

УДК 539.3:534.1

СВЯЗАННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПАНЕЛИ

МАНЕВИЧ А. И.

В работе получено решение нелинейной задачи устойчивости сжатой панели во втором нелинейном приближении, с учетом взаимодействия общей формы и местных форм различного типа — с превалирующими перемещениями обшивки или ребер. Выполнен численный анализ местных форм второго порядка, дающих главную часть поправки в местных формах выпучивания при конечных перемещениях по сравнению с собственными формами линейной задачи. В отличие от работ [1-3], в которых рассматривались панели с относительно толстыми ребрами, не теряющими устойчивость, особое внимание уделено практически важному случаю панелей с тонкостенными ребрами и опасному взаимодействию общей формы с местными формами «выпучивания ребра». Показано, что для таких панелей полученные в первом приближении [4-7] выводы о высокой чувствительности к несовершенствам сохраняют силу и при учете членов четвертой степени в выражении для энергии.

1. Нелинейная краевая задача связанного выпучивания. Рассматривается продольно сжатая панель (широкая стойка), подкрепленная равностоящими продольными ребрами, шарнирно опертая по нагруженным краям. Особенностью формулировки краевой задачи связанного выпучивания является использование уточненных геометрических соотношений для ребра, учитывающих конечный угол его закручивания. При использовании пластинчатой схемы ребра геометрические соотношения принимаются в форме [7] (обозначения общеприняты):

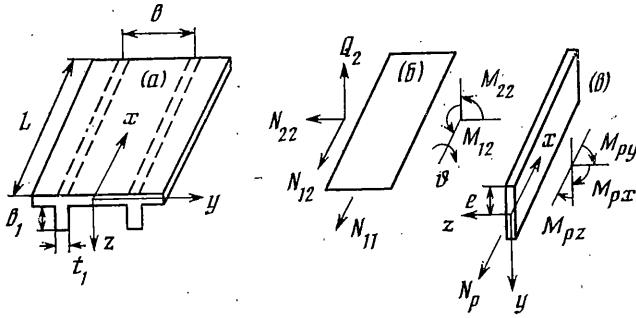
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2), & \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ \chi_x &= -w_{,xx}, & \chi_y &= -w_{,yy}, & \chi_z &= -w_{,xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

позволяющей описать одновременные перемещения ребра в плоскости нормали к обшивке при общем выпучивании и смещения из плоскости при местном выпучивании. Для ребра — стержня эти соотношения принимаются в виде (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= u_{p,x} + \frac{1}{2}(v_{p,x}^2 + w_{p,x}^2 + r_p^2 \theta_{p,x}^2) \\ \chi_{px} &= \theta_{p,x}, & \chi_{py} &= -w_{p,xx} + v_{p,xx} \theta_{p,x}, & \chi_{pz} &= v_{p,xx} + w_{p,xx} \theta_{p,x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где компоненты вектора кривизны $\chi = (\chi_{px}, \chi_{py}, \chi_{pz})$ в подвижной системе координат — главном трехграннике ребра выражаются через перемещения u_p, v_p, w_p в неподвижной системе, связанной с недеформированным ребром, и включают нелинейные члены, учитывающие конечный (малый) угол поворота θ_p (в [1, 2] эти члены не учитывались). Основным является дополнительный член в выражении для χ_{pz} , который соответствует учету бокового выпучивания ребра (нелинейным членом в выражении для χ_{py} можно пренебречь, если жесткость ребра на изгиб из плоскости нормали к обшивке мала по сравнению с жесткостью на изгиб в плоскости; это предположение далее принимается). Слагаемое $\frac{1}{2} r_p^2 \theta_{p,x}^2$ в выражении для ε_p (r_p — полярный радиус инерции ребра) позволяет учесть возможность крутильного выпучивания.

Нелинейные уравнения равновесия ребра, соответствующие соотношениям (1.1) и (1.2), были получены вариационным методом. Для ребра —



Фиг. 1

стержня (соотношения (1.2)) они имеют вид (фиг. 1, в):

$$\begin{aligned} N_{p,x} + q_x = 0, \quad -M_{pz,xx} + (N_p v_{p,x})_{,x} - (M_{py} \vartheta_p)_{,xx} + q_y^* = 0 \\ M_{py,xx} + (N_p w_{p,x})_{,x} - (M_{pz} \vartheta_p)_{,xx} + q_z^* = 0 \\ M_{px,x} + r_p^2 (N_p \vartheta_{p,x})_{,x} - M_{pz} w_{p,xx} - M_{py} v_{p,xx} + m_x = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $q = (q_x, q_y, q_z)$, $m = (m_x, m_y, m_z)$ — главные векторы внешних усилий и моментов, отнесенных к центральной линии ребра, $q_y^* = q_y - m_{z,x}$, $q_z^* = q_z + m_{y,x}$. Соотношения упругости для ребра приняты в виде

$$N_p = EF \varepsilon_p, \quad M_{pz} = -EI_1 \chi_{pz}, \quad M_{py} = EI \chi_{py}, \quad M_{px} = GI_d \chi_{px} \quad (1.4)$$

где I_1, I_2, I_d — моменты инерции ребра на изгиб в двух плоскостях и на кручение (для упрощения принимается, что ребро имеет две оси симметрии, и его секториальная жесткостью можно пренебречь). Для формулировки условий сопряжения обшивки и ребра нужно перейти к перемещениям и усилиям на линии их соединения (отмечены индексом c ; e — расстояние от центральной линии ребра до срединной плоскости обшивки):

$$\begin{aligned} (u_p, v_p, w_p, \vartheta_p) = (u_c - e v_{c,x}, v_c - e \vartheta_c^2/2, w_c + e \vartheta_c, \vartheta_c) \\ (q_x, q_y^*, q_z^*, m_x) = (q_{xc}, q_{yc}^* - e q_{xc,x}, q_{zc}^* - e \vartheta_c q_{xc,x}, m_{xc} - e q_{zc} + e \vartheta_c q_{yc}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для участка пластины между ребрами принимаются обычные нелинейные геометрические соотношения, соотношения упругости и уравнения равновесия. Граничные условия на краях $y = \pm b/2$ (фиг. 1) имеют вид

$$N_{12} = X, \quad N_{22} = Y, \quad M_{22,y} + 2M_{12,x} + N_{12} w_{,x} + N_{22} w_{,y} = Z, \quad M_{22} = H \quad (1.6)$$

где X, Y, Z, H — компоненты приложенной на крае внешней погонной нагрузки, приходящей со стороны ребра. Условия сопряжения обшивки и ребра в соответствии с фиг. 1 и формулами (1.5) имеют вид

$$(u, v, w, \vartheta)_c = (u, w, -v, w_{,y}) \quad (1.7)$$

$$(q_x, q_y^*, q_z^*, m_x)_c = [N_{12}, Z, -N_{22}, M_{22}]_{b/2-0}^{b/2+0} \quad (1.8)$$

Пластина считается подкрепленной достаточно большим числом ребер, чтобы можно было ограничиться рассмотрением одного участка с условиями периодичности в поперечном направлении.

2. Красевые задачи первого и второго приближений. Пусть λ_i и $U^{(i)}$ — собственные значения и собственные формы линейной задачи ($i=1, \dots, n$; индекс 1 отвечает общей форме, остальные индексы — местным формам с собственными значениями, близкими к λ_1 ; собственные формы нормируются условием равенства максимального прогиба толщине обшивки h). Для решения задачи применяется метод возмущений [10]. Поле конечных перемещений раскладывается в асимптотический ряд (по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n)

$$U = (u, v, w) = U^{(0)} + \xi_i U^{(i)} + \xi_i \xi_j U^{(ij)} + \dots \quad (2.1)$$

где λ — параметр нагрузки, ξ_i — «амплитуды» собственных форм $U^{(i)}$, $U^{(0)}$ — основное (докритическое) поле перемещений, определяемое уравнениями

линейной теории упругости, $U^{(ij)}$ — поля второго порядка. Подстановка разложения (2.1) в геометрические соотношения и соотношения упругости приводит к аналогичным разложениям для деформационных и силовых факторов вида

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \xi_i \varepsilon^{(i)} + \xi_i \xi_j \varepsilon^{(ij)} + \dots, \quad N = N^{(0)} + \xi_i N^{(i)} + \xi_i \xi_j N^{(ij)} + \dots \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнения равновесия и граничные условия, получим краевые задачи различных порядков. После решения краевых задач первого и второго порядков находятся коэффициенты нелинейной системы уравнений (условий стационарности потенциальной энергии относительно обобщенных перемещений ξ_i), определяющей равновесные ветви (члены выше четвертой степени в потенциальной энергии отброшены, по s суммирование не производится):

$$a_s (1 - \lambda/\lambda_s) \xi_s + a_{ijs} \xi_i \xi_j + a_{ijhs} \xi_i \xi_j \xi_h = \xi_s \xi_s^* (\lambda/\lambda_s) \quad (2.3)$$

где ξ_s^* — амплитуда начального несовершенства по s -ой форме. Коэффициенты a_s , a_{ijs} , a_{ijhs} определяются формулами [10, 11]:

$$\begin{aligned} a_s &= -\lambda_s \sigma^{(0)} l_2(U^{(s)}), \quad a_{ijs} = \sigma^{(i)} l_{11}(U^{(j)}, U^{(s)}) + \frac{1}{2} \sigma^{(s)} l_{11}(U^{(i)}, U^{(j)}) \\ a_{ijhs} &= \sigma^{(i)} l_{11}(U^{(jh)}, U^{(s)}) + \sigma^{(s)} l_{11}(U^{(i)}, U^{(jh)}) + \sigma^{(i)} l_{11}(U^{(h)}, U^{(s)}) \\ \sigma \varepsilon &= \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad \varepsilon = l_1(U) + \frac{1}{2} l_2(U) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $l_1(U)$, $l_2(U)$ — линейный и квадратичный операторы, $l_{11}(U_1, U_2)$ — ассоциированный с $l_2(U)$ билинейный оператор. Интегралы в формулах (2.4) вычисляются по обшивке и ребру отдельно. Решения краевых задач второго порядка должны удовлетворять условиям ортогональности собственным формам, которые имеют вид [11]:

$$\sigma^{(0)} l_{11}(U^{(ij)}, U^{(s)}) = 0 \quad (2.5)$$

Остановимся подробнее на краевой задаче второго порядка, так как именно учет полей второго порядка отличает данную работу от решения в первом нелинейном приближении [7]. Уравнения равновесия в перемещениях для обшивки имеют вид

$$L_q(u^{(ij)}, v^{(ij)}) = p_q^{(ij)} \quad (q=1, 2), \quad L_3(w^{(ij)}) = p_3^{(ij)} \quad (2.6)$$

где $L_q(u, v)$, $L_3(w)$ — известные операторы линейной теории пластин, а «нагрузочные члены» выражаются через перемещения и усилия для линейных собственных форм ($\xi = x/b$, $\eta = y/b$, $N^* = N/Eh$):

$$p_1^{(ij)} = -(h/2b) [(w_{,\xi}^{(i)} w_{,\xi}^{(j)} + \nu w_{,\eta}^{(i)} w_{,\eta}^{(j)})_{,\xi} + (1-\nu) (w_{,\xi}^{(i)} w_{,\eta}^{(j)})_{,\eta}] \quad (2.7)$$

$$p_2^{(ij)} = -(h/2b) [(\nu w_{,\xi}^{(i)} w_{,\xi}^{(j)} + w_{,\eta}^{(i)} w_{,\eta}^{(j)})_{,\eta} + (1-\nu) (w_{,\xi}^{(i)} w_{,\eta}^{(j)})_{,\xi}]$$

$$p_3^{(ij)} = (N_{11}^* w_{,\xi}^{(i)} w_{,\xi}^{(j)} + N_{21}^* w_{,\xi}^{(i)} w_{,\eta}^{(j)})_{,\xi} + (N_{12}^* w_{,\xi}^{(i)} w_{,\xi}^{(j)} + N_{22}^* w_{,\xi}^{(i)} w_{,\eta}^{(j)})_{,\eta}$$

(здесь и далее перемещения отнесены к h , но для упрощения записи обозначения оставлены теми же). Граничные условия для обшивки

$$(N_{12}, N_{22}, M_{22})_{y=b/2}^{(ij)} = (X, Y, H)^{(ij)} \quad (2.8)$$

$$M_{22,y}^{(ij)} + 2M_{12,x}^{(ij)} + (N_{12} w_{,x} + N_{22} w_{,y})_{(i,j)} = Z^{(ij)}$$

где для сокращения записи используется символ $(\varphi, \psi)_{(i,j)} = \varphi^{(0)} \psi^{(ij)} + \varphi^{(i)} \psi^{(j)} + \varphi^{(ij)} \psi^{(0)}$.

Уравнения равновесия ребра для задачи второго порядка (в перемещениях центральной линии) имеют вид

$$\gamma_1 (u_{p,\xi\xi}^{(ij)} + (h/b) (v_{p,\xi}^{(i)} v_{p,\xi}^{(j)} + w_{p,\xi}^{(i)} w_{p,\xi\xi}^{(j)} + (r_p/h)^2 \theta_{p,\xi} \theta_{p,\xi\xi})) + q_x^* / (Eh) = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 (v_{p,\xi\xi}^{(ij)} + w_{p,\xi\xi}^{(i)} \vartheta_p^{(j)})_{,\xi\xi} - \gamma_1 [(N_p^* v_{p,\xi})_{,\xi}]_{(i,j)} - q_y^{*(ij)} / (Eh) = 0 \\ \gamma_3 w_{p,\xi\xi\xi\xi}^{(ij)} - \gamma_1 [(N_p^* w_{p,\xi})_{,\xi}]_{(i,j)} - (\gamma_1 b/h) [(M_{pz}^* \vartheta_p)_{,\xi\xi}]_{(i,j)} - q_z^{*(ij)} / (Eh) = 0 \\ \gamma_4 \vartheta_{p,\xi\xi}^{(ij)} + \gamma_1 (r_p/b)^2 [(N_p^* \vartheta_{p,\xi})_{,\xi}]_{(i,j)} - (\gamma_1 h/b) [M_{pz}^* w_{p,\xi\xi}]_{(i,j)} + m_x^{*(ij)} = 0 \\ \gamma_1 = Fb^{-2}, \quad \gamma_2 = I_1 b^{-4}, \quad \gamma_3 = I_2 b^{-4}, \quad \gamma_4 = GI_d / (Eb^4) \\ N_p^* = N_p / (EF), \quad M_p^* = M_p / (EFb), \quad m_x^* = m_x / (Eb^2) \end{aligned}$$

Условия сопряжения полей второго порядка в обшивке и ребре имеют тот же вид (1.7), (1.8), но при переходе от центральной линии ребра к линии контакта необходимо в выражениях (1.5) учесть разложения (2.1), (2.2).

3. Решение краевой задачи. Линейная краевая задача для $U^{(i)}$ решалась точно с использованием пластинчатой модели ребра, аналогично [7]. Среди полей второго порядка основное значение имеют местные поля $U^{(ij)}$, $i > 1$ (общее поле $U^{(11)}$ относительно мало, смешанными полями $U^{(ij)}$, $i \neq j$, можно пренебречь при условии, что коэффициенты первого нелинейного приближения a_{ijs} не обращаются в нуль [12]).

Рассмотрим решение краевой задачи для местной формы второго порядка, с индексом $s=2$. Из выражений для нагрузочных членов $p_q^{(ij)}$ (2.7) следует, с учетом антисимметричности местной формы первого порядка $U^{(2)}$ относительно ребра, что форма второго порядка $U^{(22)}$ симметрична относительно ребра по перемещениям w и u . Соответствующая деформация состоит в изгибе в плоскости нормали к обшивке, что позволяет использовать стержневую схему ребра (переход от пластинчатой схемы ребра к стержневой связан с осреднением по высоте ребра величин, определенных в задаче первого порядка, в частности $\vartheta_p^{(2)}$).

С учетом изменяемости местной формы первого порядка в продольном направлении

$$\begin{aligned} (w, w_p, \vartheta_p)^{(2)} = [W(\eta), W_p, \theta_p]^{(2)} \sin m\alpha\xi \\ (u, v, N_{11}, N_{12}, N_{22}, N_p)^{(2)} = 0, \quad \alpha = \pi b/L \end{aligned} \quad (3.1)$$

выражения для нагрузочных членов (2.7) принимают вид

$$\begin{aligned} p_1^{(22)} = \rho_1^{(22)}(\eta) \sin 2m\alpha\xi, \quad p_2^{(22)} = \rho_{21}^{(22)}(\eta) + \rho_{22}^{(22)}(\eta) \cos 2m\alpha\xi \\ p_3^{(22)} = 0, \quad \rho_1^{(22)}(\eta) = -(h/2b)m\alpha [-(W^{(2)})^2 m^2 \alpha^2 + v(W_{,\eta}^{(2)})^2 + \\ + 1/2(1-v)(W^{(2)} W_{,\eta}^{(2)})_{,\eta}] \\ \rho_{21}^{(22)}(\eta) = -(h/4b) [vm^2 \alpha^2 (W^{(2)})^2 + (W_{,\eta}^{(2)})^2]_{,\eta} \\ \rho_{22}^{(22)}(\eta) = -(h/4b) [m^2 \alpha^2 (W^{(2)})^2 - (W_{,\eta}^{(2)})^2]_{,\eta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение систем уравнений (2.6), (2.9) искалось в тригонометрических рядах по продольной координате

$$\begin{aligned} (U, U_p, q_x)^{(22)} = \Sigma (U_k, U_{pk}, q_{xk})^{(22)} \cos k\alpha\xi \\ (W, V, W_p, V_p, q_y, q_z, m_x)^{(22)} = \Sigma (W_k, V_k, W_{pk}, V_{pk}, q_{yk}, q_{zk}, m_{xk})^{(22)} \sin k\alpha\xi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для k -й гармоники

$$L_{qk}(U_k^{(22)}, V_k^{(22)}) = p_{qk}^{(22)}(\eta) \quad (q=1, 2), \quad L_{3k}(W_k^{(22)}) = 0 \quad (3.4)$$

где L_{qk} — операторы, получающиеся из L_q (2.6) заменой операторов $\partial^2/\partial\xi^2$ на $-k^2$, а $p_{qk}^{(22)}$ равны

$$p_{1k}^{(22)} = \rho_1^{(22)}(\eta) \Omega(2m, k), \quad p_{2k}^{(22)} = \rho_{21}^{(22)}(\eta) \Omega(k, 0) + \rho_{22}^{(22)}(\eta) \Omega(k, 2m) \quad (3.5)$$

$$\Omega(m, k) = 2[1 - (-1)^{m+k}](m/\pi)(m^2 - k^2)^{-1}$$

решалась при помощи преобразования Лапласа (отличны от нуля лишь величины $p_{qk}^{(22)}$ с нечетными значениями k). В силу четности величин $p_{1k}^{(22)}$ и нечетности $p_{2k}^{(22)}$ функции $U_k^{(22)}$, $W_k^{(22)}$ должны быть четными, $V_k^{(22)}$ — нечетной: $(V_k, U_{k,\eta}, W_{k,\eta})_{\eta=0}^{(22)} = 0$. Решение уравнений (3.4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix}^{(22)} = A_k(\eta) \begin{pmatrix} U_k \\ V_{k,\eta} \end{pmatrix}_{\eta=0} + a_k(\eta) \quad (3.6)$$

$$W_k^{(22)} = C_1 \operatorname{ch} \beta_1 \eta + C_2 \operatorname{ch} \beta_2 \eta, \quad \beta_{1,2} = [(k\alpha)^2 \pm (k\alpha/c)(\sigma_x/E)^{1/2}]^{1/2}$$

где $A_k(\eta) = \|a_{ij}\|$ — матрица фундаментальных функций, $a(\eta) = \|a_i\|$ — вектор частного решения («звездочка» обозначает свертку функций):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \operatorname{ch}(k\alpha\eta) + dk\alpha\eta \operatorname{sh}(k\alpha\eta), & a_{12} &= -d\eta \operatorname{sh}(k\alpha\eta) \\ a_{21} &= d[k\alpha\eta \operatorname{ch}(k\alpha\eta) - \operatorname{sh}(k\alpha\eta)], \\ a_{22} &= (1+d)(k\alpha)^{-1} \operatorname{sh}(k\alpha\eta) - d\eta \operatorname{ch}(k\alpha\eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= d\{p_{1k}^{(22)}(\eta) * [(3-\nu)/(1+\nu)\operatorname{sh}(k\alpha\eta) + \eta \operatorname{ch}(k\alpha\eta)] - p_{2k}^{(22)}(\eta) * [\eta \operatorname{sh}(k\alpha\eta)]\} \\ a_2 &= dp_{1k}^{(22)}(\eta) * [\eta \operatorname{sh}(k\alpha\eta)] + p_{2k}^{(22)}(\eta) * a_{22}, \quad d = 1/2(1+\nu)/(1-\nu) \end{aligned}$$

Из формул (3.6) перемещения и усилия в обшивке выражаются через перемещения $U_k^{(22)}$, $V_k^{(22)}$, $W_k^{(22)}$ края $\eta = \eta_1 = 0,5$. Уравнения ребра для k -ой гармоники также приводят к матрице, связывающей усилия и моменты в ребре с перемещениями центральной линии ребра, а с учетом формул (1.5) — с перемещениями линии контакта $\eta = \eta_1$.

Учитывая вытекающую из уравнений (3.4) симметричность $U_k^{(22)}$ и $W_k^{(22)}$ и антисимметричность $V_k^{(22)}$ относительно ребра, имеем

$$\begin{aligned} V_k^{(22)} = W_{k,\eta}^{(22)} = 0, & \quad (U_{k,\eta}, V_{k,\eta})_{y=b/2-0}^{(22)} = (-U_{k,\eta}, V_{k,\eta})_{y=b/2+0}^{(22)} \\ (N_{12k}, Q_{2k}, N_{22k}, M_{22k})_{y=b/2-0}^{(22)} &= (-N_{12k}, Q_{2k}, -N_{22k}, M_{22k})_{y=b/2+0}^{(22)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Условия сопряжения (1.8) с учетом (1.7), (3.8) сводятся к двум линейным уравнениям относительно $U_k^{(22)}(\eta_1)$, $W_k^{(22)}(\eta_1)$, после решения которых определяются перемещения и усилия в обшивке и ребре и коэффициенты уравнений (2.3). Условия ортогональности местной формы второго порядка местной форме первого порядка выполняется тождественно благодаря антисимметричности последней относительно ребра. Условие ортогональности по отношению к общей форме первого порядка, обладающей той же симметрией относительно ребра, что и местная форма второго порядка, но имеющей одну гармонику по длине, требует изменения лишь одной гармоники $k=1$ в местной форме второго порядка (простота выполнения ортогонализации является одним из преимуществ выбранного метода решения в рядах). Отметим, что в силу условий ортогональности местная форма второго порядка оказывается зависящей от общей формы, что не учитывалось при решении задачи в рамках теории одномодального выпучивания [1].

Решение системы (2.3) совместно с условием равенства нулю ее якобиана определяет предельную нагрузку. Кривые относительная нагрузка λ/λ_1 — относительное укорочение Δ/Δ_1 , где Δ_1 — укорочение при нагрузке λ_1 для безызгибной деформации, определяются соотношением (продольное укорочение получается дифференцированием потенциальной энергии по

m	$W^{(22)}$	$N_{11}^{*(1)}$	$N_{11}^{*(1)}$	$N_p^{*(1)}$	$N_p^{*(1)}$	$M_p^{*(22)}$	$M_p^{*(1)}$
6	0,022 0,008	-0,177 -0,038	-0,092	-0,006	0,203	$8 \cdot 10^{-5}$	0,004
5	-0,008 -0,005	-0,346 0,118	0,253	-0,187	-0,94	-0,01	-0,06
12	-0,219 -0,067	-0,120 -0,253	-0,253	-0,997	-0,94	-0,06	-0,06

приложенному на крае напряжению)

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda a_0} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i} a_i \xi_i \left(\frac{1}{2} \xi_i + \xi_i^* \right) \right] \quad (a_0 = \lambda_1^2 \sigma^{(0)} \varepsilon^{(0)}) \quad (3.9)$$

Если, в случае $\lambda_2 < \lambda_1$, рассматривать вначале выпучивание только по одной местной форме $s=2$, $\xi_1=0$, из (3.9) с учетом соответствующего уравнения (2.3) следует выражение для коэффициента уменьшения продольной жесткости панели

$$\eta_n = \left\{ 1 + \frac{a_2}{2a_0} \left[\frac{a_2}{a_{2222}} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right) + \frac{\xi_2^*}{\xi_2} \right] \left(1 + \frac{2\xi_2^*}{\xi_2} \right) \right\}^{-1} \quad (3.10)$$

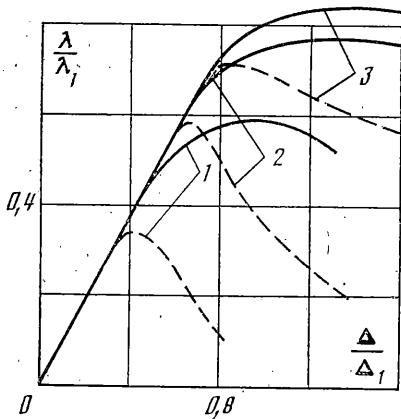
Отсюда можно получить выражение для эффективного редуцированного коэффициента продольной жесткости обшивки, считая, что ребро сохраняет свою жесткость: $\eta_0 = \eta_n - \omega(1 - \eta_n)$ (в случае местной формы выпучивания обшивки), а затем определить эффективную изгибную жесткость с учетом смещения нейтральной линии сечения.

4. Численный анализ. Были рассмотрены различные варианты панелей, включающие как случаи «тонких», так и «толстых» ребер. Учитывалось взаимодействие общей формы с каждой из местных форм в отдельности (в диапазоне $m=2-30$) [13]. Изучались поля второго порядка в обшивке и ребре, зависимости коэффициентов $b_{22} = a_{2222}/a_2$, определяющих характер послекритического поведения при несвязанном местном выпучивании, от параметров панели, влияние этих коэффициентов на равновесные ветви и предельную нагрузку. В качестве основных были приняты следующие два варианта: А — панель с толстыми ребрами относительно малой изгибной жесткости [1] (фиг. 1): $t_1/b_1=0,4$, $h/b=0,0088$, $b/L=0,25$, $\omega = t_1 b_1 / h b = -0,455$ (панель равноустойчива по общей форме и местной форме $m=6$); Б — панель с «тонкими» ребрами: $t_1/b_1=0,05$, $h/b=0,02$, $b/L=0,2$, $\omega=0,25$, для которой форма местного выпучивания $m=5$ предшествует общему выпучиванию. В варианте А дополнительно изменялась толщина обшивки в диапазоне $h = (0,5-1,2)h_0$ при сохранении всех остальных параметров (h_0 соответствует приведенным выше значениям ω и h/b).

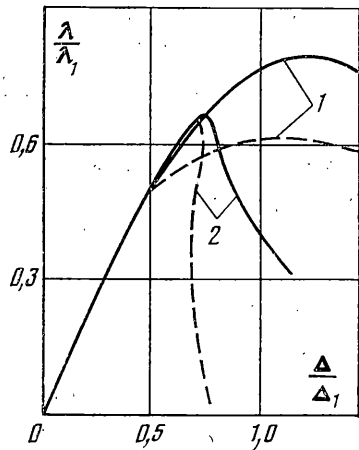
Для достаточной сходимости тригонометрических рядов оказывалось необходимым удерживать до 15 отличных от нуля гармоник ($k=1-29$). По перемещениям при этом, как правило, обеспечивалась точность порядка 0,5%, по напряжениям — 2-5%. Погрешность несколько возрастала в случаях очень тонкой обшивки, когда для избежания неустойчивости счета из-за плохой обусловленности матриц перехода от среднего сечения $\eta=0$ к крайнему сечению $\eta=0,5$ приходилось ограничивать диапазон k .

Поля второго порядка в обшивке и ребре иллюстрируются таблицей 1, в которой для основных местных форм приведены значения безразмерных прогибов и усилий в обшивке (в средней и крайней точках по ширине панели) и усилия и момента в ребре (все величины — для среднего сечения по длине). Для сравнения приведены также значения усилий и момента для общей формы первого порядка (первая строка относится к варианту А, а две другие — к варианту Б).

Характер полей второго порядка различен в зависимости от того, является ли местная форма первого порядка формой с преимущественными перемещениями обшивки (тип 1) или с преимущественными перемещениями ребер (тип 2). Для форм типа 1, основным силовым фактором, определяющим коэффициент b_{22} , являются мембранные напряжения второго порядка в обшивке, для форм типа 2 — напряжения в ребре. Отметим, что напряжения второго порядка являются суммой двух составляющих: $\sigma = \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}$, где $\sigma_{(1)}$ — напряжения, обусловленные перемещениями первого порядка (ввиду наличия квадратичного оператора в геометрических соотношениях (1.1), (1.2)), $\sigma_{(2)}$ — напряжения от полей перемещений второго порядка.



Фиг. 2



Фиг. 3

В свою очередь, напряжения $\sigma_{(2)}$ для обшивки можно представить в виде суммы $\sigma_{(2)} = \sigma'_{(2)} + \sigma''_{(2)}$, где $\sigma'_{(2)}$ соответствует частному решению системы (2.6), $\sigma''_{(2)}$ — «краевой эффект» (общее решение соответствующей однородной системы). Для форм типа 1 величины $\sigma_{(1)}$ и $\sigma'_{(2)}$ оказываются одного порядка, а $\sigma''_{(2)}$ и напряжения в ребре — весьма малы. Для форм типа 2 $\sigma_{(1)}$ и $\sigma'_{(2)}$ малы по сравнению с $\sigma''_{(2)}$ и напряжениями в ребре. Дополнительное нелинейное слагаемое в выражении для χ_{p2} (1.2) в случае форм типа 1 пренебрежимо мало, но для форм типа 2 оно имеет тот же порядок, что и «линейный» член.

Коэффициенты b_{22} во всех рассчитанных вариантах оказались положительными. Ниже приведены значения b_{22} для варианта А при различных h/h_0 :

h/h_0	0,5	0,7	0,9	1,0	1,2
b_{22}	0,306	0,307	0,309	0,310	0,290

Не отмечается существенного изменения b_{22} при приближении h к значению h_0 , при котором достигается равноустойчивость по общей и местной формам (в отличие от полученного в [1] резкого увеличения $|b_{22}|$, обусловленного неортогональностью формы второго порядка общей форме).

Равновесные ветви для связанного выпучивания с учетом коэффициентов первого и второго нелинейного приближений приведены на фиг. 2, 3. На фиг. 2 даны зависимости относительное напряжение λ/λ_1 — относительное укорочение Δ/Δ_1 для варианта А при $h/h_0 = 0,7; 0,9; 1,0$ (соответственно линии 1–3) в первом (штриховые линии) и втором (сплошные линии) нелинейных приближениях, для амплитуд погибей по общей и местной формам $\zeta_1^* = 1,0; \zeta_2^* = 0,1$. Для пластин, близких к равноустойчивым ($\sigma_M/\sigma_0 \approx 1$, где σ_0, σ_M — критические напряжения общего и местного выпучивания), предельная точка на равновесной ветви сохраняется и во втором приближении, но достигается при больших перемещениях. При $h/h_0 < 1$ ($\sigma_M < \sigma_0$) равновесные ветви оказываются восходящими, и погибь ζ_2^* мало влияет на несущую способность. Для определения максимальной нагрузки в этих случаях можно использовать редуцированный коэффициент продольной жесткости (3.10), пренебрегая величиной ζ_2^*/ζ_2 по сравнению с единицей. Коэффициент η_n зависит от нагрузки и при увеличении λ/λ_2 стремится к значению η_∞ — нижней границе η_n . Рассчитанные по η_∞ редуцированные коэффициенты изгибной жесткости панели для значений $h/h_0 = 0,7; 0,9$ оказались равными 0,684 и 0,718 соответственно.

На фиг. 3 приведены аналогичные равновесные ветви для варианта Б при $\zeta_1^* = 0,5, \zeta_2^* = 0,1$, в котором основными местными формами являются форма $m=5$ (типа 1) с критическими напряжениями $\sigma_M^* = \sigma_M 10^3/E = 1,406$ и форма $m=12$ (типа 2), для которой $\sigma_M^* = 2,660$. Линии 1 соответствуют связанному выпучиванию по общей форме и форме $m=5$ (штриховые линии — первое нелинейное приближение) и описывают поведение того же типа, что и линии на фиг. 2. Линии 2 — характеристика системы при связанном выпучивании по общей форме и форме $m=12$. В отличие от формы $m=5$ и варианта А, послекритическое поведение здесь неустойчиво для отрицательного общего прогиба, сопровождающегося догнутением ребер и разгрузкой обшивки. Послекритическая ветвь остается круто ниспадающей и во втором приближении, и предельные нагрузки в обоих приближениях близки. Это объясняется большим значением коэффициента взаимодействия в первом приближении $a_{122} = -1,361$, приводящим к достижению предельной нагрузки при малых прогибах ($\zeta_1 = -0,5-1,3, \zeta_2 = 0,2-0,4$). Величина погиби в этом случае существенно влияет на предельную нагрузку.

Таблица 2

m	σ_0^*	σ_m^*	σ_{n1}^*	σ_{n2}^*
5	2,192	1,406	1,353	1,757
12	2,192	2,660	1,453	1,484

В таблице 2 для варианта Б приведены значения безразмерных критических напряжений в линейном расчете σ_0^* и σ_m^* и предельных напряжений в первом (σ_{n1}^*) и втором (σ_{n2}^*) нелинейных приближениях для местных форм $m=5$ и $m=12$ (погибь $\xi_1^*=0,5$; $\xi_2^*=0,1$). Несмотря на более высокое критическое напряжение для формы $m=12$, именно эта форма оказывается наиболее опасной при учете взаимодействия форм. Этот вывод хорошо согласуется с результатами экспериментов [8, 9].

Основные выводы из приведенного численного анализа сводятся к следующему. В случае местных форм типа 1 (превалирующие перемещения обшивки) предельная нагрузка может быть корректно определена лишь во втором нелинейном приближении (при $\sigma_m < \sigma_0$); расчет по первому приближению может привести к значительной недооценке несущей способности; величина местной погибь существенно влияет на несущую способность лишь в случае пластин, близких к равноустойчивым по общей и местной формам.

В случае местных форм типа 2 (превалирующие перемещения ребер) предельная нагрузка во втором приближении мало отличается от полученной в первом приближении; пластина весьма чувствительна к общему и местному несовершенствам в широком диапазоне параметров.

Для форм типа 1 снижение предельной нагрузки по сравнению с полученной в линейном расчете в случае пластин, близких к равноустойчивым, составляет 15–30%; что согласуется с результатами [2, 3]; но для форм типа 2 предельная нагрузка при реальных значениях погибей может снижаться в два раза и более. Именно связанное выпучивание с местными формами второго типа определяет, как правило, несущую способность панелей, подкреплённых тонкостенными ребрами, даже в тех случаях, когда критические нагрузки для них в линейном расчете выше, чем для форм типа 1. Таким образом, полученные в [1–3] оценки эффекта нелинейного взаимодействия форм нельзя переносить на случай панелей с тонкостенными ребрами. В то же время поведение этих панелей с достаточной точностью может быть описано в рамках первого нелинейного приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tvergaard V. Imperfection-sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression // Intern. J. Solids and Struct. 1973. V. 9, N 1. P. 177–192.
2. Koiter W. T., Pignataro M. An alternative approach to the interaction between local and overall buckling in stiffened panels // Buckling of structures: Proc. IUTAM Sympos., 1974. Berlin: Springer-Verlag, 1976. P. 133–148.
3. Neut A., Van der. Mode interaction with stiffened panels // Buckling of structures: Proc. IUTAM Sympos., 1974. Berlin: Springer-Verlag, 1976. P. 117–132.
4. Маневич А. И. Связанные формы потери устойчивости подкреплённой тонкостенной панели // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-е ДГУ, 1976. Вып. 20. С. 117–123.
5. Маневич А. И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкреплённых оболочек. Киев-Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
6. Fok W. C., Rhodes J., Walker A. C. Local Buckling of outstands in stiffened plates // Aeronaut. Quart. 1976. V. 27, p. 4. P. 277–291.
7. Маневич А. И. Взаимодействие форм потери устойчивости сжатой подкреплённой панели // Строит. механика и расчет сооружений, 1981. № 5. С. 24–29.
8. Красовский В. Л., Маневич А. И. Экспериментальное изучение связанной неустойчивости панелей, подкреплённых тонкими ребрами // Тр. X Всесоюз. конфер. по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975. Тбилиси: Мецниереба, 1975. Т. 1. С. 655–663.
9. Thompson J. M. T., Tulk J. D., Walker A. C. An experimental study of imperfection-sensitivity in the interactive buckling of stiffened plates // Buckling of Structures: Proc. IUTAM Sympos., 1974. Berlin: Springer-Verlag, P. 149–159.
10. Койгер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1960. № 5. С. 99–110.
11. Budiansky B., Hutchinson J. W. Dynamic buckling of imperfection-sensitive structure // Applied mechanics. Proc. XI Intern. Congr. Appl. Mech., Munich, 1964. Berlin: Springer-Verlag, 1966. P. 636–651.
12. Koiter W. T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures // Tech. Hogesch. Delft Afd Werktuigbouwk. WTHD Rep. 1976. No. 19. 44 p.
13. Маневич А. И. К теории связанной потери устойчивости подкреплённых тонкостенных конструкций // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 337–345.