

УДК 531.53

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКОМ ПРИ НАЛИЧИИ АКТИВНЫХ ПОМЕХ

СОКОЛОВ Б. Н., ТУРОВА В. Л.

Рассматривается маятник, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной по величине скоростью вдоль горизонтальной направляющей. На груз маятника в плоскости его движения действует ограниченная по модулю возмущающая сила. В предположении малости колебаний строится управление скоростью точки подвеса, обеспечивающее минимальное гарантированное значение энергии маятника в заданный момент времени при наихудшем воздействии возмущающей силы. Эта задача формализована как позиционная линейная дифференциальная игра [1-3] второго порядка с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы. Для исследования игры были использованы программы [4]. Сочетание численных и аналитических подходов позволило построить синтез во всем пространстве фазовых позиций. Рассмотрена также задача о наискорейшем приведении колебательной системы на множество заданной энергии. Задачи управления колебаниями исследовались ранее в [5].

1. Постановка задач. Уравнения движения. Рассмотрим маятник, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной скоростью $u(t)$ вдоль горизонтальной направляющей. Запишем уравнения малых колебаний маятника под действием возмущающей силы F и силы инерции, обусловленной движением точки подвеса [5]:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \omega, \quad I\dot{\omega} = -mgL\varphi - mL\dot{u} + LF \\ |u| &\leq u_0, \quad |F| \leq F_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где φ — угловое отклонение маятника от вертикали (против часовой стрелки), ω — его угловая скорость, L — длина подвеса, m — масса груза, I — момент инерции маятника относительно подвеса, u — скорость подвеса. Сделаем в (1.1) замену переменных

$$\begin{aligned} t &= T_0 t', \quad u = u_0 u', \quad \varphi = u_0 T_0^{-1} g^{-1} \varphi', \quad T = T_0 t' \\ T_0 &= [I/(mgL)]^{1/2}, \quad F = m u_0 T_0^{-1} v' \end{aligned}$$

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид (штрихи далее опускаем):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \omega, \quad \dot{\omega} = -\varphi - \dot{u} + v, \quad |u| \leq 1 \\ |v| &\leq v_0 = F_0 T_0 m^{-1} u_0^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Сделаем замену $\psi = \varphi + u$ (величина ψ имеет смысл абсолютной безразмерной скорости груза). В новых переменных φ , ψ уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \psi - \dot{u}, \quad \dot{\psi} = -\varphi + v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq v_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Начальное положение системы φ_0 , ψ_0 в момент t_0 задано. Выражение для полной энергии маятника складывается из кинетической и потенциальной энергии груза и с точностью до коэффициента в безразмерных переменных имеет вид $\varphi^2(T) + \psi^2(T)$. Рассмотрим терминальный функционал

$$\Gamma(\varphi(T), \psi(T)) = [\varphi^2(T) + \psi^2(T)]^{1/2} \quad (1.4)$$

Требуется построить управление $u(\varphi, \psi, t)$ скоростью подвеса, доставляющее наименьшее гарантированное значение функционалу (1.4) при наихудшем воздействии помехи $v(t)$: $V(\varphi, \psi, t) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(t)} \Gamma(\varphi(T), \psi(T))$.

Сделаем в (1.3), (1.4) замену переменных по формуле

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t-T) & \sin(t-T) \\ -\sin(t-T) & \cos(t-T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Фигурирующая здесь матрица $X(T, t)$ — фундаментальная матрица уравнения (1.3). При этой замене выполнены равенства

$$\xi_1(T) = \varphi(T), \quad \xi_2(T) = \psi(T) \quad (1.6)$$

В новых переменных (ξ_1, ξ_2) правая часть уравнений движения не будет содержать фазовых переменных

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= -u \cos(t-T) - v \sin(t-T) \\ \dot{\xi}_2(t) &= -u \sin(t-T) + v \cos(t-T) \end{aligned} \quad (1.7)$$

В силу формулы (1.6) структура функционала не изменится. Для построения управления удобно ввести «обратное время» формулой $\tau = T - t$. В обратном времени уравнения движения примут вид (точка означает дифференцирование по τ):

$$\dot{\xi}_1 = u \cos \tau - v \sin \tau, \quad \dot{\xi}_2 = -u \sin \tau - v \cos \tau \quad (1.8)$$

Критерием качества управлений u, v служит функционал

$$\Gamma(\xi_1(0), \xi_2(0)) = [\xi_1^2(0) + \xi_2^2(0)]^{1/2} \quad (1.9)$$

Наряду с задачей 1 с терминальным функционалом (1.4) в п. 4 будет рассмотрена задача 2 о наискорейшем приведении системы (1.3) на терминальное множество фиксированной энергии, т.е. на множество Γ_c : $\varphi^2(T) + \psi^2(T) \leq c$. Эта задача не сводится к рассмотренной выше. Численные расчеты надо проводить в исходном пространстве φ, ψ , а множества уровня цены игры, вообще говоря, не выпуклы, что осложняет численный анализ.

Численное исследование задач 1, 2 проведено с помощью программ решения линейных дифференциальных игр [4]. Программы предназначены для решения дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания вида $\dot{x} = Ax + Bu + Cv$, $x \in R^n$, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$ и терминальным функционалом, зависящем от двух переменных, а также игр с нефиксированным временем окончания вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Cv \\ x &\in R^2, u \in P \subset R^2, v \in Q \subset R^2 \end{aligned}$$

2. Траектории программного максимина в задаче с фиксированным временем. Согласно необходимым условиям оптимальности на траекториях программного максимина функция Гамильтона достигает максимума по v и минимума по u [1]:

$$H = -p_1(v \sin \tau - u \cos \tau) + p_2(-v \cos \tau - u \sin \tau) \rightarrow \min_u \max_v \quad (2.1)$$

Следовательно, сопряженная система уравнений имеет вид $\dot{p}_i = 0$ и $p_i(\tau) = \text{const}$. Условия трансверсальности дают следующие значения сопряженных переменных для траектории, исходящей (в обратном времени) из точки $\xi_1(0), \xi_2(0)$:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= -\cos \theta, \quad p_2(0) = -\sin \theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \xi_1(0) &= c \cos \theta, \quad \xi_2(0) = c \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь θ — угол, образованный вектором (ξ_1, ξ_2) с осью $O\xi_1$, c — параметр, совпадающий с терминальным значением функционала (1.9). Формулы (2.1), (2.2) дают следующие значения управлений на траектории,

удовлетворяющей условиям программного максимина

$$v(\tau) = v_0 \operatorname{sign} \sin(\tau + \theta), \quad u(\tau) = \operatorname{sign} \cos(\tau + \theta) \quad (2.3)$$

Уравнения (1.8) с управлением (2.3) инвариантны к замене переменных

$$\xi_1 \rightarrow -\xi_1, \quad \xi_2 \rightarrow -\xi_2, \quad \theta \rightarrow \theta + \pi \quad (2.4)$$

Следовательно, оптимальные траектории и поверхности переключения будут располагаться в фазовом пространстве ξ_1, ξ_2 τ симметрично относительно оси τ . Поэтому исследование необходимых условий оптимальности будем проводить только для траекторий, начинающихся (в обратном времени) в верхней полуплоскости ($0 < \theta \leq \pi$).

Соотношения (2.3) показывают, что управления $v(\tau), u(\tau)$ — релейные функции времени с интервалами постоянства, равными π . Обозначим через $\tau_i(\theta)$ — моменты переключения управлений на оптимальной траектории, так что на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ управления постоянны, а в момент τ_{i+1} либо $u(\tau)$, либо $v(\tau)$ меняют знак. Из формул (2.3) следует

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= \tau_i + \pi/2 \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad \tau_0 = 0 \\ \tau_1 &= \pi - \theta \quad (\theta \in (\pi/2, \pi]), \quad \tau_1 = \pi/2 - \theta \quad (\theta \in (0, \pi/2]) \\ u(\tau) &= \operatorname{sign} \cos \theta, \quad v(\tau) = v_0 \operatorname{sign} \sin \theta \quad (\tau \in (0, \tau_1)) \\ u(\tau) &= (-1)^{[1/2(i+1)]}, \quad v(\tau) = v_0 (-1)^{[1/2]} \quad (\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \theta \in (0, \pi/2]) \\ u(\tau) &= (-1)^{[1/2]}, \quad v(\tau) = v_0 (-1)^{[1/2(i+1)]} \quad (\theta \in (\pi/2, \pi]) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь и далее квадратными скобками обозначается целая часть числа. На участках $[\tau_i, \tau_{i+1})$ постоянства управления $u, v = \operatorname{const}$ уравнения (1.8) допускают решение

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi_1(\tau) \\ \xi_2(\tau) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \xi_1(\tau_i) \\ \xi_2(\tau_i) \end{vmatrix} + u(\tau_i) \begin{vmatrix} \sin \tau - \sin \tau_i \\ \cos \tau - \cos \tau_i \end{vmatrix} + v(\tau_i) \begin{vmatrix} \cos \tau - \cos \tau_i \\ -\sin \tau + \sin \tau_i \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставим в эти соотношения управления (2.5) и введем $Q = (1 + v_0^2)^{1/2}$, $u(\tau_i) = Q \sin \alpha_i$, $v(\tau_i) = Q \cos \alpha_i$, $\alpha_i^* = \arcsin Q^{-1}$. Для α_i из формулы (2.3) получаем соотношения ($i=0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\pi [i/2] + (-1)^i \alpha^* \quad (\theta \in (0, \pi/2]) \\ \alpha_i &= -\pi [(i+1)/2] + (-1)^{i+1} \alpha^* \quad (\theta \in (\pi/2, \pi]) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выражение (2.6) с учетом (2.7) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi_1(\tau) \\ \xi_2(\tau) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \xi_1(\tau_i) - Q \cos(\alpha_i - \tau_i) \\ \xi_2(\tau_i) - Q \sin(\alpha_i - \tau_i) \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} \cos(\alpha_i - \tau) \\ \sin(\alpha_i - \tau) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Формула (2.8) показывает, что на участках $[\tau_i, \tau_{i+1})$ постоянства управления фазовые точки $(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau))$ движутся в обратном времени по часовой стрелке по дугам окружности радиуса Q . Дуги имеют центры в точках

$$c^0 = (\xi_1(0) - v_0 \operatorname{sign} \sin \theta, \xi_2(0) - \operatorname{sign} \cos \theta) \quad (2.9)$$

$$c^i = (\xi_1(\tau_i) - u(\tau_i) \sin \tau_i - v(\tau_i) \cos \tau_i, \xi_2(\tau_i) - u(\tau_i) \cos \tau_i + v(\tau_i) \sin \tau_i) \quad (2.10)$$

Подставим значения моментов τ_i (2.5) переключения управлений в (2.10) и найдем геометрическое место центров дуг окружностей, составляющих фазовую траекторию изображающей точки. На границе τ_{i+1} участка $[\tau_i, \tau_{i+1})$ постоянства управления либо $v(\tau)$, либо $u(\tau)$ меняет свое значение. Предположим, что в момент τ_{i+1} свое значение меняет $v(\tau)$. Подставляя значения моментов переключения управления $v(\tau)$ (2.5) в (2.10), получим

$$\begin{aligned} c^{i+1} - c^i &= (-v(\tau_{i+1}) \cos \tau_i + v(\tau_i) \cos \tau_i, v(\tau_{i+1}) \sin \tau_i - v(\tau_i) \sin \tau_i) = \\ &= -2v_0 (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогично, в момент τ_{i+1} изменения значения управления $u(\tau)$ координата центра дуги, по которой движется фазовая точка, смещается на

величину $c^{i+1} - c^i = 2(\cos \theta, \sin \theta)$. Отсюда и из (2.11) следует, что центры дуг окружностей, составляющих оптимальную траекторию, лежат на прямой, образующей угол θ с осью $O\xi_1$ и проходящей через точку c^0 (2.9). Расстояние между центрами дуг, последовательно проходимых точкой за полупериод свободных колебаний, равно

$$|c^{i+2} - c^i| = 2|v_0 - 1| \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.5), (2.9), (2.10), (2.12) следует, что после i -го переключения фазовая точка будет двигаться по дуге с центром

$$c^i = (c + 2\mu k - 2(v_0 - 1) \left[\frac{i}{2} \right]) \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_0 \operatorname{sign} \sin \theta \\ \operatorname{sign} \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

$$\mu = 1 \quad (0 < \theta \leq \pi/2), \quad \mu = -v_0 \quad (\pi/2 < \theta \leq \pi) \\ k = i - 2[i/2] \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Формулы (2.5) определяют следующую зависимость числа переключений i от θ и τ :

$$i = [2(\tau + \theta)/\pi] \quad (0 < \theta \leq \pi/2) \quad (2.14) \\ i = [2(\tau + \theta)/\pi] - 1 \quad (\pi/2 < \theta \leq \pi)$$

Соотношения (2.5), (2.7), (2.8), (2.13), (2.14) дают зависимость $\xi_v(\tau, c, \theta)$ ($v = 1, 2$; c, θ — параметры семейства).

3. Параметрические уравнения для поверхностей переключения. Оптимальные стратегии первого и второго игроков определяются поверхностями переключения в пространстве (ξ_1, ξ_2, τ) [6–9]. Поверхность первого игрока обозначим через Π , второго игрока — через S . Фактически достаточно знать сечения поверхностей переключения плоскостями $\tau = \text{const}$. Каждое из сечений $\Pi(\tau), S(\tau)$ представляет собой линию, разделяющую плоскость на две части. Поверхности Π, S могут содержать особые куски, являющиеся согласно терминологии [4] рассеивающими. Совпадающая часть поверхностей Π, S может содержать эквивокальную поверхность [1, 10]. На этой поверхности оптимальные движения расщепляются: одно идет по поверхности, другое сходит с нее.

В рассматриваемой задаче некоторые участки линий $\Pi(\tau), S(\tau)$ допускают аналитическое описание. Полностью линии переключения Π, S будут построены численно в п. 4. Перейдем к выводу параметрических уравнений участков линий переключения. Для этого удобно воспользоваться формулами (2.7), (2.8), (2.13) при значениях $\tau = \tau(\theta)$ (2.5), соответствующих моментам переключения. Пусть $0 \leq \tau \leq \pi/2$ и рассмотрим поверхность переключения, образованную точками переключения управления $u(\xi_1, \xi_2, \tau)$ на траекториях, которые начинаются (в обратном времени) в первой четверти, т. е. при $0 < \theta \leq \pi/2$. Из соотношений (2.8), (2.9) при $i = 0$ и $\theta = \pi/2 - \tau_1$ имеем

$$\begin{vmatrix} \xi_1(\tau_1) \\ \xi_2(\tau_1) \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \sin \tau_1 \\ \cos \tau_1 \end{vmatrix} - 2Q \sin \frac{\tau_1}{2} \begin{vmatrix} \sin(\tau_1/2 - \alpha^*) \\ \cos(\tau_1/2 - \alpha^*) \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

$$\alpha^* = \arcsin Q^{-1}, \quad Q = (1 + v_0^2)^{1/2}$$

При каждом фиксированном τ_1 соотношение (3.1) задает на плоскости (ξ_1, ξ_2) луч ($0 \leq c < \infty$), направленный под углом τ_1 к оси $O\xi_2$. Начало этого луча (и всех последующих (3.2)–(3.4)) принадлежит сечению сингулярной поверхности, образованной рассеивающей и эквивокальной [4] поверхностями. Эти поверхности будут полностью построены численно в п. 4.

Рассмотрим поверхность, образованную точками переключения управления $v(\xi_1, \xi_2, \tau)$ на траекториях, начинающихся во второй четверти при $0 < \tau \leq \pi/2$. Соотношения (2.7), (2.8), (2.13) при $i = 1, \tau_1 = \pi - \theta, \pi/2 < \theta \leq \pi$

приводят к формуле

$$\left\| \begin{array}{l} \xi_1(\tau_1) \\ \xi_2(\tau_1) \end{array} \right\| = c \left\| \begin{array}{l} -\cos \tau_1 \\ \sin \tau_1 \end{array} \right\| - 2Q \sin \frac{\tau_1}{2} \left\| \begin{array}{l} \sin(\tau_1/2 + \alpha^*) \\ \cos(\tau_1/2 + \alpha^*) \end{array} \right\| \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь поверхности переключений управлений $v(\xi_1, \xi_2, \tau)$ и $u(\xi_1, \xi_2, \tau)$, которым соответствуют моменты переключений $\tau_2 \in (\pi/2, \pi]$. Пусть $0 < \theta \leq \pi/2$. Тогда поверхность переключения управления $v(\xi_1, \xi_2, \tau)$ определяется уравнениями (2.7), (2.8), (2.13) при $i=2$ и $\tau_2 + \theta = \pi$. Получаем после упрощений

$$\left\| \begin{array}{l} \xi_1(\tau_2) \\ \xi_2(\tau_2) \end{array} \right\| = (c+2) \left\| \begin{array}{l} -\cos \tau_2 \\ \sin \tau_2 \end{array} \right\| - 2Q \sin \left(\frac{\tau_2}{2} + \alpha^* \right) \left\| \begin{array}{l} \sin(\tau_2/2) \\ \cos(\tau_2/2) \end{array} \right\| \quad (3.3)$$

Поверхность переключения управления $u(\xi_1, \xi_2, \tau)$ при $\pi/2 < \theta \leq \pi$ определяется уравнениями (2.7), (2.8), (2.13) при $i=2$ и $\tau_2 + \theta = 3/2\pi$:

$$\left\| \begin{array}{l} \xi_1(\tau_2) \\ \xi_2(\tau_2) \end{array} \right\| = -(c-2v_0) \left\| \begin{array}{l} \sin \tau_2 \\ \cos \tau_2 \end{array} \right\| + 2Q \sin \left(\alpha^* - \frac{\tau_2}{2} \right) \left\| \begin{array}{l} \sin(\tau_2/2) \\ \cos(\tau_2/2) \end{array} \right\| \quad (3.4)$$

Формулы (3.1)–(3.4) определяют линии переключения, образованные траекториями, начинающимися в верхней полуплоскости. Согласно (2.4) траектории, начинающиеся в нижней полуплоскости, образуют поверхность, центрально-симметричную построенной.

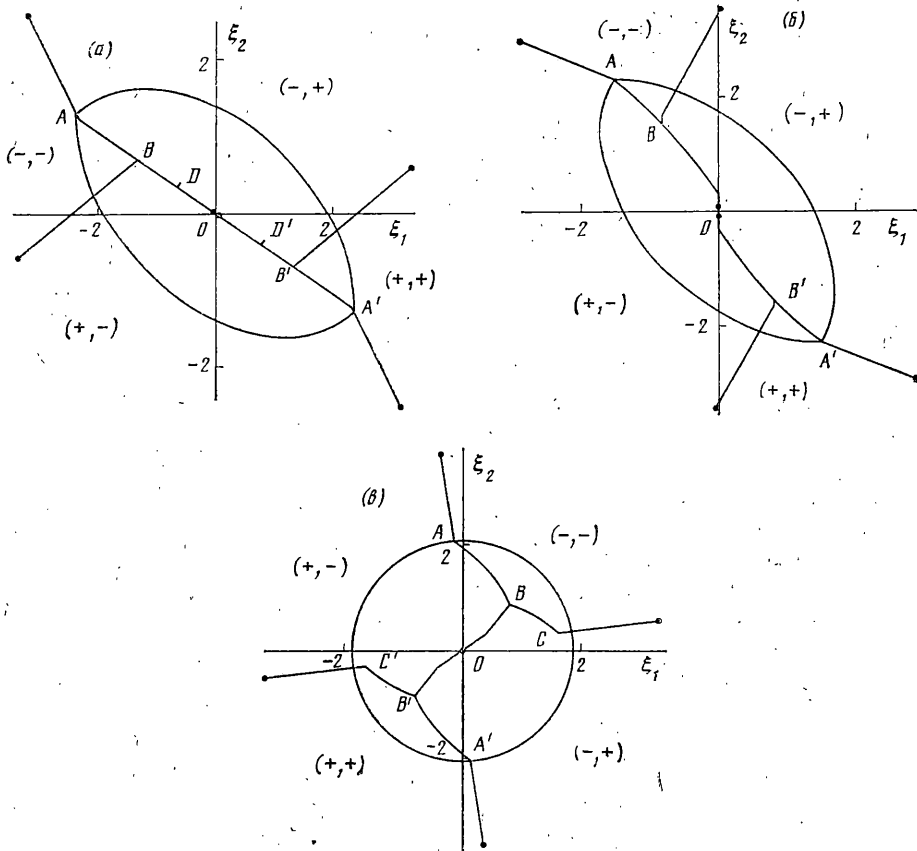
Далее анализ необходимых условий оптимальности и построение синтеза будем проводить на отрезке $\tau \in [0, \pi]$. Фазовые траектории, определяемые формулами (2.7), (2.8), (2.13) совместно с траекториями, получающимися из исходных после замены (2.4), не составляют поля траекторий. Однако можно показать, что траектории, приходящие на терминальную поверхность (в прямом времени) на круг радиуса $2v_0$, образуют в фазовом пространстве замкнутую поверхность, разбивающую при $\tau \in [0, \pi]$ все пространство на две части. Вне этой поверхности программный максимум будет ценой игры и поверхности переключения задаются формулами (3.1)–(3.4). Можно показать, что при $0 \leq \tau \leq \tau^* = \pi/2 - \alpha^*$ единственной особой поверхностью будет рассеивающая, отделяющая траектории, приходящие на верхнюю полуплоскость ($0 < \theta \leq \pi$), от траекторий, приходящих на нижнюю ($-\pi < \theta \leq 0$). Для построения рассеивающей поверхности воспользуемся параметрическим представлением (2.7), (2.8), (2.13), (2.14) фазовых траекторий при $\theta > 0$ и этими же формулами после замены (2.4) при $\theta < 0$. Приравняем времена движения фазовой точки до верхней и нижней полуокружности радиуса c . Получим рассеивающую поверхность с параметрическим представлением

$$\left\| \begin{array}{l} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\| = \pm f_i(c, v_0, \tau) \left\| \begin{array}{l} \cos(\tau/2) \\ \sin(\tau/2) \end{array} \right\| \quad (i=0, 1) \quad (3.5)$$

Параметр c отвечает значению функционала (1.9), соответствующего фазовой точке на рассеивающей поверхности. Величина i определяет согласно (2.5), (2.7) значение управления на уходящих траекториях, соответствующих $\theta > 0$. Функции $f_i(c, v_0, \tau)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} f_0(c, v_0, \tau) &= [c^2 - (2v_0 \sin(\tau/2))^2]^{1/2} + 2 \sin(\tau/2) (2v_0 \geq c \geq 2v_0 \operatorname{tg}(\tau/2)) \\ f_1(c, v_0, \tau) &= [(c+2)^2 - (2Q \sin(\alpha^* + \tau/2))^2]^{1/2} \quad (0 \leq c < 2v_0 \operatorname{tg}(\tau/2)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Знаки (\pm) в (3.5) означают, что рассеивающая поверхность располагается симметрично относительно оси времени. Ее сечение изображено на фиг. 1, а. Значению $i=0$ отвечают отрезки AB и $A'B'$; при $i=1$ имеем отрезок BB' . При $c=2v_0 \operatorname{tg}(\tau/2)$ имеем $f_1(c, v_0, \tau) = f_0(c, v_0, \tau) = 2Q \operatorname{tg}(\tau/2) \sin(\tau/2 + \alpha^*)$, и при $\tau \leq 2\tau^* = 2\pi - 4\alpha^*$ выполнено $2 \leq 2Q \sin(\alpha^* + \tau/2)$, поэтому согласно (3.6) сечение рассеивающей поверхности — отрезок, проходящий через начало координат. Длины отрезков $|AO|$, $|BO|$ при $0 \leq \tau \leq$



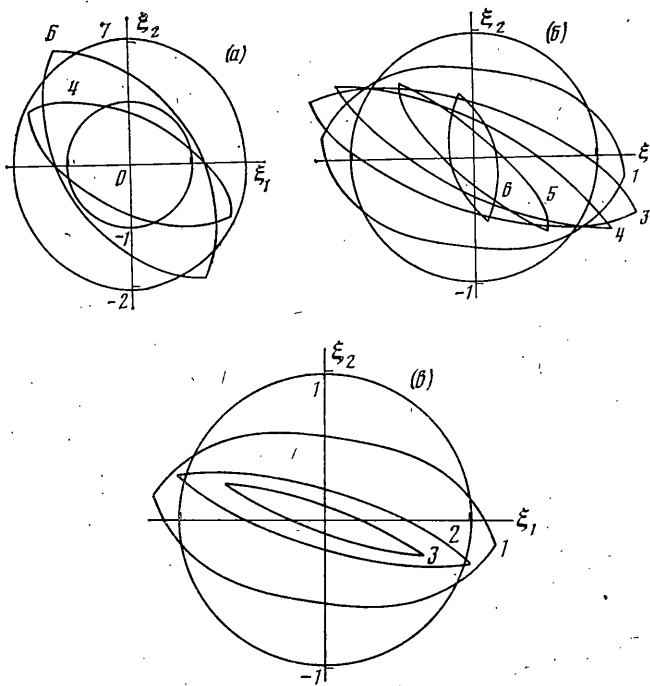
Фиг. 1

$\leq \pi/2$ определяются величиной функции $f_0(c, v_0, \tau)$ при $c=2v_0$ и $c=2v_0 \operatorname{tg}(\tau/2)$ соответственно ($|BO|$ при $\pi/2 < \tau \leq \pi$ определяется иначе):

$$\begin{aligned} |AO| &= 2Q \cos(\tau/2 - \alpha^*) \quad (0 \leq \tau \leq \pi) \\ |BO| &= 2Q \operatorname{tg}(\tau/2) \sin(\tau/2 + \alpha^*) \quad (0 \leq \tau \leq \pi/2) \\ |BO| &= 2Q \operatorname{ctg}(\tau/2) \sin(\tau/2 + \alpha^*) \quad (\pi/2 \leq \tau \leq \pi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

При $\min(\pi/2, \pi - 2\alpha^*) > \tau > \pi/2 - \alpha^*$ отрезки AB и $A'B'$ будут по-прежнему принадлежать рассеивающей поверхности, а на линии BB' появится экивокальная поверхность. Один ее конец примыкает к точке B (соответственно B'), а другой — к $D(D')$, отвечающей точке схода фазовой траектории с рассеивающей поверхностью DD' по касательной к ней. При этом $|DO| = |D'O| = 2Q \cos(\alpha^* + \tau/2)$. Таким образом, точки B, D и D', B' соединяет экивокальная поверхность, а точки D, D' — рассеивающая (фиг. 1а). При $\pi - 2\alpha^* < \tau < \pi/2$, если такие τ существуют, экивокальная поверхность соединяет точки BB' .

При $\pi/2 \leq \tau \leq \pi$ прямолинейный участок сечения рассеивающей поверхности, если он вообще существует, описывается формулами (3.5), (3.6) при $i=1$, однако при этом параметр c меняется в пределах $0 \leq c \leq 2(v_0 - 1) + 2 \operatorname{ctg}(\tau/2)$. Определим точки A и B формулами (3.5), (3.6) при $i=0$, $c=2v_0$ и $i=1$, $c=2(v_0 - 1) + 2 \operatorname{ctg}(\tau/2)$ соответственно. Тогда величины $|AO|$ и $|BO|$ будут заданы формулами (3.7). При $\pi/2 \leq \tau < \max(\pi/2, \pi - 2\alpha^*)$ рассеивающая поверхность располагается на отрезке $[DD'] \in [BB']$, где точка D также характеризуется сходом траектории по касательной к рассеивающей поверхности, $|OD| = 2Q \cos(\alpha^* + \tau/2)$. Точки A, D и D', A' соединяет особая поверхность. Та ее часть, на которой меняет значение только управление u является поверхностью переключения, сотканной, как показывает численный анализ, из оптимальных траекторий движения. Часть поверхности, на которой меняют значение u, v — экивокальная.



Фиг. 2

Если $\tau \geq \max(\pi/2, \pi - 2\alpha^*)$, то прямолинейный участок DD' рассеивающей поверхности пропадает и имеем особую поверхность, соединяющую точки A, A' (фиг. 1б, в). При всех значениях v_0 и $\tau \in [0, \pi]$ оптимальные траектории, исходящие из точек A, A' попадают в момент $\tau=0$ на круг радиуса $2v_0$.

Поверхности переключения разбивают фазовое пространство на области, в каждой из которых оптимальное управление противников постоянно и принимает крайнее значение. На фиг. 1 в каждой из областей знаки управлений u и v обозначены в круглых скобках.

4. Численное построение поверхностей переключения и множеств уровня функции цены игры. Алгоритм построения линий переключения $\Pi(t), S(t)$, основанный на обработке множеств уровня функции цены игры, описан в [6, 7].

Множество уровней $W_c = \{(\xi_1, \xi_2, t) \in R^2 \times [0, T] : V(\xi_1, \xi_2, t) \leq c\}$ функции цены игры является максимальным u -стабильным мостом по отношению к целевому множеству $M_c = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 : \Gamma(\xi) \leq c\}$. Сечение $W_c(t)$ множества W_c в момент t есть максимальная совокупность точек $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$, таких, что из позиции (ξ, t) первый игрок гарантирует приведение системы (1.7) на множество M_c в момент T . Сечение $W_c(t)$ совпадает с альтернированным интегралом [11] для игры (1.3), построенным от множества M_c на промежутке $[t, T]$.

Остановимся кратко на геометрии множеств $W_c(T-\tau)$. В дальнейшем ради краткости вместо $W_c(T-\tau)$ будем писать $W_c(\tau)$. Вычисления показали, что при $v_0=1, c \geq 2$ множество $W_c(\tau)$ для $\tau=\pi$ совпадает с M_c . Следовательно, сечения $W_c(\tau)$ при $c \geq 2$ периодичны, а именно $W_c(\tau+\pi) = W_c(\tau)$, что согласуется с формулой (2.12).

Влияние ограничения v_0 на характер изменения сечений $W_c(\tau)$ продемонстрировано на фиг. 2. Были взяты три значения $v_0=0,5; 1; 1,5$ (фиг. 2а, 2б, 2в соответственно). Сечения построены при $c=1$ для следующих моментов обратного времени: $\tau_1=0,3; \tau_2=0,6; \tau_3=0,7; \tau_4=1; \tau_5=1,5; \tau_6=2; \tau_7=3$. Нумерация сечений на фигуре соответствует нумерации моментов. В силу симметрии задачи, множества $W_c(\tau)$ симметричны относительно начала координат. С уменьшением v_0 множество $W_c(\tau)$ расширяется. Так, например, при $\tau=2$ множество $W_c(\tau)$ в случае $v_0=1,5$ пусто, а в случае $v_0=1$ вложено в множество, отвечающее $v_0=0,5$.

Как отмечалось, сечения множеств уровня функции цены игры используются для нахождения линий переключения. На фиг. 1 показаны линии $\Pi(\tau)$, $S(\tau)$, построенные при $v_0=1$ для моментов обратного времени $\tau=1, 2, 3$. Для каждого из моментов показано сечение $W_c(\tau)$, отвечающее $c=2v_0$. Вне множества $W_{2v_0}(\tau)$ линии $S(\tau)$, $\Pi(\tau)$ имеют аналитическое описание (3.1)–(3.4). Участки линий $S(\tau)$, $\Pi(\tau)$ внутри множества $W_{2v_0}(\tau)$ вообще говоря не поддаются аналитическому описанию, хотя их численное построение с точки зрения алгоритма не отличается от построения других участков.

На фиг. 1а линии AB , $A'B'$ и DD' принадлежат сечению рассеивающей поверхности, а линии BD , $B'D'$ – сечению экивокальной поверхности. На фиг. 1б и 1в сечению экивокальной поверхности принадлежит линия BB' . Отметим, что вблизи оси τ строение линий переключения на фиг. 1а топологически эквивалентно картине синтеза в задаче [8].

Оптимальная стратегия первого игрока определяется при помощи линий переключения $\Pi(t)$ следующим образом. Обозначим (звездочкой обозначается транспонирование) $D(t) = X(T, t)B = \|\!-\cos(t-T), \sin(t-T)\!\|^*$. Здесь $B = \|\!-1, 0\!\|^*$ – вектор при управлении первого игрока в системе (1.3). Линия $\Pi(t)$ делит плоскость на две части. При этом прямая, параллельная вектору $D(t)$, пересекает линию $\Pi(t)$ лишь в одной точке. Обозначим $\Pi_-(t)$ – часть плоскости, куда направлен вектор $D(t)$ и $\Pi_+(t)$ – оставшуюся часть. Положим

$$U^0(t, \xi) = \begin{cases} -1, & \xi \in \Pi_-(t) \\ 1, & \xi \in \Pi_+(t), \quad t \in [0, T] \\ [-1, 1], & \xi \in \Pi(t) \end{cases}$$

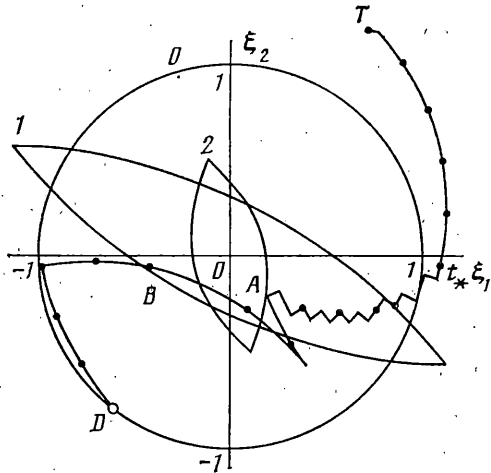
Стратегия U^0 является оптимальной и обладает устойчивостью по отношению к информационным помехам и погрешностям построения линий переключения [6].

Оптимальная стратегия V^0 второго игрока определяется аналогично U^0 с заменой линии $\Pi(t)$ на $S(t)$, а вектора $D(t)$ – на вектор $E(t) = \|\cos(t-T), \sin(t-T)\!\|^*$, где $C = (0, 1)^*$ – вектор при управлении второго игрока в системе (1.3). Стратегия

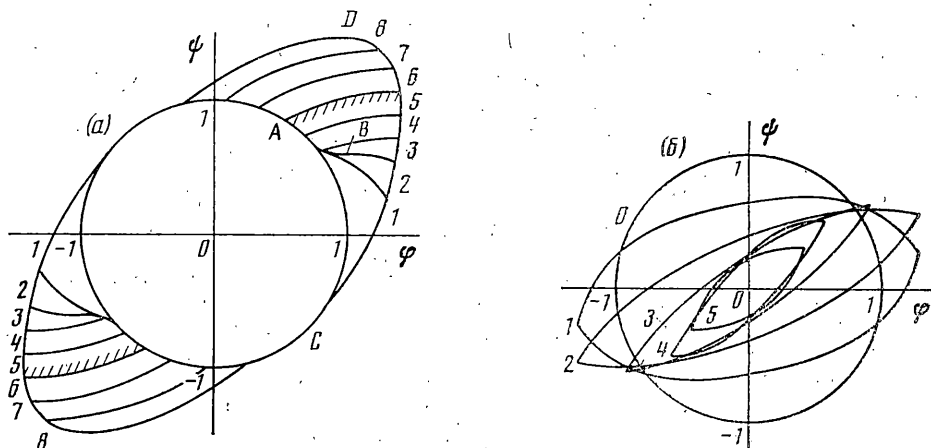
$$V^0(t, \xi) = \begin{cases} v_0, & \xi \in S_-(t) \\ -v_0, & \xi \in S_+(t) \\ [-v_0, v_0], & \xi \in S(t) \end{cases}$$

является оптимальной, но в отличие от стратегии U^0 не обладает устойчивостью [9].

На фиг. 3 изображены результаты численного построения фазовых траекторий системы (1.7) для случая $v_0=1$. Начальный момент t_0 равен 0. Начальная точка A взята на границе сечения $W_c(t_0)$ при $c=1$. Таким образом, цена игры в начальной позиции $(0, A)$ равна 1. Траектория 1 отвечает оптимальным способом действия обоих игроков. В момент $t_*=1$ траектория проходит через точку B на границе сечения $W_1(t_*)$, в момент $T=2$ она заканчивается в точке D на границе $M_1=W_1(T)$. Множества $W_1(t_0)$, $W_1(t_*)$, M_1 обозначены цифрами 0, 1, 2. Траектория 2 отвечает оптимальному способу действия второго игрока и неоптимальному способу первого; первый игрок управляется по линиям переключения, построенным при $v_0=0$, т. е. в отсутствие второго игрока. В момент $t_*=1$ фазовая точка не принадлежит множеству $W_1(t_*)$, а в момент $T=2$ она находится вне круга M_1 . Таким образом, отказ первого игрока от оптимальной стратегии приводит к ухудшению его результата.



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Игровая задача с нефиксированным временем окончания. До сих пор задача об управлении точкой подвеса маятника рассматривалась как дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания T (задача 1). Изменим постановку задачи, а именно будем считать, что первый игрок минимизирует значение платы не в момент T , а на промежутке $[0, T]$; интересы второго игрока противоположны. Таким образом, новая задача (задача 2) есть дифференциальная игра с нефиксированным временем окончания [2]. Как и в задаче 1, представляет интерес построение множеств уровня функции цены игры. В отличие от игры с фиксированным моментом окончания, где преобразование (1.5) освобождает от фазовых переменных в правой части системы, все построения в задаче 2 приходится вести в исходном пространстве переменных φ, ψ .

Обозначим w_c множество уровня функции цены игры в задаче 2. Множество w_c есть максимальный u -стабильный мост, построенный от круга $M_c = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : \Gamma(\varphi, \psi) \leq c\}$. Пусть $w_c(t)$ — сечение множества w_c в момент t . Сечение $w_c(t)$ представляет собой максимальную совокупность точек (φ, ψ) на плоскости, откуда первый игрок гарантирует приведение системы на множество M_c за время, меньшее или равное $T-t$. Очевидно, что $w_c(t_*) \subset w_c(t^*)$ при $t_* < t^*$. Множества $w_c(t)$ в отличие от аналогичных множеств в задаче 1 невыпуклы. Это обстоятельство существенно усложняет процедуру их построения.

На фиг. 4а показаны вычисленные сечения $w_c(\tau_i)$, $\tau_i = 0,4i$; $i = \overline{0,8}$, максимального u -стабильного моста в задаче 2. Для сравнения на фиг. 4б представлены построенные в исходных координатах (φ, ψ) сечения

$$W'_c(\tau_i) = \{(\varphi, \psi) \in R^2 : X(T, T-\tau_i)(\varphi, \psi)^* \in w_c(\tau_i)\}, \quad \tau_i = 0,4i; \quad i = \overline{0,5}$$

максимального u -стабильного моста в задаче 1. Рядом с каждым множеством проставлен номер соответствующего ему момента. Сечения $W'_c(\tau_i)$, $i = \overline{6,8}$ не показаны, так как являются пустыми. Расчеты проводились при $v_0 = 1, c = 1$. Видно, что

$$\bigcup_{0 \leq j \leq i} W'_c(\tau_j) \subset w_c(\tau_i). \quad i = \overline{1,5}$$

Множество $w_c(\tau_5)$ существенно шире объединения $\bigcup W'_c(\tau_i)$, $i = \overline{0,5}$.

Множества $w_c(\tau)$ могут быть использованы для решения игровой задачи быстрогодействия, где платой является время перевода на заданный круг M_c с центром в нуле. В самом деле, пусть в момент $t_0 = 0$ дана начальная точка $x_0 \in R^2$. Если при некотором τ_* точка x_0 лежит на границе множества $w_c(\tau_*)$, а при всех $\tau < \tau_*$ имеем $x_0 \notin w_c(\tau)$, то минимальное гарантированное время перевода на M_c равно τ_* . С точки зрения игровой задачи быстрогодействия $w_c(\tau)$ является множеством всех точек на плоско-

сти, для каждой из которых оптимальное гарантированное время перевода на M_c (цена игры) меньше или равно τ . На границе множества $w_c(\tau)$ можно выделить линию, где цена игры постоянна и равна τ . Такую линию назовем фронтом. На фиг. 4а штриховкой отмечен фронт, отвечающий значению $\tau=2$. Линии AB , CD являются барьерами [1] — на них функция цены задачи быстродействия терпит разрыв.

Авторы благодарят В. С. Пацко за полезные обсуждения работы и высказанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантий в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (Материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
5. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
6. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Пробл. управления и теории информации. 1982. Т. 11. № 6.
7. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Техн. кибернетика. 1983. № 4.
8. Пацко В. С., Гарасова С. И. Нерегулярная дифференциальная игра сближения // Техн. кибернетика. 1984. № 4.
9. Зарг М. А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. М., 1985.— Деп. в ВИНТИ 25.10.85, № 7438-B85.
10. Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 10—18.
11. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. I(II) // ДАН, 1967. Т. 174 (175). № 6(4). С. 1278—1280 (764—766).

Москва

Поступила в редакцию
11.II.1987