

УДК 539.3

# ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО НАГРЕВАЕМЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

МАКСИМОВИЧ В. Н., ХОМЛЯК Л. В.

Построено численно-аналитическое решение задачи термопластичности для локально нагреваемых пологих оболочек. Решение получено с использованием метода интегральных уравнений и самокорректирующего метода последовательных нагружений. В качестве примера проведены исследования термонапряженного состояния в пластинах, нагреваемых нормально-круговыми источниками тепла. В случае одностороннего нагрева пластины нормально-круговыми источниками тепла проведена оценка точности построенного решения. Рассмотрена задача об оптимизации параметров нагрева пластины с целью наведения в заданной области благоприятных с точки зрения прочности остаточных напряжений сжатия.

1. Воспользуемся уравнениями теории пологих оболочек, основанных на гипотезе Кирхгофа-Лява. Принимая известное допущение о совпадении эвклидовой геометрии срединной поверхности оболочки с эвклидовой геометрией плоскости ее проекции, отнесем оболочку толщины  $2h$  к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ , которую выберем таким образом, чтобы координата  $z$  определяла положение точки вдоль нормали к срединной поверхности ( $-h \leq z \leq h$ ). Будем рассматривать случай, когда температура и напряжения в оболочке стремятся к нулю на бесконечности и теплофизические и механические характеристики (за исключением предела текучести) не зависят от температуры.

Представим компоненты тензора приращений полных деформаций в виде суммы трех слагаемых

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p + de_{ij}^t \quad (i, j = x, y) \quad (1.1)$$

где  $e_{ij}^e$  — компоненты тензора упругих деформаций,  $e_{ij}^p$  — компоненты тензора пластических деформаций,  $e_{ij}^t = \delta_{ij} \alpha_t (t - t_0)$  — компоненты тензора тепловой деформации,  $\alpha_t$  — линейный коэффициент температурного расширения,  $t$  — температура,  $t_0$  — начальная температура,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

При построении решения задачи термопластичности для оболочек воспользуемся соотношениями неизотермической теории течения (для идеальной пластичности), ассоциированной с условием текучести Мизеса. Тогда для определения составляющих приращений пластических деформаций получим соотношения [1]:

$$de_{ij}^p = [3\sigma_{ij} - \delta_{ij}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] d\beta \quad (1.2)$$

где  $\beta$  — скалярный множитель, удовлетворяющий условию  $d\beta \geq 0$ ,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений.

Кроме соотношений (1.2) в процессе нагружения (нагрева) в области пластического деформирования  $V^p$  должно выполняться условие текучести Мизеса

$$f = \sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \sigma_s^2(t) = 0 \quad (1.3)$$

где  $\sigma_s(t)$  — зависящий от температуры предел текучести,  $f$  — функция нагружения (пластический потенциал).

Напряжения в оболочках при упругопластическом деформировании в произвольный момент нагрева  $\tau$  возникают вследствие чисто тепловой деформации  $e_{ij}^t$  и пластических (необратимых) деформаций  $e_{ij}^p$ . Предположим, что слагаемые  $e_{ij}^p = e_{ij}^p(x, y, z)$  — известные функции. Тогда определение напряженно-деформированного состояния оболочки приводится к известной в литературе задаче теории упругости (согласно [2] задача определения начальных напряжений). Исходя из этого напряжения представим в виде суммы

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^t + \sigma_{ij}^p \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}^t$  — компоненты тензора термоупругих напряжений (определяемые из решения рассматриваемой задачи в упругой постановке, т. е. при  $e_{ij}^p = 0$ ),  $\sigma_{ij}^p$  — компоненты тензора напряжений, обусловленные необратимыми деформациями  $e_{ij}^p$  (начальные напряжения). В рамках гипотезы Кирхгофа-Лява начальные напряжения в оболочках определяются по формулам [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^p &= (2h)^{-1} (N_{ij} + 3M_{ij}z/h^2) + A_{ij} \\ N_{ij} &= D_0 \operatorname{Re} (\delta_{ij} \nabla^2 F - \partial^2 F / \partial i \partial j), \\ M_{ij} &= - (D_1 / \lambda) \operatorname{Im} [ (1-\nu) \partial^2 F / \partial i \partial j + \delta_{ij} \nu \nabla^2 F ] \\ A_{ij} &= E(1-\nu^2)^{-1} [ (1-\nu) \varepsilon_{ij}^p + \nu \delta_{ij} (\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p) - (1-\nu) e_{ij}^p - \nu \delta_{ij} (e_{xx}^p + e_{yy}^p) ] \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e_{ij}^p(x, y, z) dz \\ D_0 &= 2Eh, \quad D_1 = (2/3)Eh^3(1-\nu^2)^{-1}, \quad \lambda = h[3(1-\nu^2)]^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $F$  — комплексная функция, определяющаяся из разрешающего уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^4 F + \frac{I}{\lambda} \nabla_k^2 F &= - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^0}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_{ij}^0 &= \varepsilon_{ij}^p + I \lambda [ \delta_{ij} (\kappa_{xx}^p + \kappa_{yy}^p) - (1-\nu) \kappa_{ij}^p ], \quad I = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\nabla_k^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_y \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_x \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \kappa_{ij}^p = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h e_{ij}^p(x, y, z) z dz$$

где  $k_x, k_y$  — главные кривизны оболочки. Отметим, что здесь предполагается совпадение координатных линий  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  и  $z = 0$  с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки.

Представим решение разрешающего уравнения (1.6) в виде

$$F = \iint_{D^0} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2} \varepsilon_{xx}^0 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} \varepsilon_{yy}^0 - 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} \varepsilon_{xy}^0 \right) dx_0 dy_0 \quad (1.7)$$

где  $D^0$  — область, в которой величины  $\varepsilon_{ij}^0$  отличны от нуля,  $\Omega$  — функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения (1.6). Выражения для функций  $\Omega$  в ряде случаев можно получить в замкнутом виде. Так, например,  $\Omega = -(2\pi m^2)^{-1} [K_0(m\rho) + \ln \rho]$  для случая сферической оболочки и  $\Omega = -(2\pi m)^{-1} \int \operatorname{sh} [m(x-x_0)/2] K_0(m\rho/2) dx$  для случая цилиндрической оболочки. Здесь  $m^2 = -I/(\lambda R)$ ,  $\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ ,  $R$  — радиус оболочки,  $K_0(x)$  — функция Макдональда нулевого порядка.

Подставляя (1.7) в (1.5), для определения слагаемых  $\sigma_{ij}^p$  получим окончательно интегральное представление

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^p &= \iiint_{V^p} (F_{ij}^{xx} e_{xx}^p + F_{ij}^{yy} e_{yy}^p + F_{ij}^{xy} e_{xy}^p) dx_0 dy_0 dz_0 + A_{ij} \\ F_{ij}^{\xi\xi} &= \frac{1}{2h} G_{ij}^{\xi\xi} + \frac{3z_0}{2h^3} \Phi_{ij}^{\xi\xi} \quad (\xi, \zeta = x, y) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$A_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{2h} \int_{-h}^h [(1-\nu) e_{ij}^p + \nu \delta_{ij} (e_{xx}^p + e_{yy}^p) dz_0 - \right. \\ \left. - [(1-\nu) e_{ij}^p + \nu \delta_{ij} (e_{xx}^p + e_{yy}^p)] \right\}$$

где  $V^p$  — область пластического деформирования,  $G_{ij}^{kt}(x-x_0, y-y_0, z)$  и  $\Phi_{ij}^{kt}(x-x_0, y-y_0, z)$  — функции, определяемые через производные четвертого порядка по переменным  $x$  и  $y$  от функции  $\Omega$ .

Таким образом, если известно решение соответствующей задачи термоупругости (т. е. слагаемые  $\sigma_{ij}^t$ ), то для построения решения задачи термопластичности необходимо решить систему уравнений (1.2), (1.3), (1.8) при неизвестной области пластического деформирования  $V^p$ . Подставляя соотношения (1.8) в (1.4), а затем (1.4) в (1.2) и (1.3) получим систему четырех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для определения неизвестных пластических деформаций  $e_{xx}^p$ ,  $e_{yy}^p$ ,  $e_{xy}^p$  и скалярного множителя  $\beta$ .

2. Решение полученных уравнений аналитически для большинства практических задач получить трудно, а иногда просто невозможно из-за трудностей, обусловленных их нелинейностью и нестационарностью процесса нагружения (нагрева). Поэтому построим численный алгоритм их решения. Для этого разобьем область пластического деформирования  $V^p$  на  $M$  подобластей  $V_m^p$  ( $m=1, M$ ) малых размеров с центрами в точках  $(x_m, y_m, z_m)$  и примем приближенно, что в каждой такой подобласти пластические деформации постоянны. Тогда для определения компонентов тензора напряжений получим на основании (1.4) и (1.8) приближенные формулы

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^t + \sum_{m=1}^M [f_{ij}^{xx}(x, y, z, m) e_{xx}^p(m) + f_{ij}^{yy}(x, y, z, m) e_{yy}^p(m) + \\ + f_{ij}^{xy}(x, y, z, m) e_{xy}^p(m)] \quad (2.1)$$

где  $f_{ij}^{kt}(x, y, z, m)$  — известные функции, которые определяются в общем случае путем интегрирования по каждой из подобластей  $V_m^p$ .

Для преодоления трудностей, связанных с учетом истории нагружения, используем метод последовательного прослеживания развития упруго-пластических деформаций (метод последовательных нагружений) [4], когда на каждом последующем шаге (этапе) нагружения решение находится с учетом полученного на предыдущем. Для этого весь рассматриваемый период нагружения (нагрева)  $[0, \tau]$  разбивается на отдельные шаги по времени  $\Delta \tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), размеры которых выбираем опытным путем на основании численных экспериментов. Тогда, на основании (2.1) для приращения напряжений в точке  $(x_n, y_n, z_n)$  на  $k$ -ом шаге нагружения, получим формулы

$$\Delta \sigma_{ij}(k, n) = \Delta \sigma_{ij}^t(k, n) + \sum_{m=1}^{M_k} [f_{ij}^{xx}(n, m) \Delta e_{xx}^p(k, m) + f_{ij}^{yy}(n, m) \Delta e_{yy}^p(k, m) + \\ + f_{ij}^{xy}(n, m) \Delta e_{xy}^p(k, m)] \quad (2.2)$$

где  $\Delta e_{ij}^p(k, m)$  — приращение компонентов тензора пластических деформаций на  $k$ -ом шаге нагружения в подобласти пластического деформирования  $V_m^p$ ,  $M_k$  — количество подобластей, на которые разбита область пластического деформирования на  $k$ -ом шаге нагружения,  $\Delta \sigma_{ij}^t(k, n)$  — известные на любом  $k$ -ом шаге нагружения из решения соответствующей задачи термоупругости приращения термоупругих напряжений.

Пусть известно решение задачи термопластичности в конце  $(k-1)$ -го шага нагружения. Представим приращения пластических деформаций на  $k$ -ом шаге нагружения на основании соотношений (1.2) следующим

образом:

$$\Delta e_{ij}^p(k, m) = \{3\sigma_{ij}(k-1, m) - \delta_{ij}[\sigma_{xx}(k-1, m) + \sigma_{yy}(k-1, m)] \Delta \beta_m(k) \quad (m=1, \overline{M_k}) \quad (2.3)$$

где  $\sigma_{ij}(k-1, m)$  — известные в конце  $(k-1)$ -го шага компоненты тензора полных напряжений,  $\Delta \beta_m(k)$  — неизвестные приращения скалярных множителей на  $k$ -ом шаге нагружения в подобласти  $V_m^p$ . Подставляя (2.3) в правую часть (2.2) получим

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}(n, k) &= \Delta \sigma_{ij}^t(n, k) + \sum_{m=1}^{M_k} [a_m f_{ij}^{xx}(n, m) + b_m f_{ij}^{yy}(n, m) + c_m f_{ij}^{xy}(n, m)] \Delta \beta_m(k) \\ a_m &= 2\sigma_{xx}(k-1, m) - \sigma_{yy}(k-1, m), \quad b_m = 2\sigma_{yy}(k-1, m) - \sigma_{xx}(k-1, m) \\ c_m &= 3\sigma_{xy}(k-1, m) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку при последовательном прослеживании, начиная с заданного начального состояния ( $\tau=0$ ), величины  $a_m, b_m, c_m$  известны, то для полного решения задачи термопластичности необходимо определить скалярные множители  $\Delta \beta_m(k)$ . Для их определения воспользуемся условием Мизеса (1.3). Так как в области пластического деформирования при активном нагружении  $f=0$  и  $\Delta f=0$  на каждом шаге нагружения, то из (1.3) получим

$$\begin{aligned} \Delta f(k, n) &= a_n \Delta \sigma_{xx}^{(k,n)} + b_n \Delta \sigma_{yy}(k, n) + 2c_n \Delta \sigma_{xy}(k, n) - \\ &- 2\sigma_s(k-1, n) \Delta \sigma_s(k, n) + \varepsilon_{k-1}(n) = 0 \quad (n=1, \overline{M_k}) \\ \varepsilon_{k-1}(n) &= f(k-1, n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon_{k-1}(n)$  — величина, позволяющая избежать погрешностей при использовании шагового метода по времени. Отметим, что проводимая таким образом коррекция позволяет, как показали численные эксперименты, существенно увеличить величину шагов по времени, а значит и значительно сократить время расчетов.

Подставляя (2.4) в (2.5) получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M_k} A_{nm} \Delta \beta_m(k) &= B_n \quad (n=1, \overline{M_k}) \\ A_{nm} &= a_n P_{nm}^{xx} + b_n P_{nm}^{yy} + 2c_n P_{nm}^{xy} \\ B_n &= d_n - a_n \Delta \sigma_{xx}^t(k, n) - b_n \Delta \sigma_{yy}^t(k, n) - 2c_n \Delta \sigma_{xy}^t(k, n) \\ P_{nm}^{ij} &= a_m f_{ij}^{xx}(n, m) + b_m f_{ij}^{yy}(n, m) + c_m f_{ij}^{xy}(n, m) \\ \Delta \sigma_{ij}^t(k, n) &= \sigma_{ij}^t(k, n) - \sigma_{ij}^t(k-1, n), \quad d_n = 2\sigma_s(k-1, n) \Delta \sigma_s(k, n) - \varepsilon_{k-1}(n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, если известно решение соответствующей задачи термоупругости, т. е. слагаемые  $\sigma_{ij}^t(k, n)$  при любом  $k$ , то система уравнений (2.6) представляет собой полную систему  $M_k$  линейных алгебраических уравнений для определения на  $k$ -ом шаге нагружения  $M_k$  неизвестных множителей  $\Delta \beta_m(k)$ . После решения полученной системы уравнений (2.6) на каждом шаге нагружения нужно уточнять область пластического деформирования исходя из условия нагружения. Если во всех  $M_k$  точках скалярные множители  $\Delta \beta_m(k) > 0$ , то переходим к следующему шагу. Если же окажется, что в некоторых из  $M_k$  точек  $\Delta \beta_m(k) \leq 0$  (т. е. происходит разгрузка или нейтральное нагружение), то ставим приращения пластических деформаций в этих точках равными нулю и снова решаем систему (2.6), полученную за счет точек, в которых условие активного нагружения выполняется. По известным в конце  $k$ -го шага нагружения множителям  $\Delta \beta_m(k)$ , по формулам (2.3) — (2.4) определяем приращения пластических деформаций и приращения напряжений, которые в сумме соответственно с пластическими деформациями и напряжениями в начале шага дают пластические деформации и напряжения в конце  $k$ -го шага. Далее переходим к следующему шагу и прогнозируем область пластического деформирования. Для этого к полученным в конце  $k$ -го шага нагружения напряжениям добавляем известные из решения задачи термоупругости приращения термоупругих напряжений  $\Delta \sigma_{ij}^t(k+1, n)$  и проверяем условие текучести Мизеса. Область в которой условие Мизеса выполняется будет нулевым приближением области пластического деформирования. Выбранную область пластического деформирования, как и выше, разбиваем на подобласти малых разме-

ров и формируем на  $(k+1)$ -ом шаге новую систему линейных алгебраических уравнений для определения  $M_{k+1}$  неизвестных скалярных множителей  $\Delta\beta_m(k+1)$ . Процесс прослеживания развития упруго-пластических деформаций продолжаем до конца исследуемого периода нагружения (соответствующего времени  $\tau$ ).

Таким образом решение задачи термопластичности сведено к решению на каждом шаге нагружения системы линейных алгебраических уравнений относительно скалярных множителей  $\Delta\beta_m(k)$ .

3. В качестве примера использования предложенного выше численно-аналитического метода решения задачи термопластичности, рассмотрим нестационарную задачу термопластичности для бесконечной пластины, нагреваемой со стороны граничной поверхности  $z=h$  движущейся с постоянной скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $Ox$  внешней среды, температура которой описывается нормальным законом распределения вероятности Гаусса (нормально-круговые источники тепла)  $\theta = \theta_0 \exp(-k_* r_0^2)$ , где  $r_0^2 = (x-x_0-v\tau)^2 + (y-y_0)^2$ ,  $\theta_0$  — максимальная температура внешней среды,  $k_*$  — коэффициент сосредоточенности нагрева,  $x_0, y_0$  — координаты точки, в которой в начальный момент времени (т. е. при  $\tau=0$ ) размещен центр источников тепла. Отметим, что такое распределение характерно для источников нагрева, используемых при сварке (дуговой, электронно-лучевой), термообработке металлов газовыми горелками и лазерами [5].

Предположим, что пластинка свободна от внешней нагрузки, через ее граничные поверхности  $z=\pm h$  осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона, напряжения в начальный момент времени нулевые. Кроме того примем допущение о линейном распределении температуры по толщине пластины.

Запишем сначала решение соответствующей задачи термоупругости. В данном случае, аналогично [6], после применения интегрального преобразования Ханкеля и метода суперпозиции фундаментальных решений, для определения температуры  $t$  и термоупругих напряжений  $\sigma_{ij}^t$  ( $i, j = x, y$ ) получим формулы ( $a$  — коэффициент температуропроводности,  $Bi$  — критерий Био):

$$t = t_0 + \theta_0 [A_1 J_0(\chi_1) + A_2 z J_0(\chi_2)] / h \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij}^t = 1/2 E \alpha_t \theta_0 [A_1 J_{ij}(\chi_1) + A_2 z J_{ij}(\chi_2)] / h$$

$$J_0(\chi_l) = \int_0^\tau \Phi_0(x_0, y_0, u) du, \quad J_{ij}(\chi_l) = \int_0^\tau \Phi_{ij}(x_0, y_0, u) du \quad (l=1, 2)$$

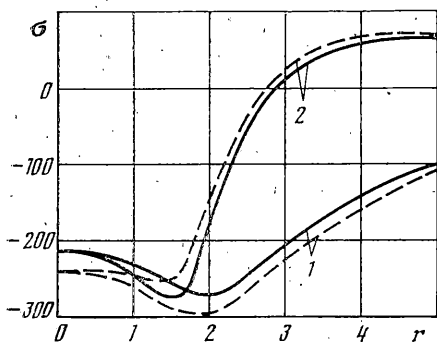
$$\begin{aligned} \Phi_0 &= E_1 E_2 / B, \quad \Phi_{xx} = -E_1 r^{-4} [(2y_1^2 r^2 / B - r_1^2) E_2 + r_1^2] \\ \Phi_{yy} &= -E_1 r^{-4} [(2x_1^2 r^2 / B - r_1^2) E_2 - r_1^2], \quad E_1 = \exp(-a\chi_1 u) \\ \Phi_{xy} &= 2E_1 x_1 y_1 r^{-4} [(r^2 / B + 1) - 1], \quad E_2 = \exp(-r^2 / B) \\ A_1 &= A/2, \quad A_2 = 3A/2, \quad A = \chi_1 a / k_*, \quad \chi_1 = Bi / h^2 \\ \chi_2 &= 3(1 + Bi) / h^2, \quad B = 4au + 1 / k_*, \quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 \\ r_1^2 &= x_1^2 - y_1^2, \quad x_1 = x - x_0 - v(\tau - u), \quad y_1 = y - y_0 \end{aligned}$$

Таким образом для полного решения задачи термопластичности для пластины предложенным выше методом необходимо определить фундаментальное решение уравнения (1.6), которое в данном случае ( $k_x = k_y = 0$ ) имеет согласно [7] вид ( $C$  — произвольная постоянная):

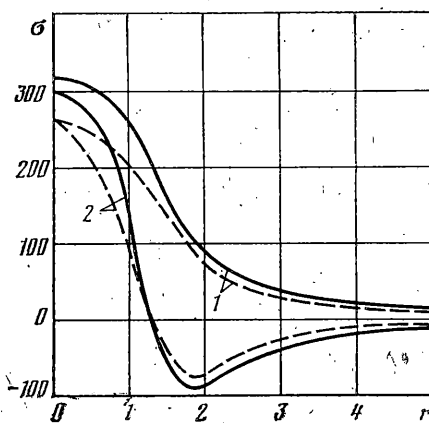
$$\Omega = (8\pi)^{-1} \rho^2 (\ln \rho - C), \quad \rho = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2} \quad (3.2)$$

4. По полученным формулам (3.1)–(3.2) с использованием предложенной выше методики были проведены расчеты упруго-пластического напряженного состояния пластин при их одностороннем нагреве неподвижными ( $v=0$ ) нормально-круговыми источниками тепла. Расчеты выполнялись для случая нагрева пластин от момента времени  $\tau=0$  для момента времени  $\tau=\tau_0$  с последующим охлаждением ее до температуры  $t_0=20^\circ\text{C}$ .

Численные расчеты производились применительно к стали 09Г2С. При этом в качестве подбласти  $V_m^p$  ( $m=1, M$ ) использовали параллелепипеды постоянных (малых) размеров  $h_x, h_y, h_z$  и полагалось  $E=210$  ГПа,  $\nu=0,3$ ,  $\alpha_t=0,135 \cdot 10^{-4}$  град $^{-1}$ ,  $a=0,1 \cdot 10^{-4}$  м $^2$ /с,  $Bi=0,3$ ,  $\tau_0=60$  с,  $k_*=4450$  м $^{-2}$  (что соответствует приблизительно радиусу пятна нагрева  $r_*=0,015$  м),  $h=0,01$  м,  $h_x=h_y=0,006$  м,  $h_z=0,004$  м,  $\Delta\tau_k=\Delta\tau=3$  с. Использованная зависимость предела текучести  $\sigma_s$  (МПа) от температу-



Фиг. 1



Фиг. 2

ры  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) приведена ниже [8]:

$t$	20	200	400	500	600	800
$\sigma_s$	300	280	220	200	120	50

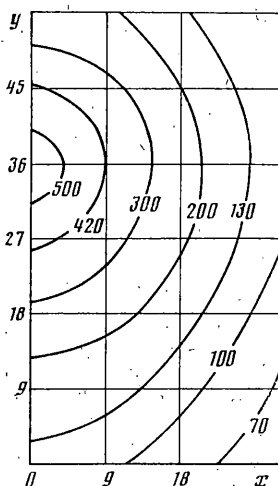
Результаты расчетов в сечении  $z=0,008$  м радиальных  $\sigma_{rr}$  (кривые 1) и окружных  $\sigma_{\theta\theta}$  (кривые 2) напряжений в случае осесимметричного нагрева пластины при  $\theta_0=2000^{\circ}\text{C}$  представлены сплошными линиями на фиг. 1–2. На фиг. 1 ( $\sigma$  — МПа,  $r=10^{-2}$  м) представлены результаты расчетов в конце нагрева (максимальная температура в сечении  $z=0,8h$  при этом была равна  $401^{\circ}\text{C}$ ), а на фиг. 2 — в конце охлаждения до температуры  $t=t_0=20^{\circ}\text{C}$ . Штриховыми линиями приведены результаты аналогичных расчетов с использованием пакета прикладных программ для решения осесимметричных трехмерных задач термопластичности для толстостенных тел вращения [9]. Отметим, что при составлении данного пакета были использованы соотношения теории малых упруго пластических деформаций и методы переменных параметров упругости и конечных элементов.

Из сопоставления результатов, представленных на фиг. 1–2, можно заключить, что полученное с использованием предложенной методики решение удовлетворительно согласуется с решением работы [9], основанном на использовании трехмерных уравнений термопластичности. Наибольшее различие наблюдается в областях, непосредственно прилегающим к центру пятна нагрева и не превышает 20%. Это различие объясняется тем, что в данном случае при выбранных параметрах нагрев является локализованным (радиус пятна нагрева  $r_*$  меньше толщины пластины) и поэтому погрешность приведенных результатов связанная с использованием приближенных уравнений, основанных на гипотезе Кирхгофа-Лява. Как показали дополнительные расчеты, при уменьшении толщины пластины и фиксированном пятне нагрева разница между результатами, полученными на основании двух различных подходов, уменьшалась. Таким образом отсюда следует, что предложенная методика решения задач термопластичности, основанная на использовании гипотезы Кирхгофа-Лява, является достаточно точной и может быть применена для более сложных случаев нагрева, для которых численная реализация решений, основанных на использовании трехмерных уравнений термопластичности связана с большим временем счета.

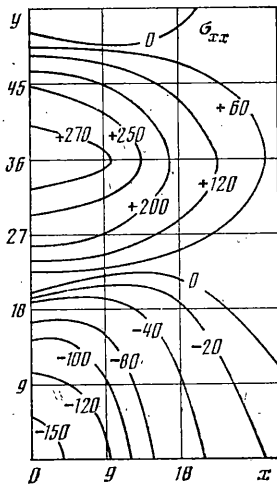
В заключении, с применением предложенной методики, исследуем термонапряженное состояние пластин, нагреваемых двумя нормально-круговыми источниками тепла в точках  $(0, \pm d, h)$ , где  $d$  — расстояние центров нагрева источников тепла от оси  $Ox$ . Такой нагрев используется для искусственного создания остаточных напряжений сжатия в областях небольших размеров (в данном случае в окрестности начала системы координат), в которых возможно зарождение трещин. Известно [10], что такой способ позволяет в ряде случаев существенно повысить долговечность элементов сварных конструкций.

В связи с этим представляет интерес выбрать расстояние и максимальную температуру  $t_{\max}$  таким образом, чтобы величина  $\sigma_{xx}(0, 0, h)$  после полного остывания была отрицательной и возможно большей. Здесь принято, что центр области локально пониженной прочности находится в точке  $(0, 0, h)$  и ее прочность определяется действующими там напряжениями  $\sigma_{xx}$ .

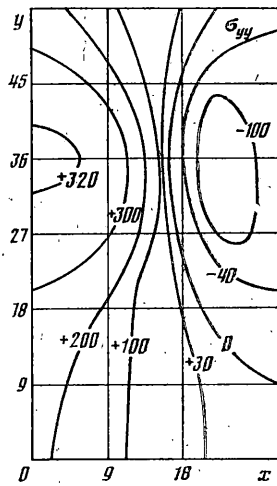
Результаты расчетов температурных полей  $t$  в конце нагрева (т. е. при  $\tau=\tau_0$ ) и остаточных напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  в случае симметричного нагрева относительно оси  $Ox$  двумя одинаковыми источниками тепла в сечении  $z=0,8h$  представлены в виде изолиний на фиг. 3–5 ( $x, y=10^{-3}$  м). При этом при расчетах принимали  $\theta_0=2500^{\circ}\text{C}$  и  $d=0,036$  м. Как показали расчеты, остаточные сжимающие напряжения  $\sigma_{xx}$  при выбранных параметрах  $\theta_0$  и  $d$  в окрестности точки  $(0, 0, h)$  являются наибольшими (достигают приблизительно 0,6 предела текучести при  $t=20^{\circ}\text{C}$ ) по сравнению с остаточными сжимающими напряжениями  $\sigma_{xx}$ , возникающими при других значениях данных параметров.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На основании анализа проведенных численных расчетов для рассмотренного случая можно сделать следующие выводы: а) незначительное смещение центров областей нормально-круговых источников от оптимального расстояния  $d=0,036$  м несущественно изменяет максимальные сжимающие остаточные напряжения; б) увеличение максимальной температуры при нагреве (по сравнению с оптимальной  $t_{\max}=500^\circ\text{C}$ ) не приводит к росту максимальных сжимающих остаточных напряжений; в) области, в которых возникают сжимающие остаточные напряжения, при нагреве двумя источниками тепла значительно больше по величине по сравнению с нагревом одним источником тепла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
3. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 221 с.
4. Темис Ю. М. Метод последовательных нагружений с коррекцией погрешности в геометрически нелинейных упругих задачах // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1970. Вып. 16. С. 3-10.
5. Сварка в машиностроении: Справочник. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 501 с.
6. Максимович В. Н., Чабаненко А. А. Термопластическое состояние пластин при локальном нестационарном нагреве // Укр. инж.-физ. ж., 1985. Т. 48. № 3. С. 340-341.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
8. Мазненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. Киев: Наук. думка, 1976. 320 с.
9. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В., Прохоренко И. В., Савченко В. Г. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1980. 196 с.
10. Труфяков В. И. Усталость сварных соединений. Киев: Наук. думка, 1973. 216 с.

Львов

Поступила в редакцию  
20.X.1986