

УДК 539.3:534.1

О КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

АВЕРБУХ А. З., МАВЛЮТОВ И. Г.

Построена матрица Грина гармонических колебаний круглой цилиндрической оболочки конечной длины с условиями шарнирного опирания на краях. Решение представляется тригонометрическим рядом Фурье по окружной координате. Коэффициенты ряда выражаются через элементарные функции. Сравнивается реакция на сосредоточенное воздействие оболочек бесконечной и конечной длины. Полученное решение является ядром интегральных уравнений контактных задач колебаний оболочки. Оно также позволяет простым интегрированием вычислять амплитуду колебаний оболочки под действием произвольно распределенных поверхностных нагрузок.

1. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω круговой цилиндрической оболочки радиуса R , толщины h длины lR под действием сил, зависящих от времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Введем на поверхности оболочки координаты α_j ($j=1, 2, 3$), отнесенные к радиусу R ; α_1 меняется вдоль образующей, α_2 — угловая координата, α_3 — по нормали к поверхности оболочки. Оболочка состоит из ортотропного материала, главные направления упругости которого совпадают с координатными линиями α_1, α_2 . Обозначим через u_j, q_j ($j=1, 2, 3$) амплитуды смещений и поверхностных нагрузок в направлениях α_j . Уравнения движения в перемещениях после отделения временного множителя $\exp(-i\omega t)$ запишем в виде [26]:

$$\begin{aligned} Au + R^2 \mathbf{q}/B_{11} &= 0, \quad A = \|A_{jk}(\partial/\partial\alpha_1, \partial/\partial\alpha_2)\|, \\ \mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3)^T, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, -q_3)^T \\ A_{11} &= \partial^2/\partial\alpha_1^2 + a_3\partial^2/\partial\alpha_2^2 + \lambda, \quad A_{12} = (v_2 + a_3)\partial^2/\partial\alpha_1\partial\alpha_2 \\ A_{22} &= a_3(1+4\varepsilon)\partial^2/\partial\alpha_1^2 + a_2(1+\varepsilon)\partial^2/\partial\alpha_2^2 + \lambda \\ A_{13} &= v_2\partial/\partial\alpha_1, \quad A_{23} = a_2\partial/\partial\alpha_2 - \varepsilon[(v_2 + 4a_3) \times \\ &\times \partial^3/\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2 + a_2\partial^3/\partial\alpha_2^3], \quad A_{21} = A_{12}, \quad A_{31} = A_{13} \\ A_{33} &= a_2 + \varepsilon[\partial^4/\partial\alpha_1^4 + 2(v_2 + 2a_3)\partial^4/\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2^2 + a_2\partial^4/\partial\alpha_2^4] - \lambda \\ A_{23} &= A_{32}, \quad B_{11} = E_1 h / (1 - \nu_1 \nu_2), \quad a_2 = E_2 / E_1 = \nu_2 / \nu_1 \\ a_3 &= G(1 - \nu_1 \nu_2) / E_1, \quad \varepsilon = h^2 / (12R^2), \quad \lambda = \rho \omega^2 R^2 (1 - \nu_1 \nu_2) / E_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь E_j, G, ν_j — упругие постоянные, ρ — плотность материала. На краях оболочки заданы условия шарнирного опирания

$$u_2 = u_3 = \partial u_1 / \partial \alpha_1 = \partial^2 u_3 / \partial \alpha_1^2 = 0 \quad (1.2)$$

2. Построим матрицу Грина $V = \|V_{jk}\|$ ($j, k=1, 2, 3$) задачи (1.1), (1.2). Она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} AV &= I \delta(\alpha_1 - \beta_1) \delta(\alpha_2 - \beta_2) \\ 0 \leq \alpha_1 \leq l, \quad 0 \leq \beta_1 < l, \quad 0 \leq \alpha_2, \quad \beta_2 < 2\pi \end{aligned}$$

где I — единичная матрица размерности 3×3 , $\delta(\alpha)$ — дельта-функция Дирака, β_1, β_2 — координаты точки приложения силы. Так как оболочка замкнута, то можно считать $\beta_2 = 0$. Каждый столбец матрицы V удовлетворяет условиям (1.2).

При построении матрицы Грина задачи (1.1), (1.2) методом отражения возмущения от силы, приложенной в точке $(\beta_1, 0)$ оболочки бесконечной длины, суммируются с возмущениями от сил, полученных отражением от границ $\alpha_1=0$ и $\alpha_1=l$. Эти силы располагаются в точках $(\pm 2nl \pm \beta_1, 0)$, $n=0, 1, 2, \dots$

Поэтому получим сначала матрицу Грина W гармонических колебаний оболочки бесконечной длины. Как и в статической задаче она определяется формулами [1] (P_{jk} — алгебраические дополнения к матрице A):

$$W_{jk} = P_{jk} (\partial/\partial\alpha_1, \partial/\partial\alpha_2) \Phi(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2) \quad (2.1)$$

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \Phi_0(\alpha_1) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(\alpha_1) \cos m\alpha_2 \right)$$

$$\Phi_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\xi\alpha_1) d\xi}{D_m(\xi)} \quad (2.2)$$

$$D_m = \det \|A_{jk}(i\xi, im)\| = \sum_{r=0}^4 d_r \xi^{8-2r} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \varepsilon a_3, \quad d_1 = \varepsilon (d_{00} + 4a_3^2) m^2, \quad d_{00} = a_2 - v_2^2 \\ d_2 &= a_3 (d_{00} - \lambda) + 2\varepsilon m^4 (a_2 a_3 + (v_2 + 2a_3) d_{31}) \\ d_{31} &= d_{00} - 2a_3 v_2, \quad d_3 = -\lambda (d_{00} + a_2 a_3 + d_{31} m^2) + \lambda^2 (1 + a_3) + a_2 d_1 m^4 \\ d_4 &= -\lambda a_2 a_3 (m^2 + m^4) + \lambda^2 (a_2 + d_{42} m^2) - \lambda^3 + \\ &+ \varepsilon a_2^2 a_3 m^4 (m^2 - 1)^2, \quad d_{42} = a_2 + a_3 \end{aligned}$$

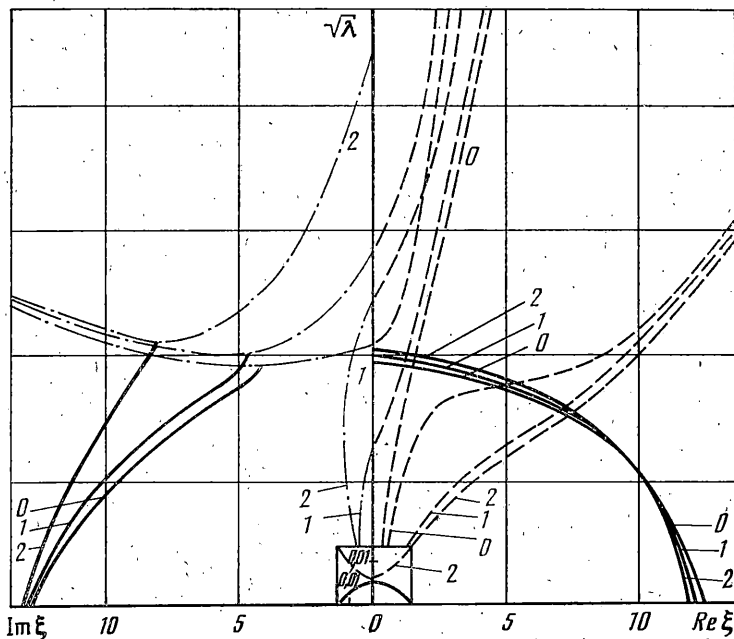
Коэффициенты Фурье Φ_m вычисляются с помощью вычетов и представляют собой сумму экспонент, показатели которых определяются корнями ξ_r дисперсионного уравнения $D_m(\xi) = 0$. Комплексным ξ_r соответствуют возмущения, которые экспоненциально затухают при удалении от источника вдоль образующей. Действительным корням соответствуют бегущие волны, которые распространяются вдоль оболочки без уменьшения амплитуды.

В статике при $\lambda=0$ все корни ξ_r комплексные. Поэтому сумма возмущений от основного источника в точке $(\beta_1, 0)$ и от отраженных источников представляет собой экспоненциально сходящийся ряд. При колебаниях, в зависимости от частоты, дисперсионное уравнение может иметь до трех пар действительных корней $\pm\xi_r$. Зависимость характеристических чисел ξ_r от частоты исследована в [3-5] для изотропной оболочки. Количество действительных корней может быть оценено аналогично [5]. Обозначим частоты, при которых $\xi=0$ удовлетворяет дисперсионному уравнению, через ω_{j0} ($j=1, 2, 3$), $\omega_{10} < \omega_{20} < \omega_{30}$:

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= \{\varepsilon m^2 (m^2 - 1)^2 E_2 [(1 + m^2) \rho R^2 (1 - v_1 v_2)]^{-1}\}^{1/2} \\ \omega_{20} &= (m/R) (G/\rho)^{1/2}, \quad \omega_{30} = \{(m^2 + 1) E_2 [\rho R^2 (1 - v_1 v_2)]^{-1}\}^{1/2} \end{aligned}$$

Если $m \geq 2$ и $0 < \omega < \omega_{10}$, то все корни комплексные. При $\omega > \omega_{30}$ существуют три пары действительных корней. При $\omega_{10} < \omega < \omega_{30}$ существует хотя бы одна пара действительных корней. При $m=0,1$ действительные ξ_r существуют для всех $\omega \geq 0$.

Значения ξ_r могут быть найдены численно, либо асимптотическим методом. Характеристический полином (2.3) ортотропной оболочки содержит такие же слагаемые, как в случае изотропной оболочки [3]. Поэтому при асимптотическом анализе корней уравнения $D_m(\xi) = 0$ множество значений параметров m, λ и ξ разбивается на такие же области, как в [3]. Так, например, пара действительных корней, соответствующая низким частотам, имеет вид $\xi_r = \pm m (\rho \omega^2 R^2 / E_1)^{1/4}$. Численные результаты представлены на фигуре. Сплошными линиями показаны действительная и мнимая части комплексных ξ_r . Действительные ξ_r показаны пунктиром, мни-



мые — штрих-пунктиром. Расчет проведен для изотропной оболочки с относительной толщиной $h/R=0,01$.

Волны, распространяющиеся без затухания, затрудняют вычисление суммы возмущений от всех источников.

Для преодоления указанной трудности естественно учесть рассеяние в материале оболочки. Сделаем это, как в [6], с помощью комплексных модулей упругости $E_j^*=E_j(1-i\eta)$, $G^*=G(1-i\eta)$, $\eta=\Delta/\pi$, где Δ — логарифмический декремент колебаний. Система уравнений (1.1) остается прежней, за исключением частотного параметра λ , который станет комплексным $\lambda^*=\lambda/(1-i\eta)$. Соответственно, комплексными будут коэффициенты характеристического полинома и характеристические числа. В итоге получим

$$\Phi_m = \frac{i}{2} \sum_{r=1}^4 \frac{\exp(i\xi_r |\alpha_1|)}{D_r} \quad (2.4)$$

$$D_r = d_0 \xi_r \prod_{s=1}^4 (\xi_r^2 - \xi_s^2) \quad (s \neq r)$$

где ξ_r — корни дисперсионного уравнения с положительной мнимой частью. Формулы (2.1), (2.4) определяют матрицу Грина гармонических колебаний оболочки бесконечной длины.

Для оболочки конечной длины после применения процедуры отражения получим

$$V_{jk} = P_{jk}(\partial/\partial\alpha_1, \partial/\partial\alpha_2) \Psi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2) \quad (2.5)$$

$$\Psi = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \Psi_0(\alpha_1, \beta_1) + \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(\alpha_1, \beta_1) \cos m\alpha_2 \right] \quad (2.6)$$

$$\Psi_m = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 [\cos(|\alpha_1 - \beta_1| - l)\xi_r \pm \cos(\alpha_1 + \beta_1 - l)\xi_r] (D_r \sin l\xi_r)^{-1}$$

Знак плюс в последней формуле берется при вычислении смещений от нагрузки q_1 , знак минус — для нагрузок q_2 и q_3 .

Величина $\Psi_m(\alpha_1, \beta_1)$ получена в результате суммирования ряда, членами которого являются возмущения Φ_m от заданной силы и от сил, отраженных от краев оболочки.

Покажем, что на частотах, не являющихся собственными для шарнирно-опертой оболочки, в (2.6) можно перейти к пределу $\Delta \rightarrow 0$. Декремент Δ входит в Ψ_m неявным образом через характеристические числа ξ_r . Каждое из ξ_r имеет конечные (и разные) пределы при $\Delta \rightarrow 0$. В случае $\Delta \neq 0$ знаменатель Ψ_m отличен от нуля. При $\Delta = 0$ знаменатель Ψ_m может обратиться в ноль при $\sin(l\xi_r) = 0$. Подстановка $\Delta = 0$, $\xi = \pm \pi n/l$ в дисперсионное уравнение $D_m(\xi) = 0$ приводит его к известному кубическому уравнению относительно квадратов частот, корнями которого являются квадраты собственных частот шарнирно-опертой оболочки. Следовательно, на несобственных частотах $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\sin l\xi_r) \neq 0$. Таким образом, на несобственных частотах предел Ψ_m при $\Delta \rightarrow 0$ существует и определяется той же формулой (2.6), а соответствующие значения ξ_r удовлетворяют дисперсионному уравнению $D_m(\xi) = 0$ в коэффициентах которого положено $\Delta = 0$. При больших m так же как в статике $\Psi_m = O(m^{-7})$ для любых достаточно малых Δ , включая $\Delta = 0$. Поэтому ряд (2.6) сходится и дает решение и при $\Delta = 0$.

Для вычисления V_{33} функцию Ψ необходимо продифференцировать четыре раза, для V_{13} и V_{23} — пять раз, при вычислении V_{11} , V_{22} , V_{12} — шесть раз. Следовательно, только смещения от радиальной сосредоточенной силы можно вычислять с помощью почленного дифференцирования ряда (2.5). В частности, радиальное смещение оболочки под действием радиальной нагрузки $q_3(\alpha_1) \cos m\alpha_2$ равно

$$u_3(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\cos m\alpha_2}{4\pi(1-i\eta)} \sum_{r=1}^4 \frac{P_{33}(i\xi_r, im)}{D_r \sin l\xi_r} \times \\ \times \int_0^l (\cos(|\alpha_1 - \beta_1| - l)\xi_r - \cos(\alpha_1 + \beta_1 - l)\xi_r) q_3(\beta_1) d\beta_1$$

Чтобы вычислить смещения от нагрузок, приложенных в касательной плоскости, а также деформации, усилия и моменты необходимо явно выделить особенность матрицы Грина в точке приложения силы. Асимптотика особенностей в статике исследовалась для произвольных изотропных оболочек в [7], для изотропной цилиндрической оболочки — в [4].

3. Матрица V_{jk}^0 , содержащая особенности построенного выше решения V_{jk} называется главным значением. Она определяется формулами, аналогичными (2.1), (2.2), где в операторах P_{jk} следует удерживать только старшие производные. Главное значение функции Грина Φ^0 удовлетворяет уравнению $D^0\Phi^0 = \delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2)$, где $D^0(\partial/\partial\alpha_1, \partial/\partial\alpha_2)$ — старшая часть оператора $\det \|A_{jk}(\partial/\partial\alpha_1, \partial/\partial\alpha_2)\|$, содержащая производные только восьмого порядка. Соответственно, характеристический полином равен

$$D^0(i\xi, im) = d_0[\xi^4 + (E_2/G - 2\nu_2)\xi^2 m^2 + \nu_2^2 m^4/\nu_1] \times \\ \times [\xi^4 + 2(\nu_2 + 2G(1 - \nu_2\nu_1/E_1))\xi^2 m^2 + \nu_2 m^4/\nu_1]$$

Таким образом, главное значение матрицы Грина не зависит от частоты и длины оболочки. Главное значение Φ^0 строится так же, как и функция Грина бесконечной оболочки.

Вычисления для ортотропной оболочки показывают, что особенности появляются при шестикратном дифференцировании тех слагаемых функции Φ^0 , которые определяются мнимыми корнями полинома $D^0(i\xi, im)$. Если вычисляемая величина определяется производными вида $\partial^6/\partial\alpha_1^{2k}\partial\alpha_2^{6-2k}$, $k=0, 1, 2, 3$ (как, например, V_{11} и V_{22}), то паре мнимых корней $\xi_r^0 = \pm iy$ полинома $D^0(i\xi, im)$ соответствует особенность вида $B_1 \ln(2 \exp(-|\alpha_1|y) (\operatorname{ch} |\alpha_1 y| - \cos \alpha_2))$. В случае производных вида $\partial^6/\partial\alpha_1^{2k+1}\partial\alpha_2^{5-2k}$, $k=0, 1, 2$ (как, например, для V_{12}) получаем ограничен-

ное слагаемое $B_2 \arctg [\sin \alpha_2 (e^{|\alpha_1|l} - \cos \alpha_2)^{-1}]$. Коэффициенты B_1, B_2 зависят от коэффициентов ортотропии. Для изотропной оболочки количество особенностей уменьшается, так как $B_2=0$.

Количество мнимых корней также зависит от параметров ортотропии. Так, например, для стеклопластика АГ-4с с параметрами $E_1=0,21$ МПа, $E_2=0,16$ МПа, $G=0,042$ МПа, $\nu_2=0,07$ получим четыре пары мнимых корней.

После вычисления Φ^0 функция Грина представляется в виде (3.1)

$$\Psi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi} \Phi^0(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [\Psi_m(\alpha_1, \beta_1) - \Phi_m^0(\alpha_1 - \beta_1)] \cos m\alpha_2$$

Ряд, состоящий в правой части (3.1) допускает почленное дифференцирование. В частности, при нахождении смещений дифференцирование сводится к умножению каждого члена ряда на полином $P_{jk}(i\xi_r, im)$, и в случае нечетных производных по $\alpha_2 \cos m\alpha_2$ заменяется на $\sin m\alpha_2$.

Для произвольно распределенных поверхностных нагрузок амплитуды вычисляются простым интегрированием:

$$u_j(\alpha_1, \alpha_2) = R^2 \int_0^l \int_0^s \sum_{k=1}^3 V_{jk}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) q_k(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2$$

При оценке количества слагаемых, которые надо удерживать в рядах по m следует принимать во внимание частоту. Так, например, пусть рассеяние в материале мало, и внешняя сила действует с частотой, равной собственной частоте $\omega_{kn}^{(1)}$, которая лежит ниже точки сгущения собственных частот. Тогда для вычисления резонансных амплитуд в сумме (2.5) достаточно ограничиться одним слагаемым, которое соответствует номеру резонансной гармоники и характеристическому числу

$$\xi = \xi_n - i\eta\lambda S_k(\xi_n)/D_k'(\xi_n), \quad \xi_n = \pi n/l, \quad D_k'(\xi_n) = dD_k/d\xi, \quad S_k(\xi) = -a_3\xi^4 + s_1\xi^2 + s_2$$

$$s_1 = 2\lambda(1+a_3) - d_{00} - a_2a_3 - d_{31}k^2$$

$$s_2 = -3\lambda^2 + 2\lambda(a_2 + d_{42}k^2) - a_2a_3(k^2 + k^4)$$

Пусть внешняя сила действует на несобственной частоте ω и ω_{kn} — ближайшая частота свободных колебаний с максимальным k (k — число волн в окружном направлении). Тогда ряд (3.1) должен содержать все слагаемые с $m \leq k$.

4. Полученные выражения для функций Грина существенно упрощаются, если для корней ξ_r воспользоваться асимптотическими формулами. Дисперсионные уравнения ортотропной и изотропной оболочек содержат одинаковые слагаемые, поэтому рассмотрим для простоты изотропную оболочку. Обозначим, как в [3] $\mu = \varepsilon^{1/4}$, $\lambda \sim \mu^x$, $m \sim \mu^{-t}$, $\kappa > -4$, $0 \leq t < 2$. Ограничимся невысокими частотами, т. е. будем считать $\kappa > 0$. Тогда множество допустимых значений чисел t, κ распадается на три области, каждой из которых соответствует свое асимптотическое выражение для дисперсионного уравнения [3]:

$$\text{I: } t > 1; \quad \text{II: } t < 1, \kappa > 4 - 4t > 0; \quad \text{III: } t < 1, 0 < \kappa < 4 - 4t$$

Зафиксируем частоту λ т. е. число κ и рассмотрим различные значения m .

При достаточно больших m корни ξ_r определяются из дисперсионного уравнения, соответствующего области I: $(\xi^2 + m^2)^4 = 0$. В этом случае функция Грина гармонических колебаний бесконечной оболочки не зависит от частоты и совпадает с главным значением

$$\Phi_m = \exp(-m|\alpha_1|) [8\varepsilon(1-\nu)m^7]^{-1} \times$$

$$\times (|\alpha_1|^3 m^3 - 6\alpha_1^2 m^2 - 15|\alpha_1|m + 15) \quad (4.1)$$

Пусть колебания оболочки конечной длины l происходят под действием внешней нагрузки, распределенной по закону

$$\delta(\alpha_1 - \beta_1) \cos m\alpha_2, \beta_1 \leq l/2 \quad (4.2)$$

Тогда в области I можно пренебречь влиянием краев и пользоваться формулой (4.1), если $\beta_1 > (h/R)^{1/2}$.

При меньших значениях m следует воспользоваться дисперсионным уравнением из области II. Также как и в области I, в случае оболочки бесконечной длины функция Грина гармонических колебаний не зависит от частоты, т. е. совпадает со статистической, и имеет вид

$$\Phi_m = K \mu^{-3} m^{-6} \exp(-\xi_{02} |\alpha_1|) \cos(\xi_{02} |\alpha_1| - \pi/4) \\ \xi_{02} = \mu m^2 (4(1-\nu^2))^{-1/4}, K = 0,5 (1-\nu) (1-\nu^2)^{1/4}$$

Для нагрузки вида (4.2) влиянием краев можно пренебречь при выполнении условия $\mu m^2 \beta_1 \gg 1$.

При малых значениях m (область III) асимптотические решения строятся с помощью осциллирующих интегралов, зависящих от частоты, и функции Грина оболочек бесконечной и конечной длины равны

$$\Phi_m = -(e^{-|\alpha_1| \xi_0} + \sin |\alpha_1| \xi_0) [2\xi_0^3 (1-\nu^2)]^{-1} \\ \Psi_m = -\{ [\operatorname{ch}(|\alpha_1 - \beta_1| - l) \xi_0 \pm \operatorname{ch}(\alpha_1 + \beta_1 - l) \xi_0] / \operatorname{sh} l \xi_0 + \\ + [\cos(|\alpha_1 - \beta_1| - l) \xi_0 \pm \cos(\alpha_1 + \beta_1 - l) \xi_0] / \sin l \xi_0 \} / (1+\nu) \xi_0^3 \quad (4.3) \\ \xi_0 = m [\lambda / (1-\nu^2)]^{1/4}$$

В этом случае, за счет отражения бегущих волн краев решения для конечной и бесконечной оболочек существенно различаются. Логарифмический декремент колебаний, характеризующий рассеяние механической энергии, входит в формулу (4.3) через частотный параметр λ .

Аналогичным образом упрощаются алгебраические дополнения P_{jk} , которые необходимы для вычисления компонент матриц Грина. Так, например, для вычисления прогиба под действием радиальной силы в области III необходимо умножить соответствующую функцию Грина на $1/2 (1-\nu) m^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
4. Нигул У. К. Некоторые результаты исследования уравнений собственных колебаний упругой круглой цилиндрической оболочки // Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А. 1960. № 171. С. 19-36.
5. Вейцман Р. И., Генкин М. Д., Дейнеко П. П., Тарханов Г. В. Исследование колебаний элементов редуктора, выполненных в виде тонкостенных цилиндрических оболочек // Акустическая динамика машин и конструкций. М.: Наука, 1973. С. 18-26.
6. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
7. Чернышев Г. Н. О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую тонкую оболочку произвольного очертания // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 126-134.
8. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 2. С. 159-194.

Москва, Свердловск

Поступила в редакцию
11.II.1985