МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

УДК 539.3:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПО КОНТУРУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОМБИНИРОВАННЫХ НАГРУЗОК

ФРИДМАН А. З.

Рассматривается задача об устойчивости защемленной по краям прямоугольной ортотропной пластины под действием касательных и приложенных к контуру нормальных усилий. Известные решения этой задачи [1—10], полученные с помощью различных аналитических методов, охватывают лишь отдельные частные случаи нагружения изотропной пластины (сжатие, сдвиг). Решение [4], полученное для изотропной пластины при комбинированной нагрузке, до числового результата доведено только для квадратной пластины под действием сдвига и равномерного по всему контуру сжатия. Числовых результатов для комбинированной нагрузки в справочной литературе по расчету пластин недостаточно.

В публикуемой статье приводится решение данной задачи, полученное с помощью общего и строгого аналитического метода, результаты численной реализации для всех возможных вариантов действия нагрузки и различных соотношений сторон изотропной пластины. Эти результаты согласуются с теми, которые имеются в литературе, и существенно дополняют их.

1. Поместим начало прямоугольных координат X, Y в центре пластины. Уравнение устойчивости пластины при действии нормальных к контуру усилий σ_x, σ_y и сдвигающих усилий τ имеет вид (считаем, что сжимающие усилия $\sigma_x>0$ и $\sigma_y>0$ имеют направления, противоположные направлениям осей X и Y):

$$
\begin{gathered}
w_{,xxxx}+2c^{-2}D_{31}w_{,xxyy}+c^{-4}D_{21}w_{,yyyy}+\lambda(n_x w_{,xx}+\\
+n_y c^{-2}w_{,yy}+\sigma c^{-1}w_{,xy})=0,\ c=b/a \\
\lambda\sigma=2|\tau|a^2h/(\pi^2 D_1),\ \lambda n_x=|\sigma_x|a^2h/(\pi^2 D_1)\\
\lambda n_y=|\sigma_y|a^2h/(\pi^2 D_1),\ D_{31}=D_3/D_1,\ D_{21}=D_2/D_1
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $2a$, $2b$ — стороны пластины; D_1, D_2 — изгибные жесткости по главным направлениям; D_3 — приведенная жесткость; $x=\pi/aX$, $y=\pi/bY$ — безразмерные координаты; нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате.

При фиксированных значениях усилий σ_x, σ_y и τ задача заключается в определении наименьшего из собственных чисел $\lambda>0$ (считаем, что имеет место простое нагружение) уравнения (1.1) при граничных условиях

$$
w(\pm\pi,y)=w(x,\pm\pi)=0;\ w_{,x}(\pm\pi,y)=w_{,y}(x,\pm\pi)=0 \tag{1.2}
$$

Для решения задачи используем метод [11], являющийся модификацией метода тригонометрических рядов. Применение этого метода к решению различных задач по расчету пластин [10—17] [1] показало его эффективность.

2. Будем рассматривать отдельно комбинацию симметричных (четные по x и y) и антисимметричных (нечетные по x и y) форм выпучивания и комбинацию смешанных (четные по x, нечетные по y и наоборот) форм выпучивания. В соответствии с методом [11] для комбинации симметрич-

[1] См. *Фридман А. З.* Устойчивость защемленной прямоугольной пластины. М., 1981. 10 с.– Деп. в ВИНИТИ 10.04.81; № 1469; *Фридман А. З.* Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом дифференцируемых тригонометрических рядов. М., 1981. 17 с.– Деп. в ВИНИТИ 10.04.81; № 1468.

ных и антисимметричных форм выпучивания используются два представления (суммирование по n и m от 1 до ∞):

$$w=w_c+w_a, \quad w_c=A_0+A_1x^2+A_2x^4+ \tag{2.1}$$

$$+\sum a_m\cos mx+\sum c_n\cos ny+x^2\sum a_n^{(2)}\cos ny+$$

$$+x^4\sum a_n^{(4)}\cos ny+\sum\sum a_{mn}\cos mx\cos ny$$

$$w_a=x\sum a_n^{(1)}\sin ny+x^3\sum a_n^{(3)}\sin ny+\sum\sum a_{mn}^{*}\sin mx\sin ny$$

$$w=w_c^*+w_a^*, \quad w_c^*=B_0+B_1y^2+B_2y^4+\sum b_m\cos mx+\sum d_n\cos ny+ \tag{2.2}$$

$$+y^2\sum b_m^{(2)}\cos mx+y^4\sum b_m^{(4)}\cos mx+\sum\sum b_{mn}\cos mx\cos ny$$

$$w_a^*=y\sum b_m^{(1)}\sin mx+y^3\sum b_m^{(3)}\sin mx+\sum\sum b_{mn}^{*}\sin mx\sin ny$$

где w_c, w_c^* соответствуют симметричным формам выпучивания, а w_a, w_a^* — антисимметричным.

В представлении (2.1) ряды с коэффициентами a_m, a_{mn}, a_{mn}^* можно почленно дифференцировать четыре раза по x, а в представлении (2.2) ряды с коэффициентами d_n, b_{mn}, b_{mn}^* — четыре раза по y. Кроме того, эти представления позволяют находить соответственно $\partial^n w/\partial x^n|_{x=\pm\pi}$ и $\partial^n w/\partial y^n|_{y=\pm\pi}$ ($n=1, 2, 3$). По причине, указанной в [14], при граничных условиях (1.2) процедура нахождения смешанных производных $w_{,xy}$ и $w_{,xxyy}$, изложенная в [11], является излишней и эти производные могут быть определены из любого представления (2.1) и (2.2).

Представление (2.1) используется для нахождения $w_{,xx}$, $w_{,xxxx}$, $w_{,xy}$, $w_{,xxyy}$ и подстановки в граничные условия при $y=\pm\pi$, а представление (2.2) — для нахождения $w_{,yy}$, $w_{,yyyy}$ и подстановки в граничные условия при $y=\pm\pi$.

Подстановка представлений (2.1) и (2.2) и полученных из них выражений для производных в уравнение (1.1) и граничные условия (1.2), а также приравнивание правых частей представлений (2.1) и (2.2) с последующей заменой степенных функций их рядами Фурье приводит в результате сравнения коэффициентов при соответствующих выражениях к $(6+6m+6n+4mn)$ линейным алгебраическим уравнениям относительно неизвестных коэффициентов представлений (2.1) и (2.2) ($n=1, 2, \ldots$; $m=1, 2, \ldots$). Из этих уравнений $(6+4m+4n+4mn)$ коэффициентов выражаются через оставшиеся $a_n^{(4)}$, $b_m^{(4)}$, $a_n^{(3)}$, $b_m^{(3)}$, для нахождения которых с учетом $\xi_n=48(-1)^n a_n^{(4)}$, $\eta_n=48(-1)^n c^{-4} b_n^{(4)}$, $\xi_n^*=12(-1)^n n^{-1} a_n^{(3)}$, $\eta_n^*=12(-1)^n c^{-4} n^{-1} b_n^{(3)}$ получается однородная бесконечная система уравнений (суммирование по m от 1 до ∞):

$$\xi_n+\tau_n\xi_n^*+\sum\alpha_{nm}\xi_m+\sum\beta_{nm}\eta_m+\sum\gamma_{nm}\eta_m^*=0$$

$$\eta_n+\tau_n''\eta_n^*+\sum\alpha_{nm}''\xi_m+\sum\beta_{nm}''\eta_m+\sum\gamma_{nm}''\xi_m^*=0$$

$$\xi_n^*+\tau_n'\xi_n+\sum\beta_{nm}'\eta_m^*+\sum\gamma_{nm}'\eta_m=0$$

$$\eta_n^*+\tau_n'''\eta_n+\sum\beta_{nm}'''\xi_m+\sum\alpha_{nm}'''\xi_m^*=0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

которая в результате замены переменных $\zeta_{4n-3}=\xi_n$, $\zeta_{4n-2}=\eta_n$, $\zeta_{4n-1}=\xi_n^*$, $\zeta_{4n}=\eta_n^*$ приводится к каноническому виду

$$\zeta_k+\sum_{q=1}^{\infty}c_{kq}\zeta_q=0 \quad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

Собственные значения λ находятся из условия существования нетривиального решения системы (2.3), т. е. из уравнения

$$D = \det\|c_{kq}\| = \begin{vmatrix} 1+c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots \\ c_{21} & 1+c_{22} & c_{23} & \ldots \\ c_{31} & c_{32} & 1+c_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0, \quad c_{kq} = c_{kq}(\lambda) \tag{2.4}$$

Для вычисления приближений собственных чисел к их точному значению необходимо решать уравнения $D^{4N}=0$ ($N=1, 2, \ldots$), где D^{4N} — определитель порядка $4N$ редуцированной системы (2.3). Аналогичным образом получается система вида (2.3) и уравнение (2.4) для нахождения собственных чисел, соответствующих комбинации смешанных форм выпучивания. При этом используются следующие два представления (суммирование по n и m от 1 до ∞):

$$w = w_1 + w_2 \tag{2.5}$$

$$w_1 = \sum b_n \sin ny + x^2 \sum a_n^{(2)} \sin ny + x^4 \sum a_n^{(4)} \sin ny + \\ + \sum\sum a_{mn} \cos mx \sin ny$$

$$w_2 = A_1 x + A_2 x^3 + \sum b_m{}^* \sin mx + x \sum c_n^{(1)} \cos ny + x^3 \sum c_n^{(3)} \cos ny + \\ + \sum\sum c_{mn} \sin mx \cos ny$$

$$w = w_1' + w_2', \quad w_1' = B_1 + B_2 y^3 + \sum d_n \sin ny + \\ + y \sum b_m^{(1)} \cos mx + y^3 \sum b_m^{(3)} \cos mx + \sum\sum b_{mn} \cos mx \sin ny \\ w_2' = \sum \beta_m \sin mx + y^2 \sum b_m^{(2)} \sin mx + \\ + y^4 \sum b_m^{(4)} \sin mx + \sum\sum \gamma_{mn} \sin mx \cos ny \tag{2.6}$$

где w_1, w_1' соответствуют четным по x и нечетным по y формам выпучивания, а w_2, w_2' — нечетным по x и четным по y (обозначения коэффициентов в представлениях (2.5), (2.6) и (2.1), (2.2) не связаны между собой).

Искомое наименьшее собственное число $\lambda_{\min}$, соответствующее критическому значению нагрузки, при фиксированных значениях σ_x, σ_y, τ и c определяется как $\lambda_{\min} = \min(\lambda_{\min}^{(1)}, \lambda_{\min}^{(2)})$, где $\lambda_{\min}^{(1)}$ и $\lambda_{\min}^{(2)}$ — наименьшие собственные числа, полученные при рассмотрении указанных форм выпучивания. Вместо усилий σ_x, σ_y, τ можно фиксировать соотношения между ними: $\varphi_1=\sigma_x/\tau$, $\varphi_2=\sigma_y/\tau$ или $\varphi_3=\tau/\sigma_x$, $\varphi_4=\sigma_y/\sigma_x$. Выражения для критических усилий на основании формул (1.1) записываются следующим образом:

$$\tau^* = K_1 \pi^2 D_1/(A^2 h), \quad \sigma_x{}^* = K_2 \pi^2 D_1/(A^2 h), \\ \sigma_y{}^* = K_3 \pi^2 D_1/(A^2 h) \qquad (A=2a) \tag{2.7}$$

В зависимости от того, при рассмотрении каких форм выпучивания найдено наименьшее собственное число, устанавливается, какие формы выпучивания (симметричные, антисимметричные или смешанные) возникают при потере устойчивости пластины. Эти формы могут быть получены с помощью представления (2.4) либо (2.2), если потере устойчивости соответствуют симметричные и антисимметричные формы, и с помощью представления (2.5) либо (2.6) для случая смешанных форм. При этом нужно вычислить нетривиальное решение системы (2.3), а затем — коэффициенты представления формы выпучивания.

3. При вычислении наименьших собственных чисел уравнение (2.4) решалось методом последовательных приближений, получающихся в результате редукции системы (2.3) и соответствующего усечения определи-

Таблица 1

A		B		C			
c	K_1	c	K_2	φ_3	c	K_1	K_2
1	14,67	0,5	31,4	0,4	0,5	11,6	29,1
10/9	13,35	1	10,07		1	3,72	9,30
1,25	12,36	1,5	5,82		1,5	2,24	5,60
10/7	11,65	2	4,83		2	1,89	4,72
1,5	11,45						
5/3	10,95			1	1	7,26	7,26
2	10,26			2	1	9,94	4,97
2,5	9,830				1,5	7,10	3,55
3	9,554				2	6,56	3,28
10/3	9,468						
4	9,345						

Таблица 2

D				E			
φ_1	c	K_1	K_2	φ_4	c	K_2	K_3
−0,2	1	17,4	−3,48	−0,1	1	10,9	−1,09
	1,5	13,9	−2,78	−0,25	0,5	35,8	−8,95
	2	12,4	−2,48		1	12,32	−3,08
					2	5,11	−1,28
−0,4	1	20,9	−8,36				
	1,5	16,4	−6,56	−0,5	1	13,1	−6,55
	2	15,0	−6,0	−1	1	14,98	−14,98
−1	1	36,5	−36,5	−2	1	20,0	−40,0
					2	7,93	−15,9

теля, а также бесконечных рядов, входящих в элементы матрицы c_{hq}. Процесс последовательного приближения сходится весьма быстро и позволяет вычислять решение со сколь угодно высокой точностью. Результаты вычисления коэффициентов K_1, K_2, K_3 в выражениях для критической нагрузки (2.7) при ее различных вариантах действия на изотропную пластину ($D_{31}=D_{21}=1$) приведены в табл. 1—4.

В этих таблицах представлены случаи: A — сдвиг ($\varphi_1=\varphi_2=0$; $K_2=K_3=0$); B — одноосное сжатие ($\varphi_3=\varphi_4=0$; $K_1=K_3=0$); C — одноосное сжатие и сдвиг ($\varphi_3>0$, $\varphi_4=0$; $K_3=0$); D — одноосное растяжение и сдвиг ($\varphi_1<0$, $\varphi_2=0$; $K_2<0$, $K_3=0$); E — сжатие по одной оси и растяжение по другой ($\varphi_3=0$, $\varphi_4<0$; $K_1=0$, $K_3<0$); F — двуосное сжатие ($\varphi_3=0$; $K_1=0$); G — двуосное сжатие и сдвиг; I — двуосное растяжение и сдвиг ($\varphi_1<0$, $\varphi_2<0$; $K_2>0$, $K_3<0$); K — сжатие по одной оси, растяжение по другой и сдвиг ($\varphi_4<0$, $\varphi_3>0$; $K_3<0$).

Большинство этих результатов в литературе отсутствует; найденные значения согласуются с имеющимися в литературе и уточняют некоторые из них. Полученные значения коэффициентов K_1, K_2 и K_3 позволяют строить в безразмерных координатах пограничные поверхности $F(K_1, K_2, K_3)=0$ для различных значений величины c, исследовать свойства этих поверхностей и определять степень опасности с точки зрения потери устойчивости той или иной нагрузки.

С изменением величины c, а также φ_1 и φ_2 (или φ_3 и φ_4) попеременно возникают различные формы выпучивания (симметричные, антисимметричные и смешанные). Поэтому игнорирование возможности возникнове-

Таблица 3

F: φ₄	c	K_2	K_3
1	0,5	15,69	15,69
	1	5,3036	5,3036
	1,05	5,063	5,063
	1,1	4,866	4,866
	1,15	4,703	4,703
	1,2	4,568	4,568
	1,25	4,457	4,457
	1,3	4,364	4,364
	1,35	4,286	4,286
	1,4	4,221	4,221
	1,45	4,167	4,167
	1,5	4,121	4,121
	1,65	4,023	4,023
	1,85	3,952	3,952
	2	3,923	3,923
	2,15	3,907	3,907
	2,35	3,896	3,896
	3,5	3,819	3,819
0,5	0,5	23,0	11,5
	1	7,029	3,514
	2	4,35	2,175
2	0,5	8,70	17,4
	1	3,514	7,029
	2	2,875	5,75

G: φ₄	φ₃	c	K_1	K_2	K_3
1	5	1	10,78	2,156	2,156
	2	1	7,413	3,706	3,706
	1	1	4,646	4,646	4,646
	0,5	1	2,549	5,098	5,098
	0,4	1	2,066	5,165	5,165
	2	0,5	22,0	11,0	11,0
	2	1,5	5,82	2,91	2,91
	2	2	5,50	2,75	2,75
	2	3	5,12	2,56	2,56
	0,4	0,5	6,16	15,4	15,4
	0,4	1,5	1,61	4,02	4,02
	0,4	2	1,54	3,84	3,84
	0,4	3	1,50	3,75	3,75
0,5	0,4	0,5	8,64	21,6	10,8
	0,4	1	2,69	6,73	3,36
	0,4	2	1,70	4,26	2,13
	1	1	5,73	5,73	2,86
	2	0,5	25,6	12,8	6,40
	2	1	8,56	4,28	2,14
	2	2	6,06	3,03	1,51
2	0,8	0,5	6,82	8,52	17,0
	0,8	2	2,16	2,70	5,40

Таблица

I: φ₁	φ₂	c	K_1	K_2	K_3
—0,1	—0,1	1	17,47	—1,747	—1,747
—0,2	—0,2	1	21,24	—4,248	—4,248
		1,5	16,6	—3,32	—3,32
		2	14,6	—2,92	—2,92
		3	13,58	—2,716	—2,716
—0,3	—0,3	1	26,48	—7,944	—7,944
—0,4	—0,4	1	34,05	—13,62	—13,62
		1,5	26,2	—10,5	—10,5
		2	23,3	—9,32	—9,32
		3	21,5	—8,60	—8,60
—0,6	—0,6	1	66,4	—39,8	—39,8
—0,2	—0,1	1	19,14	—3,828	—1,914
—0,4	—0,2	1	26,3	—10,5	—5,26

K: φ₄	φ₃	c	K_1	K_2	K_3
—0,1	0,4	1	4,0	10,0	—1,0
	2	1	10,3	5,15	—0,515
—0,25	0,4	0,5	13,0	32,4	—8,10
	0,4	1	4,44	11,1	—2,775
	0,4	2	1,99	4,97	—1,24
	0,75	1	6,91	9,35	—2,34
	2	0,5	32,2	16,1	—4,02
	2	1	10,8	5,40	—1,35
	2	2	6,82	3,41	—0,852
—0,5	0,4	1	4,92	12,3	—6,15
	2	1	11,6	5,81	—2,90
—1	0,4	1	5,60	14,0	—14,0
	2	1	13,8	6,90	—6,90
—10	13	1	26,8	2,06	—20,6
	30	1	19,0	0,632	—6,32

ния каких-либо форм при потере устойчивости пластины может привести к ошибке, как, например, в [4] при чистом сдвиге пластины для $c>1{,}5$.

Табл. 2, 4 показывают, что растяжение, повышая устойчивость пластины, вместе с тем не может воспрепятствовать (в пределах упругости) потере устойчивости при достаточно сильном сжатии или сдвиге.

В заключение отметим, что аналогичным образом может быть получено решение задачи об устойчивости пластины при других краевых условиях (например, шарнирном опирании и сочетании шарнирного опирания и жесткого защемления). При этом для формы выпучивания используются те же представления (2.1), (2.2) и (2.5), (2.6), что приводит к системе вида (2.3) и соответственно к уравнению для нахождения собственных чисел (2.4). Полученные результаты совместно с решением для шарнирно опертой пластины позволяют оценивать критическую нагрузку для пластин с упруго защемленными краями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G. I.* The buckling load for a rectangular plate with four clamped edges // Z. angew. Math. und Mech. 1933. B. 13. H. 2. S. 147–152.
2. *Faxén O. H.* Die knickfestigkeit rechteckigen platten // Z. angew. Math. und Mech. 1935. B. 15. H. 5. S. 268–277.
3. *Sazawa K., Watanabe W.* Buckling of a rectangular plate with four clamped edges re-examined with improved theory // Repts Tokyo Imp. Univ. Aeronaut. Research. Inst. 1936. V. 11. P. 143–152.
4. *Iguchi S.* Die Knickung der rechteckigen Platte durch Schubkräfte // Ing.-Arch. 1938. B. 9. H. 1. S. 1–12.
5. *Levy S.* Buckling of rectangular plates with built-in edges // Trans. ASME. 1942. V. 64. No. 4. A171–A174.
6. *Budiansky B., Connor R. W.* Buckling stresses of clamped rectangular flat plates in shear // NACA, Tech. Note. 1948. No. 1559. 11 p.
7. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1955. 568 с.
8. *Барг Я. А.* Устойчивость прямоугольных пластин // Строит. механика и расчет сооружений. 1960. № 5. С. 27–34.
9. *Wong P. M., Bettess P.* Elastic buckling of rectangular clamped plates // Intern. J. Solids and Struct. 1979. V. 15. No. 6. P. 457–466.
10. *Даревская Е. В.* Устойчивость защемленной по контуру прямоугольной пластинки // Строит. механика и расчет сооружений. 1982. № 3. С. 31–35.
11. *Даревский В. М.* Об одном методе решения уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 9. С. 1661–1672.
12. *Даревский В. М., Шаринов И. Л.* Новое решение задачи об изгибе защемленной по краям прямоугольной пластинки // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука. 1975. С. 183–194.
13. *Даревский В. М.* Изгиб прямоугольной пластинки со свободными краями, лежащей на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 79–90.
14. *Даревская Е. В.* Изгиб защемленной по краям прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании с двумя характеристиками // Строит. механика и расчет сооружений. 1980. № 5. С. 25–30.
15. *Даревская Е. В.* Свободные колебания защемленной по краям прямоугольной пластинки // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 2. С. 75–82.
16. *Фридман А. З., Христенко А. С.* О напряженно-деформированном состоянии неравномерно нагретой по толщине пластины // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 9. С. 69–75.
17. *Фридман А. З.* О применении метода дифференцируемых тригонометрических рядов для решения задач расчета судовых конструкций // Вопросы судостроения. Сер. Математические методы. Программирование. Эксплуатация ЭВМ. Л.: ЦНИИ «Румб». 1981. Вып. 27. С. 59–65.

Николаев

Поступила в редакцию
13.X.1986