

УДК 539.3:534.1

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОСЛАБЛЕНИЯМИ

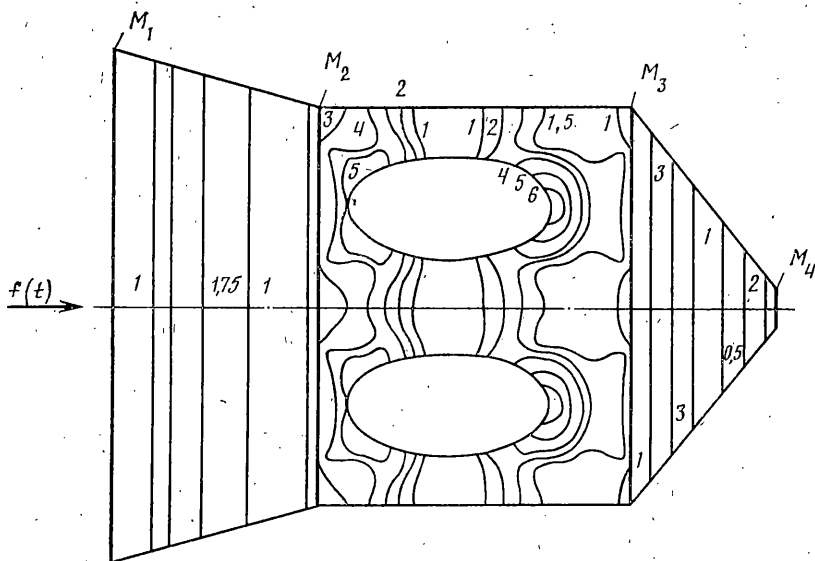
ПАЦЮК В. И., РИМСКИЙ В. К.

В [1-6] на основе линейной теории оболочек типа Тимошенко численно исследовалось кинематическое и напряженное состояния тонкостенных систем с локальными ослаблениями в виде прямоугольных и круглых вырезов. Ниже анализируется нелинейное поведение составной (трехсекционной) конструкции при внезапном образовании свободных отверстий в процессе ее деформирования.

**1. Постановка задачи.** Пусть несущая конструкция (фиг. 1) с момента времени  $t=0$  выводится из состояния статического равновесия воздействием на ее левый торец внешней возмущающей силы  $f(\varphi, t)$ . Торцы отсеков (оболочек вращения) жестко заделаны в тонкие недеформируемые диски с массами  $M_1, \dots, M_n$ . Стенки оболочек могут быть ослаблены круговыми отверстиями со свободными краями.

Математическая формулировка задачи основана на использовании геометрически нелинейных оболочечных уравнений типа Тимошенко [7]:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{v}_s &= \frac{1}{R} \frac{\partial (RN_s)}{\partial s} + \frac{\partial N_{s\varphi}}{\partial y} - \frac{R'}{R} N_\varphi - \frac{1}{R_s^\circ} Q_s + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} [R(e_s N_s + e_{\varphi s} N_{s\varphi})] + \frac{\partial}{\partial y} (e_s N_{s\varphi} + e_{\varphi s} N_\varphi) - \frac{R'}{R} (e_{s\varphi} N_{s\varphi} + e_{\varphi s} N_\varphi) - \\ &- \frac{1}{R_s^\circ} (\omega_s N_s + \omega_\varphi N_{s\varphi}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left( RM_s \frac{\partial \psi_s}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} \right) + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left[ RM_{s\varphi} \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ M_\varphi \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) \right] - \\ &- \frac{R'}{R} M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} - \frac{R'}{R} M_\varphi \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) - \frac{1}{R_s^\circ} \left( \frac{1}{R_s^\circ} M_s \psi_s + \frac{1}{R_\varphi^\circ} M_{s\varphi} \psi_\varphi \right) + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} (RQ_s \psi_s) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_\varphi \psi_s) - \frac{R'}{R} \psi_\varphi Q_\varphi + p_s \\ \rho h \ddot{v}_\varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial (RN_{s\varphi})}{\partial s} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} N_{s\varphi} - \frac{1}{R_\varphi^\circ} Q_\varphi + \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} [R(e_{s\varphi} N_s + e_{\varphi s} N_{s\varphi})] + \frac{\partial}{\partial y} (e_{s\varphi} N_{s\varphi} + e_{\varphi s} N_\varphi) + \frac{R'}{R} (e_s N_{s\varphi} + e_{\varphi s} N_\varphi) - \\ &- \frac{1}{R_\varphi^\circ} (\omega_s N_{s\varphi} + \omega_\varphi N_\varphi) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left( RM_s \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left[ RM_{s\varphi} \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \left( M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ M_\varphi \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) \right] + \frac{R'}{R} M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \\ &+ \frac{R'}{R} M_\varphi \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) - \frac{1}{R_\varphi^\circ} \left( \frac{1}{R_s^\circ} M_{s\varphi} \psi_s + \frac{1}{R_\varphi^\circ} M_\varphi \psi_\varphi \right) + \end{aligned}$$



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} (R \psi_{\varphi} Q_s) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{\varphi} Q_{\varphi}) + \frac{R'}{R} \psi_s Q_{\varphi} + p_{\varphi} \\
 \rho h \ddot{w} = & \frac{1}{R} \frac{\partial (R Q_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial y} + \frac{1}{R_s^{\circ}} N_s + \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} N_{\varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} [R(\omega_s N_s + \omega_{\varphi} N_{s\varphi})] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_s N_{s\varphi} + \omega_{\varphi} N_{\varphi}) + \frac{1}{R_s^{\circ}} (e_s N_s + e_{\varphi s} N_{s\varphi}) + \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} (e_{s\varphi} N_{s\varphi} + e_{\varphi} N_{\varphi}) + \\
 & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left[ R \left( \frac{1}{R_s^{\circ}} \psi_s M_s + \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} \psi_{\varphi} M_{s\varphi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R_s^{\circ}} \psi_s M_{s\varphi} + \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} \psi_{\varphi} M_{\varphi} \right) + \\
 & + \frac{1}{R_s^{\circ}} \left[ M_s \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + M_{s\varphi} \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_{\varphi} \right) \right] + \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} \left[ M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial s} + M_{\varphi} \left( \frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{R_s^{\circ}} \psi_s Q_s + \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} \psi_{\varphi} Q_{\varphi} + q \\
 \rho I \ddot{\psi}_s = & \frac{1}{R} \frac{\partial (R M_s)}{\partial s} + \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial y} - \frac{R'}{R} M_{\varphi} - Q_s - e_s Q_s - e_{\varphi s} Q_{\varphi} + \\
 & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} [R(e_s M_s + e_{\varphi s} M_{s\varphi})] + \frac{\partial}{\partial y} (e_s M_{s\varphi} + e_{\varphi s} M_{\varphi}) - \\
 & - \frac{R'}{R} (e_{s\varphi} M_{s\varphi} + e_{\varphi} M_{\varphi}) - \frac{1}{R_s^{\circ}} (\omega_s M_s + \omega_{\varphi} M_{s\varphi}) + m_s \\
 \rho I \ddot{\psi}_{\varphi} = & \frac{1}{R} \frac{\partial (R M_{s\varphi})}{\partial s} + \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial y} + \frac{R'}{R} M_{s\varphi} - Q_{\varphi} - e_{s\varphi} Q_s - e_{\varphi} Q_{\varphi} + \\
 & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} [R(e_{s\varphi} M_s + e_{\varphi} M_{s\varphi})] + \frac{\partial}{\partial y} (e_{s\varphi} M_{s\varphi} + e_{\varphi} M_{\varphi}) + \\
 & + \frac{R'}{R} (e_s M_{s\varphi} + e_{\varphi s} M_{\varphi}) - \frac{1}{R_{\varphi}^{\circ}} (\omega_s M_{s\varphi} + \omega_{\varphi} M_{\varphi}) + m_{\varphi} \\
 N_s = & \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_s + \nu_2 \varepsilon_{\varphi}), \quad N_{\varphi} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\nu_1 \varepsilon_s + \varepsilon_{\varphi}) \\
 N_{s\varphi} = & h G_{12} \varepsilon_{s\varphi}, \quad Q_s = k^2 h G_{13} \varepsilon_{sr}, \quad Q_{\varphi} = k^2 h G_{23} \varepsilon_{\varphi r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_s &= \frac{E_1 I}{1 - \nu_1 \nu_2} (\kappa_s + \nu_2 \kappa_\varphi), & M_\varphi &= \frac{E_2 I}{1 - \nu_1 \nu_2} (\nu_1 \kappa_s + \kappa_\varphi) \\
M_{s\varphi} &= IG_{12} \kappa_{s\varphi}, & \varepsilon_s &= \frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{w}{R_s^0} + \frac{1}{2} (\omega_s^2 + e_s^2 + e_{s\varphi}^2) \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} - \frac{w}{R_\varphi^0} + \frac{R'}{R} v_s + \frac{1}{2} (\omega_\varphi^2 + e_\varphi^2 + e_{\varphi s}^2) \\
2\varepsilon_{s\varphi} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\varphi + e_s e_{\varphi s} + e_\varphi e_{s\varphi} + \omega_\varphi \omega_s \\
\varepsilon_{sr} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \psi_s + \frac{v_s}{R_s^0} + \psi_s e_s + \psi_\varphi e_{s\varphi} \\
\varepsilon_{\varphi r} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_\varphi + \frac{v_\varphi}{R_\varphi^0} + \psi_s e_{\varphi s} + \psi_\varphi e_\varphi \\
\kappa_s &= \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + e_s \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + e_{s\varphi} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} + \frac{\omega_s \psi_s}{R_s^0} \\
\kappa_\varphi &= \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s + e_{\varphi s} \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) + e_\varphi \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) + \frac{\omega_\varphi \psi_\varphi}{R_\varphi^0}, \\
2\kappa_{s\varphi} &= \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} + \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi + e_s \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) + e_\varphi \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) + \\
&\quad + e_{\varphi s} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + e_\varphi \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} + \frac{\omega_s \psi_\varphi}{R_\varphi^0} + \frac{\omega_\varphi \psi_s}{R_s^0} \\
e_s &= \frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{w}{R_s^0}, & e_\varphi &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} - \frac{w}{R_\varphi^0} + \frac{R'}{R} v_s, & e_{s\varphi} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial s} \\
e_{\varphi s} &= \frac{\partial v_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\varphi, & \omega_s &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v_s}{R_s^0}, & \omega_\varphi &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v_\varphi}{R_\varphi^0}
\end{aligned}$$

Здесь  $R(s)$  — радиус срединной поверхности оболочки вращения,  $R' = dR/ds$ ,  $R_s^0 = \sqrt{1 - (R')^2/R'^2}$ ,  $R_\varphi^0 = -R/\sqrt{1 - (R')^2}$ ,  $y = R\varphi$ .

Граничные условия и условия сопряжения в торцевых сечениях отсечков приведены в [6], а для свободных замкнутых контуров имеем

$$\begin{aligned}
N_s \checkmark n_s + N_{s\varphi} \checkmark n_\varphi &= N_{s\varphi} \checkmark n_s + N_\varphi \checkmark n_\varphi = \\
&= K_s \checkmark n_s + K_\varphi \checkmark n_\varphi = M_s \checkmark n_s + M_{s\varphi} \checkmark n_\varphi = \\
&= M_{s\varphi} \checkmark n_s + M_\varphi \checkmark n_\varphi = 0 \\
N_s \checkmark &= N_s (1 + e_s) + N_{s\varphi} e_{\varphi s} + M_s \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + M_{s\varphi} \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) + Q_s \psi_s \\
N_{s\varphi} \checkmark &= N_{s\varphi} (1 + e_\varphi) + N_s e_{s\varphi} + M_s \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} + M_{s\varphi} \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) + Q_s \psi_\varphi \\
K_s \checkmark &= Q_s + \omega_s N_s + \omega_\varphi N_{s\varphi} + M_s \frac{\psi_s}{R_s^0} + M_{s\varphi} \frac{\psi_\varphi}{R_\varphi^0} \\
M_s \checkmark &= M_s (1 + e_s) + M_{s\varphi} e_{\varphi s}, & M_{s\varphi} \checkmark &= M_{s\varphi} (1 + e_\varphi) + M_s e_{s\varphi}, \\
N_{s\varphi} \checkmark &= N_{s\varphi} (1 + e_s) + N_\varphi e_{\varphi s} + M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + M_\varphi \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - \frac{R'}{R} \psi_\varphi \right) + \psi_s Q_\varphi \\
N_\varphi \checkmark &= N_\varphi (1 + e_\varphi) + N_{s\varphi} e_{s\varphi} + M_{s\varphi} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial s} + M_\varphi \left( \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial y} + \frac{R'}{R} \psi_s \right) + \psi_\varphi Q_\varphi
\end{aligned}$$

$$K_{\varphi}^{\sim} = Q_{\varphi} + \omega_s N_{s\varphi} + \omega_{\varphi} N_{\varphi} + M_{s\varphi} \frac{\psi_s}{R_s^{\circ}} + M_{\varphi} \frac{\psi_{\varphi}}{R_{\varphi}^{\circ}}$$

$$M_{s\varphi}^{\sim} = M_{s\varphi} (1 + e_s) + M_{\varphi} e_{\varphi s}, \quad M_{\varphi}^{\sim} = M_{\varphi} (1 + e_{\varphi}) + M_{s\varphi} e_{s\varphi}$$

где  $n_s, n_{\varphi}$  — направляющие косинусы нормали к границе отверстия.

**2. О методе численного решения.** Дискретный аналог нелинейной задачи строится на множестве целых, полуцелых и смешанных узлов на основе вариационно-разностного подхода, достаточно подробно изложенного в [6]. Например, разностная аппроксимация первого уравнения движения в общепринятых обозначениях имеет вид

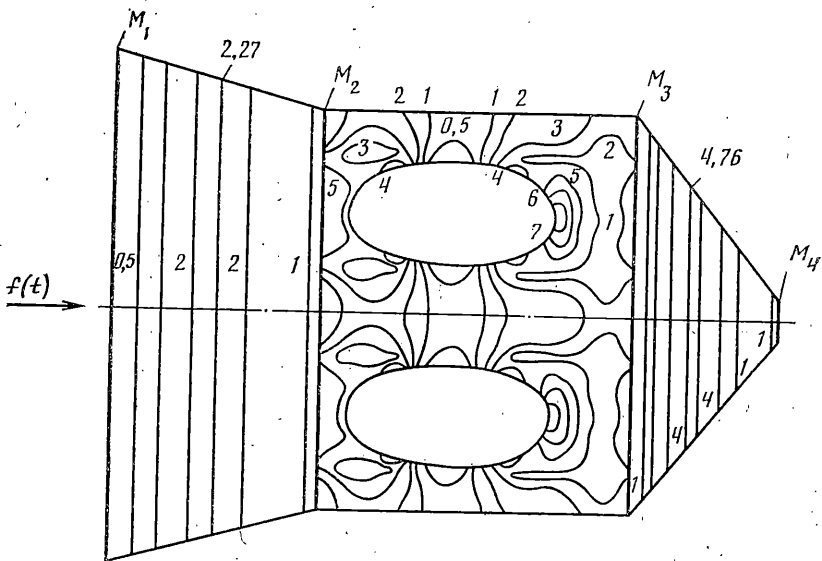
$$\begin{aligned} \rho h (v_{s,i,j-\frac{1}{2}}^n)_{\bar{t}t} &= \frac{1}{R_i} (R_{i-\frac{1}{2}} N_{s,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n)_s + (N_{s\varphi,ij}^n)_{\bar{y}} - \\ &- \frac{R_i'}{2R_i} (N_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + N_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{1}{R_{s,i}^{\circ}} Q_{s,i,j-\frac{1}{2}}^n + \\ &+ \frac{1}{R_i} (R_{i-\frac{1}{2}} e_{s,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{*n} N_{s,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n)_s + \frac{1}{2R_i} [(R_i e_{\varphi s,ij}^{*n} N_{s\varphi,ij}^n)_s + \\ &+ (R_i e_{\varphi s,i,j-1}^{*n} N_{s\varphi,i,j-1}^n)_{\bar{s}}] + \frac{1}{2} [N_{s\varphi,ij}^n (e_{s,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{*n} + e_{s,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*n})]_{\bar{y}} + \\ &+ \frac{1}{2R_i} [R_{i-\frac{1}{2}} (e_{\varphi s,ij}^{*n} N_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n)_{\bar{y}} + R_{i+\frac{1}{2}} (e_{\varphi s,i,j-1}^{*n} N_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n)_y] - \\ &- \frac{R_i'}{4R_i} \left[ \frac{R_i}{R_{i-\frac{1}{2}}} e_{s\varphi,ij}^{*n} N_{s\varphi,ij}^n + \frac{R_{i+1}}{R_{i+\frac{1}{2}}} e_{s\varphi,i+1,j}^{*n} N_{s\varphi,i+1,j}^n + \right. \\ &+ \left. \frac{R_{i-1}}{R_{i-\frac{1}{2}}} e_{s\varphi,i-1,j-1}^n N_{s\varphi,i-1,j-1}^n + \frac{R_i}{R_{i+\frac{1}{2}}} e_{s\varphi,i,j-1}^{*n} N_{s\varphi,i,j-1}^n \right] - \\ &- \frac{R_i'}{2R_i} (e_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{*n} N_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + e_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{*n} N_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) - \\ &- \frac{1}{2R_{s,i}^{\circ} R_i} \omega_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n} (R_{i-\frac{1}{2}} N_{s,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + R_{i+\frac{1}{2}} N_{s,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) - \\ &- \frac{1}{2R_{s,i}^{\circ}} \left[ \frac{1}{2} N_{s\varphi,ij}^n (\omega_{\varphi,i-\frac{1}{2},j}^{*n} + \omega_{\varphi,i+\frac{1}{2},j}^{*n}) + \frac{1}{2} N_{s\varphi,i,j-1}^n \times \right. \\ &\times (\omega_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-1}^{*n} + \omega_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-1}^{*n}) \left. \right] + \frac{1}{R_i} (M_{s,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n (\psi_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n})_{\bar{s}})_s + \\ &+ \frac{1}{2} [M_{s\varphi,ij}^n ((\psi_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n})_{\bar{s}} + (\psi_{s,i,j+\frac{1}{2}}^{*n})_s)]_{\bar{y}} + \frac{1}{2R_i} \left[ (R_i M_{s\varphi,ij}^n ((\psi_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n})_y - \right. \\ &- \frac{R_i'}{2R_i} (\psi_{\varphi,i-\frac{1}{2},j}^{*n} + \psi_{\varphi,i+\frac{1}{2},j}^{*n}))_s + (R_i M_{s\varphi,i,j-1}^n ((\psi_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n})_y - \\ &- \frac{R_i'}{2R_i} (\psi_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-1}^{*n} + \psi_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-1}^{*n}))_{\bar{s}} \left. \right] + \frac{1}{2R_i} \left[ R_{i-\frac{1}{2}} (M_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n ((\psi_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n})_y - \right. \\ &- \frac{1}{2} \frac{R_i'}{R_{i-\frac{1}{2}}} (\psi_{\varphi,i-\frac{1}{2},j}^{*n} + \psi_{\varphi,i+\frac{1}{2},j}^{*n}))_{\bar{y}} + R_{i+\frac{1}{2}} (M_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n ((\psi_{s,i,j-\frac{1}{2}}^{*n})_{\bar{y}} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{R_i'}{R_{i+\frac{1}{2}}} (\psi_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-1}^{*n} + \psi_{\varphi,i+\frac{1}{2},j-1}^{*n}))_y \left. \right] - \frac{R_i'}{4R_i} \left[ \frac{R_i}{R_{i-\frac{1}{2}}} (\psi_{\varphi,i-\frac{1}{2},j}^{*n})_s M_{s\varphi,ij}^n + \right. \\ &+ \left. \frac{R_{i+1}}{R_{i+\frac{1}{2}}} (\psi_{\varphi,i+\frac{1}{2},j}^{*n})_s M_{s\varphi,i+1,j}^n + \frac{R_{i-1}}{R_{i-\frac{1}{2}}} (\psi_{\varphi,i-\frac{1}{2},j-1}^{*n})_s M_{s\varphi,i-1,j-1}^n + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_i}{R_{i+1/2}} (\psi_{\varphi, i-1/2, j-1})_{s} M_{s\varphi, i, j-1}^n - \frac{R_i'}{2R_i} \left[ M_{\varphi, i-1/2, j-1/2}^n (\psi_{\varphi, i-1/2, j})_{\bar{y}} + \right. \\
& + \frac{1}{2R_{i-1/2}} (R_i' \psi_{s, i, j-1/2}^* + R_{i-1}' \psi_{s, i-1, j-1/2}^*) + M_{\varphi, i+1/2, j-1/2}^n (\psi_{\varphi, i+1/2, j})_{\bar{y}} + \\
& \left. + \frac{1}{2R_{i+1/2}} (R_{i+1}' \psi_{s, i+1, j-1/2}^* + R_i' \psi_{s, i, j-1/2}^*) \right] + \\
& + \frac{1}{2R_{s, i}^{\circ} R_i} \psi_{s, i, j-1/2}^* \left( \frac{R_{i-1/2}}{R_{s, i-1/2}^{\circ}} M_{s, i-1/2, j-1/2}^n + \frac{R_{i+1/2}}{R_{s, i+1/2}^{\circ}} M_{s, i+1/2, j-1/2}^n \right) - \\
& - \frac{1}{4R_{\varphi, i}^{\circ} R_{s, i}^{\circ}} [M_{s\varphi, ij}^n (\psi_{\varphi, i-1/2, j}^* + \psi_{\varphi, i+1/2, j}^*) + M_{s\varphi, i, j-1}^n (\psi_{\varphi, i-1/2, j-1}^* + \psi_{\varphi, i+1/2, j-1}^*)] + \\
& + \frac{1}{2R_i} [(R_i \psi_{s, i, j-1/2}^* Q_{s, i, j-1/2}^n + (R_i \psi_{s, i, j-1/2}^* Q_{s, i, j-1/2}^n)_s] + \\
& + \frac{1}{4R_i} [R_{i-1/2} (Q_{\varphi, i-1/2, j}^n (\psi_{s, i, j-1/2}^* + \psi_{s, i-1, j+1/2}^*))_y + \\
& + R_{i+1/2} (Q_{\varphi, i+1/2, j}^n (\psi_{s, i+1, j-1/2}^* + \psi_{s, i, j+1/2}^*))_y] - \frac{R_i'}{4R_i} [\psi_{\varphi, i-1/2, j}^* Q_{\varphi, i-1/2, j}^n + \\
& + \psi_{\varphi, i+1/2, j}^* Q_{\varphi, i+1/2, j}^n + \psi_{\varphi, i-1/2, j-1}^* Q_{\varphi, i-1/2, j-1}^n + \psi_{\varphi, i+1/2, j-1}^* Q_{\varphi, i+1/2, j-1}^n] + p_{s, i, j-1/2}^n \\
& \left( u^{*n} = \frac{1}{2} [u^{n+1} + u^{n-1}] \right)
\end{aligned}$$

На каждом временном слое проводится необходимое число итераций (как правило, не более четырех-пяти) для получения сходящегося решения. Вычислительные эксперименты показали, что предельно допустимый устойчивый шаг по времени для нелинейной итерационной схемы консервативного типа составляет 80–85% от шага, определяемого достаточным критерием устойчивости для схемы, аппроксимирующей только линейные слагаемые в определяющих уравнениях [6]. Если шаг по времени обеспечивает устойчивость схемы по начальным данным и правой части, то удается доказать ее консервативность. Это означает полное отсутствие разностной диссипации энергии для любого момента времени, не смотря на то, что локальные характеристики волнового поля определяются приближенно. Построение консервативной схемы является единственно приемлемой возможностью решения задач динамики тонкостенных конструкций, так как ни один из множества альтернативных подходов пока не дает желаемых результатов.

Для оценки скорости сходимости построенной разностной схемы второго порядка точности анализировалось влияние числа узлов интегрирования по пространственным переменным на результаты вычислений. Дискретные решения на сетках  $78 \times 36$  и  $156 \times 80$  оказались достаточно близкими, что может служить практическим подтверждением сходимости численного решения к точному. Контроль вычислений осуществлялся также по соблюдению баланса полной механической энергии, дисбаланс которой составил лишь доли процента на интервале времени, соответствующем 10 пробегам упругой волны по длине образующей конструкции.

При решении задач динамики многосвязных оболочек использовалась весьма плодотворная идея моделирования свободных или неподвижно зажатых по контуру отверстий с помощью локальных неоднородностей, обладающих аномально низкими или высокими жесткостными характеристиками. Тестовые расчеты показали, что если модули Юнга в фиктивных узлах, принадлежащих отверстиям, на несколько порядков меньше (или больше) жесткости среды их содержащей, то граничные условия свободного края (или неподвижного заземления) выполняются с точностью до



Фиг. 2

машинного нуля. В рамках развитого подхода удается значительно упростить программную реализацию предложенных алгоритмов и снизить необходимое процессорное время при расчетах на ЭВМ.

**3. Анализ результатов.** Эволюция напряженно-деформируемого состояния составной конструкции из углепластика с эпоксидным связующим и псевдоизотропной укладкой армирующих волокон рассчитывалась при следующих значениях исходных данных:  $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$ ;  $E_1 = 110 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = 9.5 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_1 = 0.0257$ ,  $\nu_2 = 0.297$ ,  $G_{12} = G_{13} = 5.19 \text{ ГПа}$ ,  $G_{23} = 3.2 \text{ ГПа}$ ,  $M_1 = M_2 = 0.5M_3 = 5M_4 = 100 \text{ кг}$ ,  $f(t) = 3[1 - \cos 2\pi t/T] \text{ МН}$  ( $f(t) = 0 \text{ В}$ ;  $t > T = 0.1 \text{ мс}$ ),  $h_s = h_q = 0.01 \text{ м}$ ,  $\tau = 0.76 \text{ мкс}$ ,  $a_s = 8580 \text{ м/с}$ ,  $\gamma = \tau a_s / h_s = 0.66$ . Радиусы торцевых сечений, толщины стенок и протяженность отсеков таковы:  $R_1 = 0.646 \text{ м}$ ,  $R_2 = R_3 = 10R_4 = 0.5 \text{ м}$ ,  $h_1 = 0.0038 \text{ м}$ ,  $h_2 = 0.0055 \text{ м}$ ,  $h_3 = 0.0045 \text{ м}$ ,  $s_1 = 0.426 \text{ м}$ ,  $s_2 = 0.6 \text{ м}$ ,  $s_3 = 0.53 \text{ м}$ . Для расчета параметров волновых полей на сетке  $156 \times 80 \times 2384$  необходимо 200 мин процессорного времени ЭВМ ЕС 1045.

Цилиндрический отсек может быть ослаблен четырьмя симметрично расположенными относительно плоскости  $\varphi = 0$  свободными отверстиями радиуса  $r = 0.2 \text{ м}$  с координатами центров  $s = 0.68 \text{ м}$ ,  $\varphi = 45, 135, 225, 315^\circ$ .

На фиг. 1, 2 представлены изолинии импульса растягивающих (положительных) напряжений  $I_\varphi(s, \varphi) = \sigma_\varphi dt$ ,  $\sigma_\varphi > 0$ , действующих в окружном направлении (поперек армирующих волокон) и сформировавшихся к безразмерному моменту времени  $t = 10.0$  (1.81 мс). Информация на фиг. 1 соответствует внезапному появлению отверстия при  $t_B = 0$ , а на фиг. 2 — при  $t_B = 4.0$ . Линейный масштаб по  $\varphi$  вдвое меньше, чем по  $s$ , поэтому круглые отверстия выглядят эллипсоидальными.

Поведение линий уровня интегральной характеристики накопления повреждаемости материала свидетельствует о существовании лишь одного максимума в конических сечениях, где волновое движение является осесимметричным. В цилиндрической же оболочке наблюдаются значительные пространственные флуктуации  $I_\varphi$  с образованием нескольких локальных экстремумов, примыкающих к свободным контурам ослабляющих отверстий. Для сравнения укажем, что в сплошной конструкции без свободных замкнутых контуров пиковые значения  $I_\varphi$  в каждом из отсеков соответственно равны 2,32; 1,50; 4,40 КПа·с. При наличии вырезов уровень силового поля в цилиндрической секции резко увеличивается, тогда как растягивающие напряжения в конических отсеках несколько ослабевают. Последнее имеет место только для  $t_B = 0$ , а при  $t_B = 4.0$  максимум  $I_\varphi$  в третьей секции повышается до 4,76 КПа·с.

Из сопоставления представленных результатов следует, что в предварительно ослабленной отверстиями тонкостенной системе ( $t_B = 0$ ) уровень напряженного состояния во всех трех отсеках заметно ниже, чем в аналогичной системе, в которой ослабления мгновенно возникают после окончания времени действия входного импульса ( $t_B = 4.0$ ). Этот эффект объясняется тем, что на интервале времени  $3.0 < t < 4.0$  во втором отсеке сформировались растягивающие усилия и внезапное образование отверстий в предварительно растянутом материале повышает пиковые значения силового поля в несколько раз. Возникновение же ослаблений в конструкции с начальными сжимающими напряжениями менее опасно.

В таблице приведены максимумы импульсов растягивающих по  $s$  и  $\varphi$  напряжений в каждом из трех отсеков несущей конструкции для различных моментов появления в ней отверстий. Примечательным является существование оптимального значения для параметра  $t_B = 3.5$ , при котором функции  $I_{sm}(t_B)$ ,  $I_{\varphi m}(t_B)$  в двух по-

$t_B$	$I_{sm}$	$I_{\varphi m}$	$I_{sm}$	$I_{\varphi m}$	$I_{sm}$	$I_{\varphi m}$
0	39,1	1,75	70,6	6,55	89,7	3,41
3,0	25,9	2,17	70,7	6,53	124,0	4,44
3,5	27,6	2,26	79,7	7,32	133,0	4,77
4,0	27,3	2,27	78,2	7,21	132,0	4,76
5,0	23,8	2,29	47,4	3,94	123,0	4,35
6,0	27,7	2,32	22,2	1,64	123,0	4,41
12,0	28,2	2,32	21,1	1,50	123,0	4,40

следних секциях достигают глобального максимума. При дальнейшем увеличении  $t_B$  распределение импульсов стремится к осесимметричному напряженному состоянию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Булгару О. Е., Пацюк В. И., Римский В. К. Действие неосесимметричного импульса на составную оболочку с отверстиями и присоединенными массами // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1984. № 3. С. 3-13.
2. Rymsky V. K., Patsjuk V. I., Rybakova G. A. et al. Mathematical modelling and numerical experiment in the problems of dynamics of thin-walled construction // AMSE Periodicals, Modeling, Simulation and Control. Ser. B. 1985. V. 3. No. 3. P. 1-24.
3. Булгару О. Е., Пацюк В. И., Римский В. К. Неосесимметричные волны в оболочке с отверстиями // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1985. № 3. С. 15-20.
4. Пацюк В. И., Римский В. К. Волновые процессы в составной оболочке с отверстиями // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 2. С. 33-41.
5. Пацюк В. И., Римский В. К. Динамическая реакция тонкостенной конструкции на осевое нагружение // Механика композит. материалов. 1986. № 3. С. 489-497.
6. Навал И. К., Пацюк В. И., Римский В. К. Нестационарные волны в деформируемых средах. Кишинев: Штиинца. 1986. 235 с.
7. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

Кишинев

Поступила в редакцию  
11.XII.1986