го материала. Стержень в этом случае состоит из самого жесткого (мягкого) материала. В нелинейном же случае задача имеет тривиальное решение, лишь когда одна из функций G_i меньше (больше) остальных на всем интервале изменения аргумента.

Задача (1.2), (1.4) для линейно-упругих материалов решена в [2, 3] для стержня круглого сечения S , когда ввиду осевой симметрии условие (2.6) автоматически выполнено и скользящих режимов не возникает. Эта задача для стержня произвольного сечения изучалась в [5], где были построены зоны скользящих режимов, исходя из анализа необходимых условий оптимальности, и были численно получены оптимальные проекты. Задача (1.3), (1.4) о мягком стержне из нелинейно-упругих фаз изучалась в [1, 5]. В работе [11] рассмотрена задача оптимального проектирования упругопластического стержня максимальной несущей способности.

4. Рассмотрим стержень, составленный из упругопластических материалов, закрученный на угол θ_0 , и предположим, что в процессе закручивания не происходила разгрузка ни в одной точке сечения стержня. Напряженное состояние такого стержня описывается вариационным прин-

ципом (4.1), где функции $G_i(|\nabla\varphi|)$ равны [12]:

$$G_i(|\nabla\varphi|) = |\nabla\varphi|^2/(2\mu_i); (|\nabla\varphi| \leq \tau_{pi}) \quad G_i(|\nabla\varphi|) = \infty \quad (|\nabla\varphi| > \tau_{pi}) \quad (4.1)$$

где μ_i — модуль сдвига, а τ_{pi} — предел текучести i -го материала.

Функция (4.4) может рассматриваться как функция G_+ задачи минимизации жесткости стержня, изготовленного из двух упругих материалов, когда податливость одного из них стремится к бесконечности: $G_i = \lim_{v \rightarrow \infty} G_+^i(v)$, $G_+^i(v) = \max\{|\nabla\varphi|^2/(2\mu_i); 0,5v|\nabla\varphi|^2 + \gamma_i(v)\}$, $\gamma_i(v) = 0,5\tau_{pi}^2(\mu_i^{-1} - v)$.

Функция G_+^i имеет излом в точке $|\nabla\varphi| = \tau_{pi}$, этой точке может соответствовать слоистый композит, причем слои направлены поперек линий уровня функции φ . Случаю (4.1) при $v \rightarrow \infty$ отвечает ситуация, когда количество второго материала стремится к нулю, а его податливость — к бесконечности. Средняя деформация в точке $|\nabla\varphi| = \tau_{pi}$ определяется формулой (3.4); когда $v \rightarrow \infty$, то $m \rightarrow 1$, $dG_i/d|\nabla\varphi| \rightarrow \infty$ и $(1-m)dG_i/d|\nabla\varphi| \rightarrow l > 0$. Условие (3.4) показывает, что модуль деформации $|\varepsilon|$ больше предельной упругой деформации материала μ_i : $|\varepsilon| > |\nabla\varphi|/\mu_i$. Линии проскальзывания могут трактоваться как линии слоев, l — как интенсивность проскальзывания; направление слоев соответствует проскальзыванию по направлению максимального касательного напряжения [13].

Поставим задачу отыскания проекта стержня максимальной жесткости, под которой теперь будем понимать запасаемую стержнем упругую энергию $I(\theta_0)$, т. е. работу, которую он может произвести при разгрузке; количества материалов будем считать заданными. Решение этой задачи сводится к задаче (2.4) для нелинейно упругопластического материала G_+ . Опишем типы слоистых композитов в оптимальном проекте, которые возникают в тех зонах, где выпуклая оболочка не совпадает с энергией G_+ в одной из фаз.

1. Если выпуклая оболочка гладко касается $G_i + \gamma_i$ и $G_j + \gamma_j$, то слои состоят из материалов, находящихся в упругом состоянии.

2. Если одна из точек касания равна τ_{pi} , то материал μ_i находится в слоях в пластическом состоянии, причем линии проскальзывания перпендикулярны направлению слоев. Таким образом, слоистая структура препятствует развитию пластического течения. Деформации ε в обоих материалах равны друг другу и определяются наклоном прямой: $|\varepsilon| = -dG_+/d|\nabla\varphi|$.

Отметим, что угловой точке G_+ соответствует область ненулевой меры, в которой материал находится в пластическом состоянии: $|\nabla\varphi| = \text{const}$, а модуль вектора деформации $|\varepsilon|$ меняется в интервале (3.3). В зоне, где $G_+ \neq G_i + \gamma_i$ (участки линейной зависимости G_+ от $|\nabla\varphi|$), картина обратная: модуль вектора напряжений $|\nabla\varphi|$ изменяется, а постоянен модуль вектора деформаций $|\varepsilon| = \text{const}$.

В качестве первого примера рассмотрим стержень круглого сечения, изготовленный из двух упругопластических материалов вида (4.1). Задача имеет осевую симметрию $\varphi = \varphi(r)$, $\varepsilon = \varepsilon(r)$, что позволяет явно проинтегрировать уравнение совместности (2.5). Для вектора $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi)$ имеем $\varepsilon_r = -2r\theta_0$, $\varepsilon_\varphi = 0$. Модуль вектора ε — строго монотонная функция. Поэтому зоны скользящих режимов управления, где модуль $|\varepsilon|$ постоянный, вырождаются в точки скачков функции $|\nabla\varphi|$, соответствующие точкам переключения управлений χ_i . Таким образом, оптимальный проект в данном случае представляет собой несколько кольцевых зон, занятых первым либо вторым материалом.

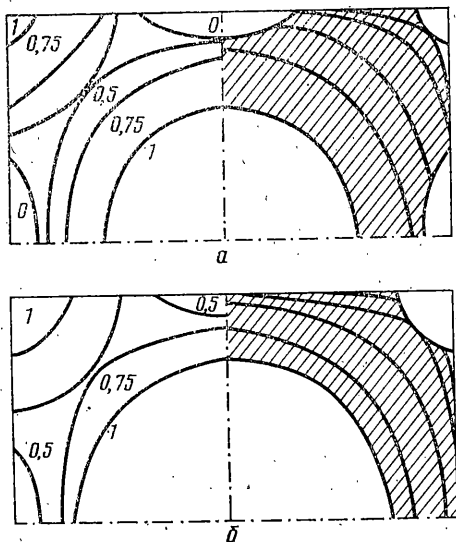
Пусть материалы таковы, что более жесткий из них имеет меньший предел текучести: $\mu_1 < \mu_2$, $\tau_{p1} > \tau_{p2}$. Пусть также радиус стержня равен единице: $r \in [0, 1]$, первый материал взят в количестве μ_1 , второй — в количестве μ_2 . Вид функции G_+ , а следовательно, и оптимальный проект зависят от множителя Лагранжа γ_1 , в свою очередь определяемого углом закручивания θ_0 , на который рассчитывается проект: $\gamma_1 = \gamma_1(\theta_0)$ (множитель γ_2 можно без ограничения общности положить равным нулю). Оптимальное расположение материалов в упругом стержне ($\tau_{p1} = \tau_{p2} \rightarrow \infty$) [2, 3] сле-

дующее: в центре располагается круг из более мягкого материала μ_1 , а внешнее кольцо занято жестким материалом μ_2 . Для упругопластических материалов (4.1) оптимальный проект усложняется благодаря тому, что жесткий материал переходит в пластическое состояние раньше мягкого, поэтому на периферии может быть выгоднее помещать мягкий материал с большим пределом текучести. Поскольку $|V\varphi|$ — неубывающая функция радиуса, то оптимальный проект имеет не более двух точек переключения: для небольших углов закручивания он совпадает с проектом оптимального упругого стержня, при больших θ_0 жесткий материал располагается в кольце $[r_0, (r_0^2 + s_2)^{1/2}]$, где r_0 — параметр, изменяющийся в интервале $[0, s_1^{1/2}]$, при дальнейшем увеличении θ_0 весь мягкий материал вытесняется на периферию ($r_0=0$). Последний проект является одновременно решением задачи о стержне максимальной несущей способности, которая определяется как максимальное значение функционала I , соответствующего углу $\theta_0 \rightarrow \infty$. Для определения параметра r_0 и вычисления функционала $I(\theta_0)$ можно применить следующую аналитическую процедуру: проинтегрировав уравнение задачи о напряженном состоянии стержня, в котором жесткий материал занимает кольцевую область $[r_0, (r_0^2 + s_2)^{1/2}]$, найти в явном виде значение $I(r_0, \theta_0)$; максимизировав по $r_0 \in [0, s_1^{1/2}]$ значение $I(r_0, \theta_0)$, найти оптимальное значение r_0^* величины r_0 и значение функционала $I(\theta_0) = I(r_0^*(\theta_0), \theta_0)$.

Для стержней некругового сечения характерны зоны скользящих режимов. Оптимальные проекты для стержней произвольных очертаний должны находиться численно. Опишем оптимальный проект упругопластического стержня квадратного сечения. Для численного определения оптимального проекта, т. е. для решения задачи (2.4), применялся метод локальных вариаций [14]. Величина γ_1 подбиралась так, чтобы выполнялось ограничение (1.4). В качестве первого приближения для γ_1 было взято значение этого параметра из аналитически решенной задачи оптимального проектирования круглого стержня, изготовленного из тех же количеств тех же материалов.

На фиг. 2, а представлен оптимальный проект для значений параметров $\mu_1=0,2$; $\mu_2=1,0$; $\tau_{p1}=1,0$; $\tau_{p2}=7,5$; $\theta_0=16,0$; $s_1=0,725$; $s_2=0,275$ ($\gamma_1=19$), а на фиг. 2, б — для значений параметров $\mu_1=0,2$; $\mu_2=1,0$; $\tau_{p1}=1,0$; $\tau_{p2}=5,5$; $\theta_0=16,0$; $s_1=0,85$; $s_2=0,15$ ($\gamma_1=18,5$). Ввиду симметрии проекта относительно осей, проходящих через середины сторон, изображены лишь четверти сечений оптимальных стержней. Слева на фиг. 2, а, б показаны линии уровня концентрации m ; значения $m=1$ и $m=0$ соответствуют зонам чистых первого и второго материалов. Справа на фиг. 2, а, б показаны направления слоев (заштрихованы области, в которых произошли пластические деформации).

Проект на фиг. 2, а незначительно отличается от соответствующего проекта линейно-упругого стержня [5]. При том угле закручивания, на который рассчитывается проект, в слоях будет расположен материал μ_1 , перешедший в пластическое состояние, и материал μ_2 в упругом состоянии. Проект на фиг. 2, б характеризуется отсутствием зон чистого материала μ_2 , который участвует лишь в образовании композита. При расчетном угле закручивания $\theta_0=16$ в композите оба материала находятся в пластическом напряженном состоянии, линии проскальзывания перпендикулярны направлению слоев.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Cea J., Malanowski K. An example of a max-min problem in partial differential equations // SIAM J. Control. 1970. V. 8. No. 3. P. 305–316.
2. Klosowicz B. Sur la nonhomogeneite optimale d'une barre torque // Bul. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. 1970. V. 18. No. 8. P. 611–615.
3. Klosowicz B., Lurie K. A. On the optimal non-homogeneity of a torsional/elastic bar // Arch. Mech. Stosow. 1971. V. 24. No. 2. P. 239–249.
4. Баничук Н. В. Об одной двумерной задаче оптимизации в теории кручения упругих стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 45–52.
5. Лавров Н. А., Лурье К. А., Черкаев А. В. Неоднородный стержень экстремальной жесткости кручения // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 86–92.
6. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука. 1980. 255 с.
7. Lurie K. A., Cherkaev A. V., Fedorov A. V. Regularization of optimal design problems for bars and plates I, II // J. Optimiz. Theory and Appl. 1982. V. 37. No. 4. P. 499–543.
8. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир. 1979. 399 с.
9. Kohn R., Strang G. Optimal design and relaxation of variational problems I, II, III // Commun. Pure and Appl. Math. 1986. V. 39. No. 1. P. 113–137; No. 2. P. 139–182; No. 3. P. 353–357.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973. 469 с.
11. Kohn R. V., Strang G. Optimal design for torsional rigidity // Hybrid and Mixed Finite Element Methods. N. Y.: Wiley. 1983. P. 281–288.
12. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехиздат. 1950. 396 с.
13. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 407 с.
14. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука. 1973. 238 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
28.XI.1986

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗРУШЕНИЯ АМОРФНЫХ ПЛЕНОК НА ОСНОВЕ ТИТАНА, ЖЕЛЕЗА И КОБАЛЬТА

ЗУЕВ Б. К., МИХАЙЛОВА Г. В., НОВИКОВ Н. П., СЕВАСТЬЯНОВ В. С.

Аморфные сплавы (АС) или так называемые металлические стекла обладают уникальными физическими свойствами [1–3]: они рассматриваются, как перспективные материалы для хранения водорода, так как проявляют пониженную водородную хрупкость по сравнению с кристаллическими сплавами [4, 5]. В настоящее время нет четкого представления о механизме разрушения АС. В публикуемой работе представлены результаты исследования процессов, происходящих при разрушении аморфных сплавов.

Образцы на основе титана разрушались растягивающей нагрузкой, а на основе железа и кобальта — путем продольного сдвига. Во всех образцах вдоль кромки разрушения образовывались множественные полосы сдвига, идущие под углом 45° к краю разрушения или параллельно ему. Полосы сдвига занимали область до 200 мкм от края разрушения и образовывали отдельные чередующиеся участки вдоль кромки разрыва.

При растяжении АС испытывают сильную локализованную деформацию сдвига. У кромки разрушения возникает серия полос сдвига, а на поверхности разрушения появляется характерный «венообразный» узор [1, 2, 6]. Присутствие водорода в АС может оказывать существенное влияние на процессы разрушения.

В экспериментах использовали аморфную ленту шириной 10 мм и толщиной от 30 до 70 мкм, изготовленную на основе титана, железа и кобальта [7]. Вблизи края разрушения измерялась микротвердость образцов, электромагнитные сигналы (ЭМС) (прибор описан в [8]), проводились электронно-микроскопические исследования, определялось распределение концентрации водорода по методике [9].

Измерения микротвердости АС на основе титана показали, что она изменяется от 560 до 1100 кг/мм², что можно объяснить высоким уровнем поверхностных напряжений. В частности, о наличии высоких поверхностных напряжений в аморфной ленте косвенно указывало образование длинной узкой трещины около отпечатка индентора микротвердомера, длина которой могла превышать диаметр отпечатка (16 мкм) в ~8 раз. Эта трещина начиналась у основания отпечатка и постепенно выходила на поверхность образца. Такие трещины наблюдались в основном в зоне локализованной деформации сдвига, но имели направление, не совпадающее с направлением расположения полос сдвига.

При разрушении образцов регистрировался ЭМС и сравнивался с сигналом от поликристаллического титана марки ВТ-1-0. Из фиг. 1 (а — титан, б — АС) видно, что