МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1988

УДК 539.3:534.1

# О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

МЕШКОВ С. И., ШАШКИН А. И.

Оптимальные размеры крепей горных выработок обычно определяются с позиции приближенного подхода [1, 2], сущность которого заключается в том, что параметр нагружения вводится только в граничные условия. Исследование задач при таком подходе, который, однако, не следует из трехмерной линеаризированной теории устойчивости [3], значительно упрощается. Давление на внешнюю поверхность крепи в этих задачах считается постоянным и никак не определяется [4, 5].

В публикуемой работе на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости получено характеристическое уравнение для определения критического внутреннего радиуса сферической крепи, на внешнюю поверхность которой действует нагрузка, равная контактному давлению на границе крепи и горного массива [6]. Величина контактного давления определяется при решении задачи о докритическом напряженно-деформированном состоянии крепи и упругопластического массива, который имеет поверхность раздела зон упругого и пластического деформирования.

1. Докритическое состояние в рамках геометрически линейной теории определяется уравнениями равновесия, граничными условиями и соотношениями Коши

$$\nabla_i\sigma_j^i=0,\quad N_i\sigma_j^i|_S=P_j,\quad 2e^i=\nabla^iu_j+\nabla^ju_i \tag{1.1}$$

Если в теле одновременно существуют области упругих и пластических деформаций, то на границе их раздела $\beta$ предположим выполнение условия непрерывности вектора перемещений и поверхностных сил $[u_i]|_\beta=0$, $[N_i\sigma_j^i]|_\beta=0$. Квадратные скобки обозначают разность значений выражения, заключенного в скобки, соответствующих упругой и пластической области; $\sigma_j^i$, $e_j^i$ — смешанные компоненты симметричного тензора напряжений и тензора деформаций соответственно; $N_i$, $P_i$, $u_i$ — ковариантные составляющие орта нормали к поверхности тела, поверхностных сил в недеформированном теле и вектора перемещений соответственно. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Упругие деформации определяются законом Гука

$$\sigma_j^i=\lambda e_k^{ek}+2\mu e_j^{ei} \tag{1.2}$$

где $\lambda$, $\mu$ — параметры Ламе, $g_j^i$ — смешанные компоненты метрического тензора.

Для описания упругопластических свойств воспользуемся моделью среды [7] с функцией нагружения

$$f=(s_j^i-ce_j^{pi})(s_i^j-ce_i^{pj})-K^2=0 \tag{1.3}$$

Здесь $c$ — коэффициент упрочнения: $K$ — предел текучести; $s_j^i=\sigma_j^i-{}^1/_3\sigma_k^kg_j^i$. Верхние индексы $p$ и $e$ приписываем величинам, характеризующим пластическое и упругое состояния тела соответственно.

Полная деформация слагается из упругой и пластической компонент $e_{ij}=e_{ij}^p+e_{ij}^e$. Скорости пластических деформаций определяются на основании ассоциированного закона течения [7].

Для исследования устойчивости исходного состояния, определяемого величинами с индексом нуль вверху, воспользуемся линеаризированными относительно возмущений уравнениями равновесия, граничными условиями, соотношениями Коши, условиями непрерывности возмущений компонент вектора перемещений и поверхностных сил

$$\nabla_i(\sigma_j^{\ i}+\sigma_k^{\ 0i}\nabla^k u_j)=0 \tag{1.4}$$

$$N_i(\sigma_j^{\ i}+\sigma_k^{\ 0i}\nabla^k u_j)|_S=P_j, \quad 2e_j^{\ i}=\nabla^i u_j+\nabla^j u_i \tag{1.5}$$
$$[u_i]|_\beta=0, \quad [N_i(\sigma_j^{\ i}+\sigma_k^{\ 0i}\nabla^k u_j]|_\beta=0$$

Здесь $P_j$ — ковариантные составляющие возмущений поверхностных сил, действующих в деформированном состоянии. Линеаризированная связь между возмущениями напряжений и деформаций определяется для упругой области законом Гука (1.2).

Исходное состояние считается неустойчивым, если существуют смежные близкие к нему состояния равновесия, т. е. возмущения отличны от нуля.

2. Рассмотрим устойчивость сферической оболочки с внутренним радиусом $b$ и внешним — $a$, находящейся в упругопластическом невесомом полупространстве. На внутренней поверхности оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности $P$. На бесконечности действуют усилия $\gamma H$, где $\gamma$ — средний объемный вес вышележащих пород; $H$ — глубина заложения оболочки. Считаем, что $H \gg a$.

Определим исходное напряженно-деформированное состояние оболочки и массива в симметричном случае ($e_\theta=e_\varphi$). Для упругой оболочки находим

$$u/r=C_1+C_2r^{-3}, \quad \sigma_r=(3\lambda+2\mu)C_1-4\mu C_2r^{-3}$$
$$\sigma_\theta=(3\lambda+2\mu)C_1+2\mu C_2r^{-3} \tag{2.1}$$

Решение для упругой области массива запишется таким образом

$$u_r^{\ e+}=A_1+A_2r^{-3}, \quad \sigma_r^{\ e+}=(3\lambda^++2\mu^+)A_1-4\mu^+A_2r^{-3}$$
$$\sigma_\theta^{\ e+}=(3\lambda^++2\mu^+)A_1+2\mu^+A_2r^{-3}$$

Здесь и далее знаком плюс отмечены те характеристики массива, которые необходимо отличить от аналогичных характеристик оболочки.

Из ассоциированного закона пластического течения для симметричного деформирования следует, что $s_\theta=s_\varphi$, $s_e=-{}^1/_2 s_r$. Функции нагружения (1.7) теперь можно придать вид

$$(s_r-ce_r^{\ p})^2=k^2; \quad k^2={}^2/_3K^2 \tag{2.2}$$

Учитываем, что в пластической области материал считается несжимаемым, $e_r^{\ e}=e_r-e_r^{\ p}$, $e_r=du/dr$, $s_r=2\mu^+(e_r-e_r^{\ p})$, $u^{p+}=B_1r^{-2}$.

Из соотношения (2.2) выводим

$$e_r^{\ p}=-(2\mu^++c)^{-1}(k+4\mu^+B_1r^{-3})$$

Вычисляя $\sigma_r^{\ p+}-\sigma_\theta^{\ p+}=s_r-s_\theta=3\mu^+(2\mu^++c)^{-1}(k-2cB_1r^{-3})$ из уравнения равновесия найдем

$$\sigma_r^{\ p+}=B_2-\mu_-(2cB_1r^{-3}+3k\ln r)$$
$$\sigma_\theta^{\ p+}=B_2-\mu_-[k(3\ln r+1{,}5)-cB_1r^{-3}], \quad \mu_-=2\mu^+/(2\mu^++c)^{-1}$$

Для определения констант интегрирования $C_1$, $C_2$, $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ и радиуса поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования в массиве $\beta$ имеем граничное условие $\sigma_r=-P$ при $r=b$, условие на бесконечности $\sigma_r^{\ e+}=\sigma_\theta^{\ e+}=-\gamma H$ $(r\to\infty)$, условия сопряжения решений при $r=\beta$: $[u^+]=0$, $[\sigma_r^{\ +}]=0$, $[\sigma_\theta^{\ +}]=0$ и условия на поверхности контакта оболочки с горной породой $u=u^{p+}$, $\sigma_r=\sigma_r^{\ p+}$ $(r=a)$.

Из этих условий находим значения констант

$$A_1=-\gamma H(3\lambda^++2\mu^+)^{-1}, \quad A_2=\mu_-g(3cA_1-1{,}5k)$$
$$B_1=g(6\mu^+A_1-1{,}5k\mu_-), \quad B_2=-\gamma H+\mu_-k(3\ln\beta+1)$$
$$C_1=(4\mu B_1-b^3P)\tau^{-1}, \quad C_2=a^2b^3(aP+\eta B_1\beta^{-2})\tau^{-1}$$
$$\tau=\eta b^3+4\mu a^3, \quad \eta=3\lambda+2\mu, \quad g={}^1/_3\beta^3(2\mu^+-c\mu_-)^{-1}$$

и уравнение, определяющее радиус $\beta$ для упругопластической границы

$$2\eta B\left[c\mu_-\frac{b^3}{a^3}+2\mu\left(1-\frac{b^3}{a\beta^2}\right)\right]+8c\mu\mu_-B-\frac{3b^3}{\beta^3}P(\lambda+2\mu)=$$

$$=\left(\eta\frac{b^3}{\beta^3}+4\mu\frac{a^3}{\beta^3}\right)\left[\mu_-k\left(3\ln\frac{\beta}{a}+1\right)-\gamma H\right]$$

$$B={}^1/_3(6\mu^+A_1-1{,}5k\mu_-)/(2\mu^+-c\mu_-)$$

Рассматриваемую задачу можно смоделировать теперь следующим образом [6]: исследуется возможность потери устойчивости упругой оболочки, находящейся под действием внутреннего давления $P$ и внешней нагрузки

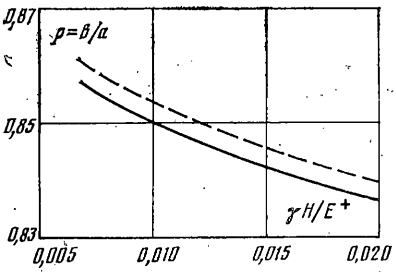
$$\sigma_r^{p+}|_{r=a}=-R=\frac{k}{2\mu^++c}\left\{c\frac{\beta^3}{a^3}+2\mu^+\left(3\ln\frac{\beta}{a}+1\right)\right\}-\gamma H$$

Для симметричной формы потери устойчивости из системы (2.1) получаем уравнение

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)+\sigma_r^\circ\frac{d^2u}{dr^2}+\sigma_\theta^\circ\frac{2}{r}\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)=0 \qquad (2.3)$$

Здесь компоненты с индексом нуль вверху определяются соотношениями (2.1). Используя закон Гука и обозначение $\alpha=(a^3(\lambda+2\mu+(3\lambda+2\mu)C_1)/(4\mu C_2)$, перепишем уравнение (2.3):

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{4\alpha r^3-a^3}{\alpha r^3-a^3}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=0$$




Решение этого уравнения имеет вид $u/r=Q_1\ln[1-a^3/(\alpha r^3)]+Q_2$. Здесь $u$ — возмущения радиальных перемещений; $Q_1$, $Q_2$ — константы интегрирования, которые определяются из граничных условий (2.2) $\sigma_r+\sigma_r^\circ du/dr=0$ $(r=b, r=a)$.

Условие существования нетривиального решения этой системы двух уравнений (равенство нулю определителя матрицы коэффициентов системы уравнений) записывается следующим образом

$$\rho^{-1}[(\alpha\rho^3-1)/(\alpha-1)]^{1/2}=\exp[(\lambda+2\mu-R)(3\lambda+2\mu-R)^{-1}(\alpha-1)^{-1}-$$
$$-(\lambda+2\mu-P)(3\lambda+2\mu-P)^{-1}(\alpha\rho^3-1)^{-1}],\quad \rho=b/a \qquad (2.4)$$

На фигуре представлены результаты численного решения этой задачи при ($\nu$ — коэффициент Пуассона, $E$ — модуль Юнга): $\nu=0{,}3$, $\nu^+=0{,}4$, $K/E^+=0{,}00175$, $c/E^+=0$, $E/E^+=2{,}05$, $P=0$. В этом случае материалом крепи может являться бетон марки М-500, а горной породой — аргиллит. Штриховая кривая получена по приближенной теории. Для этого варианта вместо уравнения (3.11) имеем уравнение

$$(3\lambda+2\mu-P)(3\lambda+2\mu-R)^{-1}(2\mu-R)(2\mu-P)^{-1}=\rho^{-3}$$

для получения которого использовались уже уравнения (1.1) и линеаризированные граничные условия (1.5).

ЛИТЕРАТУРА


1. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. № 4. Вып. 2. С. 140—146.
2. *Лейбензон Л. С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 1. С. 50—85.
3. *Гузь А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977. 204 с.
4. *Алимжанов М. Т.* Об определении толщины монолитной крепи // Прикладные задачи механики горных пород. Алма-Ата: Наука, 1971. С. 153—160.
5. *Алимжанов М. Т., Гордон В. И.* Об устойчивости толстостенной сферической оболочки // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1980. № 5. С. 57—59.
6. *Шашкин А. И.* Определение оптимальной толщины монолитной крепи // Тр. НИИ математики Воронеж. ун-та. 1973. Вып. 8. С. 50—53.
7. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.


Воронеж

Поступила в редакцию
29.XII.1985