

УДК 539.3

**УПРУГИЕ ПРОВОДЯЩИЕ ОБОЛОЧКИ
В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

РАДОВИНСКИЙ А. Л.

В [1] асимптотическим интегрированием уравнений Максвелла (в квазистационарном приближении) и уравнений теории упругости в тонкой области, занятой материалом оболочки, были получены нелинейные уравнения электромеханики тонких упругих оболочек и показано, что они могут быть линеаризованы при решении двух основных типов задач: задач определения демпфирования колебаний оболочек постоянными магнитными полями [2] и задач возбуждения упругих колебаний оболочек переменными электромагнитными полями.

В публикуемой статье для задач второго типа приводятся уравнения в векторной форме, соответствующие граничные и начальные условия, пределы применимости уравнений, дается описание общей методики их решения. Для электродинамической части задачи дано выражение функционала полной мощности, сформулированы условия ортогональности собственных решений соответствующих уравнений, а для задач об оболочках в заданных гармонических полях выписана формула разложения магнитного потенциала вихревых токов по собственным решениям.

В качестве примера рассмотрена задача об относительном вращении тонкостенной упругой сферы и постоянного наклонного магнитного поля, рассмотренная в приближении жесткой оболочки в [3, 4], а также получены формулы для определения магнитного давления на сферу при включении постоянного магнитного поля.

1. При исследовании динамики тонких упругих немагнитных оболочек конечной электропроводности в переменных электромагнитных полях будем исходить из следующих уравнений.

Уравнение электродинамики тонких оболочек

$$\begin{aligned} \gamma \Delta_s F + f_n^* &= B_n^* \quad (\text{на } S), \quad \Delta \Phi = 0 \quad (\text{в } V) \\ [(\text{grad } \Phi)_s^+ - (\text{grad } \Phi)_s^-] \cdot n &= 0, \quad \gamma = (h \mu_0 \sigma)^{-1} \\ F &= \Phi_s^+ - \Phi_s^-, \quad f = 1/2 [(\text{grad } \Phi)_s^+ + (\text{grad } \Phi)_s^-] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Формулы для определения магнитного давления

$$\mathbf{X} = -\mu_0^{-1} (\text{grad}_s F \cdot \mathbf{n}) \times (\mathbf{B} + \mathbf{f}) \quad (1.2)$$

Уравнения динамики тонких упругих оболочек

$$E h \mathbf{L} u + \rho h u'' = \mathbf{X} \quad (1.3)$$

Здесь S — срединная поверхность оболочки (\mathbf{n} — единичная нормаль к ней), V — односвязная бесконечная область (все пространство, за исключением S), \mathbf{B} — значение на S вектора магнитной индукции, полученное в отсутствие оболочки, Φ — магнитный потенциал, \mathbf{f} — магнитная индукция вихревых токов в оболочке, \mathbf{u} — вектор перемещений срединной поверхности оболочки, h , σ , E , ρ — толщина, электрическая проводимость, модуль Юнга и плотность оболочки, μ_0 — магнитная постоянная, Δ и Δ_s — операторы Лапласа в V и на S , \mathbf{L} — оператор теории оболочек [5]; точкой обозначена производная по времени t .

К уравнениям (1.1)–(1.3) надо добавить граничные условия. Для (1.1) — условие ограниченности Φ на бесконечности и на краю оболочки G одно из условий: $F=0$ на изолированном крае или $\partial F / \partial n = 0$ (здесь \mathbf{n} — нормаль к G на S) на краю, находящемся в контакте с идеальным проводником. К уравнениям (1.3) надо добавить обычные краевые условия теории упругих оболочек [6].

В задачах нестационарной электродинамики уравнения (1.1)–(1.3) надо решать либо при однородных ($\Phi_0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0' = 0$), либо при соответствующих неоднородных начальных условиях. При ступенчатом (во фронте которого $\partial/\partial t > (h^2 \mu_0 \sigma)^{-1}$ включении или выключении поля \mathbf{V} начальные условия для (1.1) имеют соответственно вид $f_{n0} = -B_n$ и $f_{n0} = B_n$. В этом случае уравнения (1.3) применимы, вообще говоря, только для отыскания частного решения, в то время как при определении (необходимых для выполнения начальных условий на \mathbf{u} и \mathbf{u}') собственных решений надо исходить из уравнений колебаний оболочек в постоянных магнитных полях [1], собственные решения которых приблизительно совпадают с собственными решениями уравнений (1.3) только при относительно слабых магнитных полях.

Уравнения (1.1)–(1.3) получены в [1] путем линеаризации общей системы нелинейных уравнений электромеханики тонких упругих оболочек. Там же рассмотрены вопросы точности уравнений и показано, что они применимы для исследования процессов, в которых $\partial/\partial x \ll h^{-1}$, $\partial/\partial t \ll \ll \min(\omega_e, \omega_s)$, $\omega_e = (h^2 \mu_0 \sigma)^{-1}$, $\omega_s = h^{-1} \sqrt{E/\rho}$ (x – пространственная координата), т. е. когда справедлива динамическая теория упругих оболочек [5, 6] и отсутствует скин-эффект.

Линейная плотность \mathbf{J} , электрическое поле \mathbf{e} вихревых токов в оболочке, а также вызываемая ими магнитная индукция \mathbf{h} в среде определяются через введенные величины по формулам $\mathbf{J} = \mu_0^{-1} \text{grad}_s F \times \mathbf{n}$, $\mathbf{e} = (h\sigma)^{-1} \mathbf{J}$, $\mathbf{h} = \text{grad } \Phi$.

2. Решение поставленной задачи ведется в три этапа, на первом из которых путем интегрирования уравнений (1.1) решается электродинамическая задача определения потенциала Φ . Магнитное давление \mathbf{X} определяется на втором этапе прямыми действиями по формуле (1.2). Третий этап состоит в динамическом расчете упругой оболочки при известном давлении по обычным уравнениям (1.3).

Наибольшие математические сложности представляют первый и третий этапы, причем последний, в основном, ввиду его громоздкости. Поэтому кратко остановимся на свойствах решений, определяющих первый этап уравнений (1.1) при сформулированных граничных условиях.

Однородная ($B_n = 0$) задача (1.1), вообще говоря, имеет собственные решения, которые можно представить в виде $\Phi_k(x) \exp(\omega_k t)$, $\omega_k < 0$. Условие их ортогональности выражается одним из равенств

$$P_{t,q} = 0, \quad Q_{t,q} = 0, \quad q \neq t$$

$$P_{t,q} = \gamma \mu_0^{-1} \int_S (\text{grad}_s F_t) (\text{grad}_s F_q) ds,$$

$$Q_{t,q} = \mu_0^{-1} \int_V (\text{grad } \Phi_t) (\text{grad } \Phi_q) dv$$

При действии на оболочку гармоническим полем с нормальной компонентой (на S) $B_n(x, t) = B_n(x) \exp(i\omega t)$ решение неоднородной задачи (1.1) может быть найдено разложением по собственным решениям

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k(x) \exp(i\omega t), \quad A_k = i\omega (i\omega - \omega_k)^{-1} (\mu_0 Q_{k,k})^{-1} \int_S B_n(x) F_k ds \quad (2.1)$$

где объемный интеграл $Q_{k,k}$ можно заменить поверхностным согласно равенству $Q_{k,k} = -P_{k,k}/\omega_k$, следующему из не выписанной здесь теоремы взаимности собственных решений уравнений (1.1).

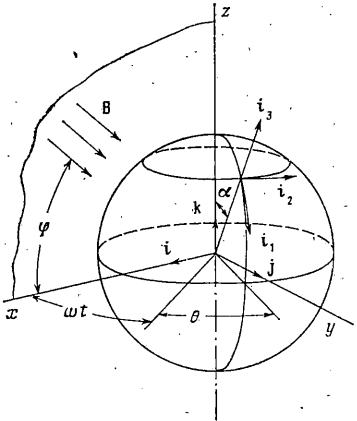
Полная мощность определяемого уравнениями (1.1) электромагнитного поля вихревых токов представляется функционалом

$$N = \gamma \mu_0^{-1} \int_S (\text{grad}_s F)^2 ds + (2\mu_0)^{-1} \left[\int_V (\text{grad } \Phi)^2 dv \right] + \mu_0^{-1} \int_S B_n F ds$$

откуда (с учетом ортогональности) следует, что при действии на оболочку гармоническим полем полная мощность тепловыделения в оболочке за счет нагрева вихревыми токами равна

$$\gamma \mu_0^{-1} \int_S (\text{grad}_s F) \overline{(\text{grad}_s F)} ds$$

3. Рассмотрим в качестве примера задачу о вращении сферической оболочки радиуса R (см. фигуру) в постоянном магнитном поле \mathbf{B} , компоненты которого в сферической системе координат ($\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \theta$, $\alpha_3 = r$), связанной с оболочкой



$$\begin{aligned} B_1 &= -B_x \cos \alpha \cos(\omega t + \theta) + B_z \sin \alpha \\ B_2 &= B_x \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= -B_x \sin \alpha \cos(\omega t + \theta) - B_z \cos \alpha \\ B_x &= B \cos \varphi, \quad B_z = B \sin \varphi \end{aligned}$$

Решение (1.1) может быть получено в виде разложения

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j A_{jk} \Phi_{jk} \exp(i\omega t)$$

Учитывая, что собственные решения Φ_{jk} и числа ω_{jk} уравнений (1.1) выражаются через сферические функции $Y_j^k(\alpha, \theta)$ по формулам

$$\Phi_{jk} = \left\{ \begin{array}{l} j(r/R)^{-(j+1)} \\ -(j+1)(r/R)^j r \end{array} \right\} Y_j^k(\alpha, \theta), \quad \left\{ \begin{array}{l} > R+0 \\ < R-0 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

$$\omega_{jk} = -(2j+1)\gamma/R$$

и $B_n = B_3 = \omega B_x \sin \alpha \sin(\omega t + \theta)$, получим либо по формуле, аналогичной (2.1), либо непосредственной подстановкой в (1.1):

$$\begin{aligned} \Phi &= 1/2 RB_x \Phi_{11}, \quad Y_1^1(\alpha, \theta) = \sin \alpha \cos(\omega t + \theta - \kappa) \\ \kappa &= -\arctg \psi, \quad \psi = -\omega_{11}/\omega = 3\gamma/(\omega R) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставив (3.1)–(3.3) в (1.2) и перейдя в неподвижную (связанную с полем \mathbf{B}) систему координат ($\alpha_1^1 = \alpha$, $\alpha_2^1 = \theta_1 = \omega t + \theta$, $\alpha_3^1 = r$), получим формулу для определения магнитного давления

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^3 X_j \mathbf{i}_j \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= \mp \frac{3B_x}{2\mu_0} \cos \kappa [-B_z \cos \alpha + B_x (\cos(\theta_1 - x) - \cos \theta_1) \sin \alpha] \times \\ &\quad \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \cos(\theta_1 - x) \\ \sin(\theta_1 - x) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{3B_x}{2\mu_0} \cos \kappa \{ [B_x \sin \alpha + B_z \cos \alpha (1/2 \cos(\theta_1 - \kappa) \cos \kappa - \cos \theta_1)] \times \\ &\quad \times \cos \alpha \cos(\theta_1 - \kappa) - [B_x \sin \theta_1 - 1/2 B_z \sin(\theta_1 - \kappa) \cos \kappa] \sin(\theta_1 - \kappa) \} \end{aligned}$$

Переход в (3.4) к связанной с оболочкой системе координат (α_j^0) осуществляется обратной заменой $\theta_1 = \omega t + \theta$.

Главный вектор момента магнитного давления на оболочку можно получить интегрированием по поверхности

$$dM = [-(X_1 \sin \theta_1 + X_2 \cos \alpha \cos \theta_1) \mathbf{i} + (X_1 \cos \theta_1 - X_2 \cos \alpha \sin \theta_1) \mathbf{j} + (X_2 \sin \alpha) \mathbf{k}] R ds$$

$$ds = R^2 \sin \alpha d\alpha d\theta_1$$

Он определяется формулой

$$M = \frac{B^2 R^3}{\mu_0} \frac{1}{1 + \psi^2} [\pi \sin 2\varphi (\psi \mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2\psi \cos^2 \varphi \mathbf{k}] \quad (3.5)$$

откуда следует, что момент, действующий на ось вращения, $\sqrt{M_x^2 + M_y^2} = (\pi B^2 R^3 / \mu_0) \sin 2\varphi$ не зависит от угловой скорости (входящей в ψ), а тормозящий момент M_z имеет максимальное значение при $\omega = 3\gamma/R$ (при $\psi = 1$).

Результат (3.5) совпадает с полученным предельным переходом (при малой толщине) из трехмерного решения для оболочки [3], заключенной между концентрическими сферами, и с полученным на основании интегродифференциальных уравнений [4], аналогичных (1.1) ¹.

Рассмотрим вопрос об определении упругих вибраций оболочки во вращающемся боковом ($\varphi = 0$) магнитном поле. Запишем уравнения (1.3) в адекватной им форме [1]. Для сферы они имеют вид

$$\sum_{\eta=1}^3 (aK_{\xi\eta} + M_{\xi\eta}) v_\eta - \frac{\rho R^2}{E} \Delta_s v_\xi = z_\xi \quad (\xi=1, 2) \quad (3.6)$$

$$\sum_{\eta=1}^3 (aK_{3\eta} + M_{3\eta}) v_\eta + \frac{\rho R^2}{E} v_3 = z_3, \quad a = \frac{h^2}{12R^2}$$

где отличные от нуля операторы, обладающие точностью, совпадающей с точностью (1.1) — (1.3), имеют вид (ν — коэффициент Пуассона);

$$M_{11} = (1 - \nu^2)^{-1} \Delta_s^2 + (1 + \nu)^{-1} \Delta_s, \quad M_{22} = (1 + \nu)^{-1} (1/2 \Delta_s^2 + \Delta_s)$$

$$M_{33} = 2(1 - \nu)^{-1}, \quad M_{13} = M_{31} = -(1 - \nu)^{-1} \Delta_s, \quad K_{33} = (1 - \nu^2)^{-1} \Delta_s^2$$

где z_η ($\eta = 1, 2, 3$) — компоненты вектора

$$\mathbf{z} = R^2 / [(Eh) T^* \mathbf{X}] \quad (3.7)$$

Здесь v_η ($\eta = 1, 2, 3$) — компоненты искомого вектора \mathbf{v} , через который вектор перемещений \mathbf{u} выражается по формуле

$$\mathbf{u} = T \mathbf{v} \quad (3.8)$$

Оператор Лапласа Δ_s и матричный оператор T (T^* — оператор, формально сопряженный к T) имеют вид

$$\Delta_s = \sin^{-1} \alpha \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin^{-1} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]$$

$$T = \begin{vmatrix} \partial/\partial \alpha & \sin^{-1} \alpha \partial/\partial \theta & 0 \\ \sin^{-1} \alpha \partial/\partial \theta & -\partial/\partial \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Компоненты z_η вектора \mathbf{z} подстановкой в (3.7) вектора \mathbf{X} ($\varphi = 0$, $\theta_1 = \omega t + \theta$) согласно (3.4) могут быть приведены к виду

$$z_\eta = {}^2/3c \{ B_{\eta 00} + B_{\eta 20} P_2^0 + B_{\eta 22} P_2^2 \cos [2(\omega t + \theta - \kappa)] + B_{\eta 22} P_2^2 \sin [2(\omega t + \theta - \kappa)] \} \quad (\eta = 1, 3), \quad z_2 = -4c P_1^0 \quad (3.9)$$

¹ Васильев Д. Г., Симонов И. В. Асимптотические оценки комплексных частот колебаний оболочек в жидкости: Препринт № 186. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1981. 67 с.

где $B_{110}=B_{120}=B_{122}=0$, $B'_{122}=1$, $B_{300}=-4d$, $B_{320}=2d$, $B'_{322}=1$, $P_n^m=-P_n^m(\cos \alpha)$ — полином Лежандра, $d=(2\psi)^{-1}$, $c=3(BR)^2/(8Eh\mu_0)\psi/(1+\psi^2)$.

Решение (3.6)–(3.9) будем искать в виде

$$v_\eta = A_{\eta 00} + A_{\eta 20} P_2^0 + A_{\eta 22} P_2^2 \cos[2(\omega t + \theta - \kappa)] + A_{\eta 22} P_2^2 \sin[2(\omega t + \theta - \kappa)] \quad (\eta=1, 3), \quad v_2 = A_2 P_1^0 \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.6), (3.9), приравняв коэффициенты при одинаковых переменных, получим

$$A_{100}=0, \quad A_2 = -^3/3c(1+\nu), \quad A_{\eta 2m}^{(\prime)} = \delta_{\eta m}^{(\prime)} / \delta_m \quad (\eta=1, 3, m=0, 2) \quad (3.11)$$

$$\delta_m = (a_{11} - \lambda_m)(a_{22} - \lambda_m) - a_{12} a_{21}$$

$$\delta_{1m}^{(\prime)} = ^2/3c[\chi^{-1}(a_{22} - \lambda_m)B_{12m}^{(\prime)} - a_{12}B_{32m}^{(\prime)}]$$

$$\delta_{3m}^{(\prime)} = ^2/3c[(a_{11} - \lambda_m)B_{32m}^{(\prime)} - \chi^{-1}a_{21}B_{12m}^{(\prime)}]$$

$$a_{11} = \chi - (1-\nu), \quad a_{22} = a\chi^2 + 2(1+\nu), \quad a_{21} = \chi(1+\nu), \quad a_{22} = 1+\nu$$

$$\chi = 6; \quad \lambda_m = m^2(1-\nu)^2 \rho \omega^2 R^2 / E$$

4. Рассмотрим кратко путь решения другой задачи — о включении постоянного, неподвижного относительно оболочки ($\omega=0$) бокового ($\varphi=0$) магнитного поля \mathbf{B} , компоненты которого в связанной с оболочкой системе координат выражаются по формуле (3.1) при $\omega=\varphi=0$, $B_z=0$, $B_x=B$.

Магнитный потенциал может быть найден в виде

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j A_{jk} \Phi_{jk} \exp(\omega_{jk} t) \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1), (3.2) в начальное условие (см. п. 1) $f_{r0} = (\partial\Phi/\partial r)|_{t=0} = -B_z$, получим решение (для Φ_{11} и ω_{11} даны формулы (3.2)):

$$\Phi = -^1/2 R b \Phi_{11} \exp(\omega_{11} t), \quad Y_1^1(\alpha, \theta) = \sin \alpha \cos \theta \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2), (3.2) в (1.2), получим магнитное давление в виде (3.4), где

$$X_{1,2} = \mp \frac{3B^2}{2\mu_0} \beta(t) (\beta(t) - 1) \sin \alpha \cos \theta \begin{Bmatrix} \cos \alpha \cos \theta \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

$$X_3 = \frac{3B^2}{2\mu_0} \beta(t) (^1/2\beta(t) - 1) (\cos^2 \alpha \cos^2 \theta + \sin \alpha \sin \theta)$$

$$\beta(t) = \exp(-3\gamma t / R)$$

Анализ (4.3) показывает, что в начальный момент тангенциальные компоненты давления равны нулю ($X_1=X_2=0$), а затем сначала возрастают, достигая максимума при $t = ^1/3 R \ln 2/\gamma$, а затем затухают, в то время как нормальное давление X_3 в начальный момент отлично от нуля и имеет максимальное значение.

Отыскание частного решения уравнений динамики упругой сферической оболочки (3.6), (3.7) при заданном давлении (4.3) не содержит принципиальных сложностей и здесь не рассматривается.

Подстановкой (3.10), (3.11) в (3.8) получим

$$u_1 = (-^3/2 A_{120} + 3A_{122} \cos \Omega + 3A'_{122} \sin \Omega) \sin 2\alpha$$

$$u_2 = (A_{210} - ^3/2 A_{122} \sin \Omega + ^3/2 A'_{122} \cos \Omega) \sin \alpha$$

$$u_3 = (A_{300} + ^1/4 A_{320}) + ^3/4 A_{320} \cos 2\alpha + ^3/2 (A_{322} \cos \Omega + A'_{322} \sin \Omega) (1 - \cos 2\alpha),$$

$$\Omega = 2(\omega t + \theta - \kappa)$$

При угловой скорости ω , равной половине круговой частоты, соответствующей собственным колебаниям упругой оболочки по закону $P_2^2(\cos \alpha) \exp(2i\theta)$, возникают резонансы. (При этом $\delta_2=0$, A_{322} , A_{322} обращаются в бесконечность.)

Первое слагаемое выражения (3.9) для z_3 определяет постоянное внешнее давление $B^2/[2\mu_0(1+\psi^2)]$ на оболочку. Для медной оболочки ($\sigma=10^7$ (Ом·м) $^{-1}$) с $h=10^{-3}$ м, $R=10^{-1}$ м в поле $B=1$ Т оно выражается в функции ω формулой $4 \cdot 10^5 (1 + (2,4 \cdot 10^3/\omega)^2)^{-1}$ Н·м $^{-2}$, а при увеличении B возрастает пропорционально ее квадрату. Для данной оболочки $\omega_e=8 \cdot 10^4$ с $^{-1}$, $\omega_s=3,6 \cdot 10^6$ с $^{-1}$ и полученные формулы справедливы при $\omega < \omega_e$ (см. п. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Радвинский А. Л. Динамика упругих электропроводящих оболочек в постоянных и нестационарных магнитных полях // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 796–803.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272 с.
3. Halverson R. P., Cohen H. Torque on a spinning hollow sphere in a uniform magnetic field // IEEE Trans. Aerospace and Navig. Electronics. 1964. V. 11. No. 2. P. 118–121.
4. Астахов В. И. Интегральные параметры электромагнитного процесса в проводящих оболочках // Изв. вузов. Электромеханика. 1985. № 5. С. 5–17.
5. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. В., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1979. 383 с.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.XI.1986