МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1988

УДК 539.3:534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО КОНСОЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

МИЛОСЛАВСКИЙ А. И., СТАНИСЛАВСКИЙ Ю. Л.

Исследуется устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения малых колебаний консольного трубопровода с жидкостью. Доказано, что жидкость, протекающая по трубе с большой скоростью, приводит к неустойчивости трубопровода. Получены асимптотические формулы для собственных чисел, оценка спектра неустойчивости, рассмотрено влияние малой диссипации, обсуждаются результаты вычислений.

1. Уравнение малых колебаний $u=u(t; x)$ горизонтальной прямолинейной трубы, по которой течет идеальная несжимаемая жидкость, в одной из главных плоскостей инерции имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\beta v\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \quad (t>0) \tag{1.1}$$

$$x=s/l,\ v=[M/EI]^{1/2}Ul,\ \beta=[M/(M+m)]^{1/2}$$

где t — время, координата s отсчитывается вдоль оси трубы, M и m — погонные массы жидкости и трубы, U — скорость жидкости, l — длина трубы, EI — изгибная жесткость сечения трубы.

На защемленном и свободном концах выполняются краевые условия

$$u=\partial u/\partial x=0\ (x=0),\ \partial^2u/\partial x^2=\partial^3u/\partial x^3=0\ (x=1) \tag{1.2}$$

Для исследования на устойчивость нулевого решения положим $u(t, x)=y(x)\exp(\lambda t)$ в уравнениях (1.1), (1.2), получим спектральную краевую задачу

$$y^{\text{IV}}+v^2y''+2\beta v\lambda y'+\lambda^2y=0\ (0<x<1) \tag{1.3}$$

$$y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0 \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1), (1.2) вместе с начальными условиями

$$u=u_0(x),\ \partial u/\partial t=u_1(x)\ (t=0) \tag{1.5}$$

описывают динамику бесконечномерной неконсервативной упругой системы. Исследование устойчивости положения равновесия подобных систем [2] часто проводится по аналогии с конечномерным случаем: если спектр системы лежит в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\lambda<0$), то нулевое решение считается устойчивым, если найдется точка спектра в правой полуплоскости, то нулевое решение неустойчиво. В случае $v=0$ уравнения (1.1), (1.2), (1.5) описывают колебания консольной балки, задача (1.3), (1.4) имеет чисто мнимый спектр.

В [1, 3] численно найдены траектории нескольких первых собственных чисел задачи (1.3), (1.4) при изменении параметров v, β. При малых v собственные числа смещаются с мнимой оси в левую полуплоскость, с увеличением v некоторые точки спектра попадают в правую полуплоскость. В [1, 3] численно построена зависимость $v_*=v_*(\beta)$ $(0<\beta<1)$, где $v_*(\beta)$ — критическое значение параметра v. В [4—6] устойчивость решения $u=0$ задачи (1.1), (1.2), (1.5) рассматривалась в рамках теории Ляпунова. С использованием базисности системы собственных и присоединенных функций задачи (1.3), (1.4) в [4—6] установлено, что неравенства $\mathrm{Re}\lambda<0$ для точек спектра задачи (1.3), (1.4) достаточно для экспоненциальной устойчивости нулевого решения в энергетической метрике. В [6] доказано, что жидкость, протекающая по трубе с малой скоростью оказывает демпфирующее воздействие на колебания трубопровода. Случай шарнирного закрепления трубы рассмотрен в [7—11].

Спектральную задачу (1.3), (1.4) представим в виде

$$L(\lambda)y=A^2y+By+\lambda Cy+\lambda^2 y=0 \tag{1.6}$$

где операторы A^2, B, C действуют в пространстве $L_2[0, 1]$ и заданы равенствами $A^2y=y^{\mathrm{IV}}$, $By=v^2y''$, $Cy=2\beta vy'$ для $y\in D(A^2)$ — области определения оператора A^2, $D(A^2)=\{y|y\in W_2^4[0, 1],\ y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0\}$. Оператор A^2 самосопряжен, положителен; оператор B подчинен A: $\|By\|\leqslant v^2\|Ay\|$; оператор $-C$ диссипативен: $\mathrm{Re}(Cy, y)=\beta v|y(1)|^2\geqslant 0$. Дадим оценку точечного спектра $\sigma(L)$ пучка (1.6), лежащего в правой полуплоскости.

Теорема 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве спектральную задачу (1.6), где $A=A^*>0$, оператор B подчинен A в следующем смысле: существуют $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ и $b>0$ такие, что

$$\|By\|\leqslant b\|Ay\|^p\|y\|^{1-p},\ y\in D(A^2) \tag{1.7}$$

оператор C определен на $D(A^2)$, причем

$$\mathrm{Re}(Cy,\ y)\geqslant a\|y\|^2,\ y\in D(A^2),\ a\geqslant 0 \tag{1.8}$$

Пусть λ — собственное число задачи (1.6) $\mathrm{Re}\lambda>0$, тогда справедлива оценка

$$(\mathrm{Re}\lambda)^{p/2}(\mathrm{Re}\lambda+a)^{1-p/2}|\lambda|^{1-p}\leqslant b(1-p/2)\,(p/(2-p))^{p/2} \tag{1.9}$$

Доказательство. Умножая скалярно (1.6) на $\bar{\lambda}^{-1}y$ и отделяя вещественную часть в равенстве $\lambda^{-1}(Ly,\ y)=0$, имеем

$$\mathrm{Re}\,\lambda|\lambda|^{-2}\|Ay\|^2+\mathrm{Re}\,\lambda\|y\|^2=-\mathrm{Re}(Cy,\ y)-\mathrm{Re}\,\lambda^{-1}(By,\ y) \tag{1.10}$$

Оценим правую часть (1.10) с помощью неравенств (1.7), (1.8):

$$\mathrm{Re}\lambda|\lambda|^{-2}\|Ay\|^2+(\mathrm{Re}\lambda+a)\|y\|^2\leqslant|\lambda^{-1}(By,\ y)|\leqslant b|\lambda|^{-1}\|Ay\|^p\|y\|^{2-p} \tag{1.11}$$

Полагая $r=\|Ay\|/\|y\|$ в неравенстве (1.11) и минимизируя по r $(r>0)$ левую часть неравенства $\mathrm{Re}\lambda|\lambda|^{-2}r^{2-p}+(\mathrm{Re}\lambda+a)r^{-p}\leqslant b|\lambda|^{-1}$, получим оценку (1.9). Теорема доказана. Более точная оценка получена в [8, 11] для случая симметричного оператора B и кососимметричного оператора C.

В случае задачи (1.3), (1.4) $a=0$, $p=1$. Применяя неравенство (1.9), имеем

$$\mathrm{Re}\lambda\leqslant 0{,}5b=0{,}5v^2 \tag{1.12}$$

2. Исследуем асимптотику собственных чисел задачи (1.3), (1.4) при $v\to\infty$. После замены $s=vx(0<s<v)$, $Y(s)=y(x)$, $\mu=\lambda v^{-2}$ задача (1.3), (1.4) перепишется в виде

$$Y^{\mathrm{IV}}+Y''+2\beta\mu Y'+\mu^2Y=0 \tag{2.1}$$
$$Y(0)=Y'(0)=Y''(v)=Y'''(v)=0$$

Полагая $Y=\exp(zs)$, получим дисперсионное уравнение

$$z^4+z^2+2\beta\mu z+\mu^2=0 \tag{2.2}$$

В [12] установлено, что при $v\to\infty$ точки спектра задачи (2.1) сгущаются к кривой в μ-плоскости, определяемой условиями $\mathrm{Re}\,z_4<\mathrm{Re}\,z_1=\mathrm{Re}\,z_2<\mathrm{Re}\,z_3$, где $z_k=z_k(\mu)$ $(1\leqslant k\leqslant 4)$ — корни уравнения (2.2). В [13] получена асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для самосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения на длинном отрезке. Главный член асимптотики отвечал значению спектрального параметра, при котором дисперсионное уравнение имело кратные корни. Учитывая эти замечания, будем искать корни характеристического уравнения

$$\Delta(\mu, v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^2 e^{vz_1} & z_2^2 e^{vz_2} & z_3^2 e^{vz_3} & z_4^2 e^{vz_4} \\ z_1^3 e^{vz_1} & z_2^3 e^{vz_2} & z_3^3 e^{vz_3} & z_4^3 e^{vz_4} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

в окрестности точки $\mu=\mu_0(\beta)$, для которой уравнение (2.2) имеет кратные корни. Исключая z из уравнения (2.2) и уравнения $4z^3+2z+2\beta\mu=0$, найдем $\mu_0=0$, а также

$$\mu_0=\pm i32^{-1/2}(\omega\pm\beta[9\beta^2-8]^{3/2})^{1/2} \quad (^8/_9<\beta^2\leqslant 1) \tag{2.4}$$

$$\mu_0=\pm 8^{-1}\{(8[1-\beta^2]^{1/2}-\omega)^{1/2}\pm i(8[1-\beta^2]^{1/2}+\omega)^{1/2}\} \quad (0\leqslant\beta^2<^8/_9) \tag{2.5}$$

где $\omega=36\beta^2-8-27\beta^4$. В формулах (2.4), (2.5) возможны различные сочетания знаков. Исследуем сначала случай $\mu_0=0$.

Теорема 2. При $0\leqslant\beta<1$ и достаточно больших v уравнения (1.1), (1.2) имеют экспоненциально растущее при $t\to\infty$ решение, что означает неустойчивость нулевого решения.

Доказательство. Покажем, что спектральная задача (1.3), (1.4) при больших v имеет собственное число $\lambda(v)$, лежащее в правой полуплоскости. Считая $\mu=\lambda v^{-2}$ малым и полагая $\mu=\varepsilon$, получим четыре аналитических по ε решения уравнения (2.2):

$$z_1=\alpha\varepsilon+O(\varepsilon^3), \quad z_2=\bar\alpha\varepsilon+O(\varepsilon^3) \tag{2.6}$$
$$z_3=-i+\beta\varepsilon+i\gamma\varepsilon^2+O(\varepsilon^3), \quad z_4=i+\beta\varepsilon-i\gamma\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$
$$\alpha=-\beta-i(1-\beta^2)^{1/2}, \quad \gamma=0{,}5-1{,}5\beta^2$$

При вещественных ε:

$$\overline{z_1(\varepsilon)}=z_2(\varepsilon), \quad \overline{z_3(\varepsilon)}=z_4(\varepsilon) \tag{2.7}$$

Раскладывая определитель (2.3), получим

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$$
$$\Delta_1=z_1^2z_4^2(z_4-z_1)(z_3-z_2)e^{v(z_1+z_4)}-z_1^2z_3^2(z_3-z_1)(z_4-z_2)e^{v(z_1+z_3)}$$
$$\Delta_2=z_2^2z_3^2(z_3-z_2)(z_4-z_1)e^{v(z_2+z_3)}-z_2^2z_4^2(z_4-z_2)(z_3-z_1)e^{v(z_2+z_4)} \tag{2.8}$$
$$\Delta_3=z_3^2z_4^2(z_4-z_3)(z_2-z_1)e^{v(z_3+z_4)}+z_1^2z_2^2(z_2-z_1)(z_4-z_3)e^{v(z_1+z_2)}$$

Пользуясь соотношениями (2.7), положим

$$z_3=B-iA, \quad z_4=B+iA \tag{2.9}$$

где $A=A(\varepsilon)$, $B=B(\varepsilon)$ — вещественные при вещественных ε, аналитические при малых ε функции. В силу равенства $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, означающего равенство нулю коэффициента при z^3 в (2.2), и соотношения (2.9), положим

$$z_1=-B+iC, \quad z_2=-B-iC \tag{2.10}$$

где $C(\varepsilon)=\bar C(\varepsilon)$ при вещественных ε, аналитическая при малых ε функция. Согласно (2.6), (2.9), (2.10):

$$A(\varepsilon)=1-\gamma\varepsilon^2+O(\varepsilon^4), \quad B(\varepsilon)=\beta\varepsilon+O(\varepsilon^3), \tag{2.11}$$
$$C(\varepsilon)=-(1-\beta^2)^{1/2}\varepsilon+O(\varepsilon^3)$$

Используя соотношения (2.8) — (2.11), получим

$$\Delta_1=-2i\alpha^2\varepsilon^2e^{ivC}[2\alpha\varepsilon(1+O(\varepsilon^2)\cos vA+(1+O(\varepsilon^2))\sin vA]$$
$$\Delta_2=2i\bar\alpha^2\varepsilon^2e^{-ivC}[2\bar\alpha\varepsilon(1+O(\varepsilon^2))\cos vA+(1+O(\varepsilon^2))\sin vA]$$
$$\Delta_3=-4(1-\beta^2)^{1/2}\varepsilon(1+O(\varepsilon^2))e^{2vB}[1+\varepsilon^4(1+O(\varepsilon^2))e^{-4vB}]$$
$$\exp(\pm ivC)=(1+O(\varepsilon^3v))\exp(\mp i(1-\beta^2)^{1/2}\varepsilon v) \tag{2.12}$$
$$\exp(\pm 2vB)=(1+O(\varepsilon^3v))\exp(\pm 2\beta\varepsilon v)$$

Считая, что

$$\varepsilon^2v\to 0 \text{ при } v\to\infty \tag{2.13}$$

и учитывая (2.11), получим

$$\cos vA = \cos v + \gamma\varepsilon^2 v \sin v + O(\varepsilon^4 v^2) \qquad (2.14)$$
$$\sin vA = \sin v - \gamma\varepsilon^2 v \cos v + O(\varepsilon^4 v^2)$$

Решение уравнения (2.3) разыскивается в полуплоскости ($\operatorname{Re}\varepsilon > 0$). Так как спектр задачи (1.3), (1.4) симметричен относительно вещественной оси, достаточно ограничиться квадрантом $K = \{\varepsilon \mid \operatorname{Re}\varepsilon > 0, \operatorname{Im}\varepsilon \geqslant 0\}$. Для $\varepsilon \in K$:

$$|\exp(i(1-\beta^2)^{1/2}\varepsilon v)| \leqslant 1, \quad |\exp(-4\beta\varepsilon v)| \leqslant 1 \qquad (2.15)$$

С учетом соотношений (2.8), (2.12), (2.14), (2.15) для $\varepsilon \in K$ и удовлетворяющих (2.13) после деления на $-2i\alpha^2\varepsilon$ и переобозначений уравнение (2.3) примет вид

$$\tau[v \sin v + (\xi\tau + \eta\tau^2)\cos v + \varphi] \exp\tau = Rv^2[1+\psi] \qquad (2.16)$$
$$\varkappa = -2\beta - i(1-\beta^2)^{1/2},\ \tau = \varkappa v\varepsilon,\ \xi = 2\alpha\varkappa^{-1},\ \eta = -\gamma\varkappa^{-2},\ R = 2i\varkappa(1-\beta^2)^{1/2}\alpha^{-2}$$
$$\varphi = \varphi(\tau, v) = O(|\tau|^2 v^{-1} + |\tau|^4 v^{-1} + v|\exp(2i\tau(1-\beta^2)^{1/2}\varkappa^{-1})|$$
$$\psi = \psi(\tau, v) = O(|\tau|^2 v^{-2} + |\tau|^3 v^{-2})$$

Условие (2.10) в новых обозначениях перепишется в виде $\tau^2 v^{-1} \to 0$ при $v \to \infty$. Если пренебречь слагаемыми φ, ψ, то уравнение (2.16) при $v \to \infty$ имеет решения, в первом приближении равные $\tau_N = 2\ln v - 2\pi i N + \ln R$. При этом вещественная часть

$$\operatorname{Re}\varepsilon_N = \operatorname{Re}\tau_N \varkappa^{-1} v^{-1} = -4\beta(1+3\beta^2)^{-1} v \ln v\, [1+o(1)]$$

отрицательна при $v \to \infty$, если целое N принимает конечное число значений. Покажем, что при $v \to \infty$ можно подобрать $N = N(v) \to \infty$ таким образом, чтобы $\operatorname{Re}\varepsilon_N \to +\infty$.

Лемма. Уравнение

$$\tau f(\tau, v) \exp\tau = Rv^2 \qquad (2.17)$$
$$f(\tau, v) = v \sin v + (\xi\tau + \eta\tau^2)\cos v$$

где ξ, η, R — комплексные числа, $R \neq 0$, $\xi \neq 0$, $\operatorname{Im}\eta \neq 0$ либо $\eta = 0$; при $v \to \infty$ имеет решение $\tau = \tau_0(v)$, которое может быть представлено в виде

$$\tau = w - \ln(wf(w, v)) + \delta, \quad w = \ln R + 2\ln v - 2\pi i N \qquad (2.18)$$

где $N = N(v)$ — целочисленная функция, удовлетворяющая условиям

$$Nv^{-1/2} \to 0,\ N/\ln v \to +\infty,\ \delta = \delta(v) \to 0\ (v \to \infty) \qquad (2.19)$$

Доказательство леммы использует прием, приведенный в [14]. Подставляя выражение (2.18), где $N(v)$ удовлетворяет (2.19), в уравнение (2.17), получим

$$(\tau/w) f(\tau, v)/f(w, v) = \exp(-\delta) \qquad (2.20)$$

С помощью оценки

$$C_2 v > |f(w, v)| > C_1 N^2 \qquad (2.21)$$

где $C_{1,2}$ — некоторые положительные постоянные, левую часть уравнения (2.20) можно представить в виде

$$(\tau/w) f(\tau, v)/f(w, v) = 1 + \gamma_0 + \gamma_1\delta + \lambda_2\delta^2 + \gamma_3\delta^3 \qquad (2.22)$$

$$\gamma_i \to 0 \text{ при } v \to \infty \quad (0 \leqslant i \leqslant 3) \qquad (2.23)$$

Решение уравнения $\exp(-\delta) = 1 + \gamma_0 + \gamma_1\delta + \gamma_2\delta^2 + \gamma_3\delta^3$, полученного из (2.20), (2.22), при малых γ_i ($0 \leqslant i \leqslant 3$) может быть представлено степенным рядом

$$\delta = \gamma_0 \sum C_{k_0k_1k_2k_3} \gamma_0^{k_0} \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \gamma_3^{k_3} \qquad (2.24)$$

Из соотношений (2.23), (2.24) вытекает представление (2.18) для решения уравнения (2.17) с $\delta(v) \to 0$ при $v \to \infty$. В случае $\eta = 0$ для $f(w, v)$ вместо (2.21) выполняется оценка $C_2 v > |f(w, v)| > C_0 N$, которой достаточно для вывода соотношений (2.23). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. В силу теоремы Руше уравнение (2.16) имеет решение $\tau(v)$, представимое в виде $\tau(v)=\tau_0(v)+\zeta$, где $\zeta=\zeta(v)\to 0$ при $v\to\infty$, $\tau_0(v)$ — решение уравнения (2.17), найденное в лемме. Таким образом, при $v\to\infty$ задача (1.3), (1.4) имеет точку спектра $\lambda=\lambda(v)$, для которой $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\varepsilon v^2=v\operatorname{Re}\tau\varkappa^{-1}\sim 2\pi N(1-\beta^2)^{1/2}(1+3\beta^2)^{-1}v\to+\infty$. Здесь предполагалось, что $\operatorname{Im}\eta\neq 0$ $(\beta\neq 3^{-1/2})$. Случай $\eta=0$ рассматривается аналогично. Теорема 2 доказана.

3. Получим асимптотические формулы для корней уравнения (2.3) в окрестности точки $\mu_0(\beta)$ (2.4), (2.5) и вытекающие из них формулы для собственных чисел задачи (1.3), (1.4).

В случае $^8/_9<\beta^2\leqslant 1$ для $\mu_0(\beta)$ (2.4) корни уравнения (2.2) имеют вид

$$g\equiv z_1=z_2=\pm i\{8^{-1}(4-3\beta^2\pm\beta[9\beta^2-8]^{1/2})\}^{1/2},\quad z_{3,4}=-g+h$$
$$h=0{,}5i(3\beta^2\pm\beta[9\beta^2-8]^{1/2})^{1/2}$$

В случае $0\leqslant\beta^2<{}^8/_9$ для $\mu_0(\beta)$ (2.5) имеем

$$g\equiv z_1=z_2=\pm 0{,}25\beta(3[1-\beta^2]^{1/2}-1)^{1/2}([1-\beta^2]^{1/2}+1)^{-1/2}\pm$$
$$\pm 0{,}25i(4-3\beta^2+4[1-\beta^2]^{1/2})^{1/2},\quad z_{3,4}=-g\pm h$$
$$h=(8^{-1}[8^{1/2}\beta-3\beta^2])^{1/2}\pm i(8^{-1}[8^{1/2}\beta+3\beta^2])^{1/2}$$

Неравенство

$$\operatorname{Re}z_4<\operatorname{Re}z_{1,2}<\operatorname{Re}z_3 \tag{3.1}$$

выполняется в первом случае $0\leqslant\beta^2<{}^{32}/_{81}$. Во втором случае $^8/_9<\beta^2\leqslant 1$ имеем

$$\operatorname{Re}z_4=\operatorname{Re}z_{1,2}=\operatorname{Re}z_3=0$$

Для $\beta^2\in({}^{32}/_{81},{}^8/_9)$ главный член уравнения (2.3) при $v\to\infty$ не имеет корней и асимптотику излагаемым способом найти не удается.

Теорема 3. **В первом и втором случаях при $v\to\infty$ задача (1.3), (1.4) имеет серию собственных чисел**

$$\lambda^{1\text{,}2u}(v)=\mu_0(\beta)v^2-\pi^2n^2a_0^{-2}+4\pi^2n^2a_0^{-2}\varkappa_n^{1,2}v^{-1}+O(v^{-2}) \tag{3.2}$$
$$(1\leqslant n\leqslant N)$$

$$a_0^2=-2(\mu_0+\beta g)(1+6g^2)^{-1},\quad \varkappa_n^1=\varkappa^1=(gh+4g^2-h^2)$$
$$(4g^3-gh^2)^{-1},\quad \varkappa_n^2=(gG+(-1)^n hH)K^{-1} \tag{3.3}$$
$$G=(4g^2-h^2-gh)(g+h)^2e^{-vh}-(4g^2-h^2+gh)(g-h)^2e^{vh}$$
$$H=g^4e^{2vg}+(g^2-h^2)^2e^{-2vg}$$
$$K=g^2(4g^2-h^2)[(g+h)^2e^{-vh}-(g-h)^2e^{vh}]$$

Доказательство. Положим

$$\mu=\mu_0+\varepsilon^2,\quad z_1=g+\varepsilon a+b,\quad z_2=g-\varepsilon a+b$$
$$z_3=-g+h-b+c,\quad z_4=-g-h-b-c$$

где a, b, c — некоторые функции, зависящие аналитически от ε^2 (ε мало), причем $a=a_0+a_1(\varepsilon^2)$, $a_1=O(\varepsilon^2)$, $b(\varepsilon^2)=O(\varepsilon^2)$, $c(\varepsilon^2)=O(\varepsilon^2)$

В первом случае уравнение (2.3) после деления на $2\varepsilon avz_3^2\exp(vh+vc)$ представлено в виде ($\operatorname{Re}h>0$):

$$A(\varepsilon av)^{-1}\operatorname{sh}(\varepsilon av)+Bv^{-1}\operatorname{ch}(\varepsilon av)+O(\exp(-\gamma v))=0 \tag{3.4}$$

где $\gamma=\gamma(\beta)$ — некоторое положительное число, существование которого следует из неравенства (3.1), A и B — аналитические функции ε^2, $A(\varepsilon^2)=g^2(4g^2-h^2)+O(\varepsilon^2)$, $B(\varepsilon^2)=2g(4g^2-h^2+gh)+O(\varepsilon^2)$. Вводя новую переменную $\delta=\varepsilon av$, перепишем уравнение (3.4) в виде

$$\delta^{-1}\operatorname{sh}\delta+Cv^{-1}\operatorname{ch}\delta+O(\exp(-\gamma v))=0 \tag{3.5}$$
$$C=2(gh+4g^2-h^2)(4g^3-gh^2)^{-1}+O(|\delta|^2v^{-2})$$

При больших v корни уравнения (3.5) близки к корням $\{\pi in\}_{|n|=1}^{\infty}$ уравнения $\delta^{-1}\operatorname{sh}\delta=0$. Полагая

$$\delta=\pi in-\delta_n^1v^{-1}+O(v^{-2}) \tag{3.6}$$

в уравнении (3.5) и сравнивая старшие члены, получим

$$\delta_n^1=-2\pi i n \varkappa_n^1 \tag{3.7}$$

где $\varkappa_n^1$ находится по формуле (3.3). В силу теоремы Руше уравнение (3.5) действительно имеет корни вида (3.6). Формулы (3.6), (3.7) приводят к (3.2).

Во втором случае должны быть учтены все шесть слагаемых (2.8), составляющих определитель, уравнение (2.3) после деления на $2\varepsilon av$ представимо в виде

$$\begin{gathered}(\varepsilon av)^{-1}\operatorname{sh}(\varepsilon av)A_0[A_1\exp(-vh-vc)-A_2\exp(vh+vc)]\\ +v^{-1}\operatorname{ch}(\varepsilon av)B_0[B_1A_1\exp(-vh-vc)-B_2A_2\exp(vh+vc)]\\ +2v^{-1}(h+c)[C_1\exp(2vg+2vb)+C_2\exp(-2vg-2vb)]=0\end{gathered}$$

где $A_{0,1,2}$, $B_{0,1,2}$, $C_{1,2}$ — аналитически зависящие от ε^2 функции, с точностью до $O(\varepsilon^2)$ равные

$$\begin{gathered}A_0=g^2(4g^2-h^2),\ A_1=(g+h)^2,\ A_2=(g-h)^2\\ B_0=2g,\ B_1=4g^2-h^2-gh,\ B_2=4g^2-h^2+gh\\ C_1=g^4,\ C_2=(g^2-h^2)^2\end{gathered}$$

Полагая, как и в случае, $\varepsilon av=\delta=\pi in+\delta_n^2v^{-1}+O(v^{-2})$, найдем $\delta_n^2=-2\pi in\varkappa_n^2$. Эти формулы приводят к выражению для λ_n^2 (3.2). Теорема доказана.

В первом случае выбирая знак «плюс» перед $\operatorname{Re}\mu_0(\beta)$ (2.5), получим серию собственных значений с $\operatorname{Re}\lambda_n^1(v)\to+\infty$ при $v\to\infty$. Во втором случае $\operatorname{Re}\lambda_n^2(v)\to0$ при $v\to\infty$, причем $v\operatorname{Re}\lambda_n^2(v)$ — квазипериодическая функция. Заметим, что асимптотика, найденная в [13], содержит периодические функции большого аргумента.

4. Рассмотрим предельные случаи $\beta=0$; 1 и влияние малой диссипации. При $\beta=0$ уравнения (1.1), (1.2), (1.5) описывают малые колебания консольной балки при наличии следящей нагрузки. Исследование этой задачи, впервые численно рассмотренной Беком (см. [2]), проведено в [4, 6, 15, 16]. Из формулы (3.2) получаем серию собственных значений ($\beta=0$, $1\leqslant n\leqslant N$):

$$\lambda_n(v)=0{,}5v^2(1-4\pi^2n^2v^{-2}+O(v^{-3})) \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) показывает, что оценка (1.12) при $v\to\infty$ асимптотически точна.

Покажем, что в случае $\beta=1$ при любом $v>0$ нулевое решение уравнений (1.1), (1.2) экспоненциально устойчиво в энергетической метрике. Под этим понимается неравенство

$$\int_0^1\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|^2\right)dx\leqslant Me^{-\omega t}\int_0^1(|u_1(x)|^2+|u_0''(x)|^2)\,dx \tag{4.2}$$

для решений уравнений (1.1), (1.2) с некоторыми положительными постоянными M, ω, не зависящими от начальных данных (1.5). Согласно [4—6] для доказательства (4.2) достаточно установить неравенство

$$\operatorname{Re}\lambda_n(v)\leqslant-\omega(v)<0 \tag{4.3}$$

для всех точек спектра $\lambda_n(v)$ задачи (1.3), (1.4). В силу асимптотической формулы [6] для $\lambda_n(|n|\to\infty)$ неравенство (4.3) выполняется при $|n|\geqslant n_0(v)$. При малых v' согласно формулам теории возмущений [6] неравенство (4.3) выполняется для $|n|\leqslant n_0(v')$. Учитывая непрерывную зависимость $\lambda_n=\lambda_n(v')$, $0\leqslant v'\leqslant v$ и неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n(v)\neq0$, доказанное О. Н. Мухиным [17], получим (4.3) для всех λ_n. Неравенство (4.2) установлено.

Учет внутреннего трения по Фойхту и трения внешней среды приводит к появлению двух новых членов в уравнении (1.3) ($\alpha>0$, $k>0$):

$$y^{\mathrm{IV}}(1+\alpha\lambda)+v^2y''+2\beta v\lambda y'+(\lambda^2+k\lambda)y=0 \tag{4.4}$$

Дестабилизация неконсервативных систем, зависящих от параметра $v (v\geqslant 0)$, малыми силами трения ($\alpha+k\ll 1$) сводится к тому [2], что при некотором $v'<v_*$ и $0<\alpha+k\leqslant\delta(v')$ в полуплоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$) появляется собственное число $\lambda=\lambda_{v'}(\alpha, k)$ спектральной задачи. Именно так обстоит дело в случае $\beta=0$ [18]. Покажем, что при $0<\beta<1$ исчезающе малые силы диссипации не приводят к дестабилизации трубопровода, т. е. для всякого v, $0\leqslant v<v_*(\beta)$ найдется такое $\delta=\delta(v)>0$, что при $0<\alpha+k\leqslant\delta(v)$ спектр задачи (4.4), (1.4) лежит в полуплоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda<0$). Наметим доказательство этого утверждения.

Асимптотический анализ уравнения (2.3) при фиксированном $v\geqslant 0$, малых $\alpha+k$ и $|\lambda|\to\infty$ показывает, что модули всех корней этого уравнения, лежащих в полуплоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$) ограничены: $|\lambda|\leqslant R$. При $\alpha=k=0$ и $0<v<v_*(\beta)$ спектр задачи (4.4), (1.4) лежит в полуплоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda<0$). Применяя к области $D_R=\{\lambda|\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0,\ |\lambda|\leqslant R\}$ и задаче (4.4), (1.4) операторный аналог теоремы Руше [19], получим существование $\delta=\delta(v)>0$ такого, что $\sigma(L(\alpha, k))\cap D_R=\varnothing$ при $0<\alpha+k\leqslant\delta(v)$.

Численный анализ влияния диссипации на устойчивость трубопровода проведен в [20]. Заметим, что учет трения (не обязательно малого) не влияет на критическое значение v_* для шарнирно или жестко закрепленного трубопровода [11].

Траектории нескольких первых собственных значений задачи (1.3), (1.4) численно исследовались в [1, 3] при небольших значениях v. Для изучения закономерностей поведения собственных чисел при больших v были вычислены первые два собственных числа $\lambda_{1,2}(v)$ задачи (1.3), (1.4) для $\beta=0{,}1$; $0{,}5$; $0{,}7$; $0{,}9$; $0\leqslant v\leqslant 100$. В случаях $\beta=0{,}1$ и $\beta=0{,}5$ числа $\lambda_{1,2}=\xi_{1,2}+i\eta_{1,2}$ стремятся к $\mu_{1,2}(\beta)v^2$, где $\mu_1(0{,}1)=-0{,}49+i0{,}07$; $\mu_2(0{,}1)=0{,}49+i0{,}07$; $\mu_1(0{,}5)=-0{,}34+i0{,}31$, $\mu_2(0{,}5)=0{,}34+i0{,}31$ (что согласуется с теоремой 3), причем $\xi_{1,2}v^{-2}$ и $\eta_{1,2}v^{-2}$ приближаются к $\mathrm{Re}\,\mu_{1,2}$ и $\mathrm{Im}\,\mu_{1,2}$ монотонно и отличаются при $v=100$ от (2.5) не более, чем на 0,005. В случае $\beta=0{,}7$ числа $\lambda_{1,2}$ осциллируют около значений $\mu_1(0{,}7)=-0{,}20+i0{,}37$; $\mu_2(0{,}7)=0{,}20+i0{,}37$ с периодом 3,4. Наиболее сложный вид имеют траектории для $\beta=0{,}9$. В интервале $20<v<40$ функции $\xi_{1,2}v^{-2}$ и $\eta_{1,2}v^{-2}$ совершают почти правильные синусоидальные колебания с периодом 3,6. С увеличением $v (40\leqslant v\leqslant 100)$ периоды и амплитуды колебаний растут, на их фоне возникают осцилляции небольшого масштаба, $0{,}01<\xi_{1,2}v^{-2}<0{,}05$; $-0{,}35<\eta_{1,2}v^{-2}<-0{,}20$. Во всех просчитанных случаях $\mathrm{Re}\,\lambda_2>0$ при достаточно больших v.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука. 1973. 400 с.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Gregory R. W., Paidussis M. P.* Unstable of tubular cantilever conveying fluid. I. Theory. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1966. V. 293. No. 1435. P. 512–527.
4. *Милославский А. И.* К обоснованию спектрального подхода в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. Вып. 3. С. 83–84.
5. *Röh H.* Dissipative operators with finite dimensional damping.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 1982. V. 91. No. 3–4. P. 243–263.
6. *Милославский А. И.* Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений // Сиб. мат. ж. 1985. Т. 36. № 5. С. 118–132.
7. *Мовчан А. А.* Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 760–762.
8. *Милославский А. И.* Спектральные свойства одного класса квадратичных операторных пучков // Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 15. Вып. 2 С. 81–82.
9. *Милославский А. И.* О неустойчивости прямолинейных трубопроводов // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Харьков: Изд-е Харьков. авиац. ин-та, 1980. Вып. 2. С. 38–47.
10. *Милославский А. И.* Асимптотика собственных частот прямолинейного трубопровода при большой скорости жидкости, протекающей через него // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Харьков: Изд-е Харьков. авиац. ин-та, 1982. Вып. 3. С. 114–120.
11. *Зефиров В. Н., Колесов В. В., Милославский А. И.* Исследование собственных частот прямолинейного трубопровода // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 179–188.

12. *Куликовский А. Г.* Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
13. *Есипов А. А., Юдович В. И.* Асимптотика собственных значений первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на длинном отрезке // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 2. С. 342–349.
14. *Брейн Н. Г. де.* Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 247 с.
15. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об устойчивости вязкоупругих стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 78–87.
16. *Carr J., Malhardeen M. Z. M.* Stability of nonconservative lineer systems // Lect. Notes Math. 1980. No. 799. P. 45–68.
17. *Мухин О. Н.* Устойчивость трубопровода и некоторые методы в неконсервативных задачах // Вестн. МГУ. С. 1. Математика, механика. 1965. № 2. С. 76–87.
18. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solids and Struct. 1969. V. 5. No. 9. P. 965–989.
19. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84. № 4. С. 607–629.
20. *Lottati I., Kornecki A.* The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes // J. Sound and vibration. 1986. V. 109. No. 2. P. 327–338.

Харьков

Поступила в редакцию
9.VI.1986