

УДК 539.3

ТРЕХСЛОЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ АБСОЛЮТНО МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

НЕМИРОВСКИЙ Ю. В., ШУЛЬГИН А. В.

Проблема оптимального проектирования трехслойных оболочечных конструкций имеет исключительно важное значение для создания несущих элементов машиностроительной и авиационно-космической техники. Решению большого круга связанных с ней вопросов посвящены многочисленные исследования, нашедшие отражение в [1–5]. Как правило, все известные методы решения этой проблемы являются методами локальной оптимизации и не гарантируют достижения глобального минимума. В связи с этим важное значение имеет критерий оптимальности Друккера – Шилда [6], который гарантирует достижение абсолютного минимума объема пластической конструкции. Детальный анализ выполненных на основе этого критерия исследований показал [7], что несмотря на многочисленные попытки его использования, конкретные решения ограничиваются лишь случаями осесимметричного изгиба круглых пластин и цилиндрических оболочек. Попытки перенесения на более общие случаи [8] ограничились только формулировками общих уравнений без получения каких-либо конкретных решений. Определенное продвижение было достигнуто в [7], где, в частности, был выделен подкласс строго безмоментных оптимальных оболочек и построены для него некоторые решения.

В данной работе рассмотрен ряд новых решений задач оптимального проектирования трехслойных пластических конструкций из идеально пластического материала, подчиняющегося условию пластичности Хилла. Проведено также сравнение проектов, полученных методом постоянной диссипации, и равнопрочных, и показано, что равнопрочные проекты имеют больший объем несущих слоев. При этом для рассматриваемых трехслойных оболочек под равнопрочными понимаются проекты, у которых в каждой точке меридиана условие пластичности в одном из несущих слоев реализуется как равенство, а в другом – как нестрогое неравенство.

1. Пусть α_k ($k=1, 2, 3$) – криволинейные ортогональные координаты, причем срединная поверхность оболочки отнесена к координатной поверхности $\alpha_3=0$, а координатные линии α_1, α_2 совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности. Тогда в соответствии с теорией тонких оболочек имеем следующие уравнения равновесия и геометрические соотношения [9]:

$$\begin{aligned}
 A_2 \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} + A_1 \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1}{R_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_2 - T_1) - & (1.1) \\
 - 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{2K}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 - A_1 A_2 q_1 \\
 A_2 \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} + A_1 \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_2 - M_1) - 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} K + A_1 A_2 Q_1 \\
 A_2 \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + A_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} &= - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} Q_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} Q_2 + A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) - A_1 A_2 q_3 \\
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{u_3}{R_1} \\
 \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_2
 \end{aligned}$$

(1.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \omega_1 + \omega_2, \quad \kappa_{12} = \tau_1 + \omega_2/R_1 = \tau_2 + \omega_1/R_2 \\ \theta_1 &= \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1, \\ \tau_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где предусматривается перестановка индексов 1 и 2 (обозначаемая далее символом $1 \rightleftharpoons 2$), а $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ ($i=1, 2$) — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Связь между скоростями деформаций внешнего ε_i^+ , ε_{12}^+ и внутреннего ε_i^- , ε_{12}^- несущих слоев и скоростями деформаций и искривлений срединной поверхности определяется равенствами

$$\varepsilon_i^\pm = \varepsilon_i \pm H \kappa_i, \quad \varepsilon_{12}^\pm = \varepsilon_{12} \pm 2H \kappa_{12} \quad (i=1, 2) \quad (1.4)$$

где $2H = \text{const}$ толщина заполнителя. Условия пластичности в пространстве обобщенных напряжений записываются в виде двух уравнений

$$f^\pm = [b_{ij}(T_i H \pm M_i)(T_j H \pm M_j) + b_3(SH \pm K)^2] / (4\delta^2 H^2) = \sigma_0^2 \quad (1.5)$$

$(i, j=1, 2)$

где $\delta = \delta(\alpha_1, \alpha_2)$ искомая толщина несущих слоев, а обобщенные напряжения связаны с истинными напряжениями зависимостями:

$$\begin{aligned} T_i &= \delta(\sigma_i^+ + \sigma_i^-), \quad M_i = \delta H(\sigma_i^+ - \sigma_i^-) \\ S &= \delta(\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-), \quad K = \delta H(\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В ряде работ [10–12] используется только одно условие $F^+ = (f^+ + f^-)/2$ без учета ограничений, накладываемых на напряженно-деформированное состояние условием $F^- = (f^+ - f^-)/2$, что допустимо, вообще говоря, только для некоторых частных напряженных состояний, например, для безмоментного.

С помощью теоремы Эйлера об однородных функциях, ассоциированного закона пластического течения

$$\varepsilon_i^\pm = \lambda^\pm \partial f^\pm / \partial \sigma_i^\pm, \quad \varepsilon_{12}^\pm = \lambda^\pm \partial f^\pm / \partial \sigma_{12}^\pm \quad (1.7)$$

условий (1.5), (1.6) можно показать эквивалентность критерия постоянства скорости диссипации энергии [6] требованию

$$\lambda^+ + \lambda^- = \lambda_0 = \text{const} > 0 \quad (1.8)$$

После некоторых преобразований из (1.2)–(1.8) с учетом $1 + H/R_i \approx 1$ найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \gamma H \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{\lambda_0 A_1 (1 - \gamma^2)}{2\delta} b_{11} T_i - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 - \frac{A_1}{R_1} u_3 + \\ &+ \frac{\gamma H}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_2 \quad (1 \rightleftharpoons 2) \\ H \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} - \gamma \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{\lambda_0 A_1 (1 - \gamma^2)}{2\delta H} b_{11} M_i - \frac{H}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_1 + \\ &+ \frac{\gamma}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \gamma \frac{A_1}{R_1} u_3 \quad (1 \rightleftharpoons 2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} = A_1 (u_1/R_1 - \theta_1) \quad (1 \rightleftharpoons 2)$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\lambda_0 b_3}{2\delta H} (SH + \gamma K) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right)$$

$$\frac{H}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{H}{A_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\lambda_0 b_3}{2\delta H} (K + \gamma SH) + \frac{H}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 \right)$$

где введена новая неизвестная функция $\gamma = (\lambda^+ - \lambda^-) / \lambda_0$.

Отметим, что в предыдущих работах явно или неявно предполагалось, что $\gamma = 0$, т. е. считалось, что энергия деформирования внешнего и внутреннего несущего слоя одинакова. Во многих ситуациях это предположение приводит к сужению множества допустимых конструкций. Уравнения (1.1), (1.5), (1.9) образуют замкнутую дифференциально-алгебраическую систему 15 уравнений, описывающую множество проектов абсолютно минимального объема. Кроме того, искомые величины должны удовлетворять соответствующим граничным условиям [9]. Поиск решения задачи в сформулированной выше общей постановке является крайне сложной проблемой. Сложность заключается в том, что искомые функции должны удовлетворять не только дифференциальным уравнениям (1.1), (1.9) и граничным условиям, но и алгебраическим ограничениям (1.5). Такие задачи зачастую не могут быть решены численными методами, используемыми для решения дифференциальных уравнений [13, 14]. Тем не менее, оказывается возможным выделить достаточно широкие подмножества решений уравнений (1.1), (1.5), (1.9).

2. Множество проектов абсолютно минимального объема естественным образом разделяется на два класса [7]: безмоментные и моментные проекты. Известно, что безмоментное состояние является, как правило, наиболее выгодным режимом работы оболочечных конструкций. Обычно в безмоментной теории усилия определяются без учета требований неразрывности деформаций срединной поверхности, в результате последние оказываются нарушенными. Это обстоятельство приводит к понятию строго безмоментных оболочек [7], напряженно-деформированное состояние которых описывается уравнениями (1.1), (1.5), (1.9), где следует принять $M_i = Q_i = K = 0$. Методы построения решений статических уравнений достаточно полно освещены в литературе [9]. Условия (1.5) вырождаются в одно уравнение, которое служит для нахождения толщины несущего слоя. Кинематические же уравнения (1.9) образуют переопределенную подсистему, которая разрешима при выполнении некоторых условий на параметры, определяющие геометрию срединной поверхности и интенсивности поверхностных нагрузок. Поскольку поверхность, отнесенная к криволинейным координатам, в которых α_1 и α_2 — линии являются линиями кривизны, с точностью до положения в пространстве определяется четырьмя величинами A_i , R_i ($i=1, 2$), а последние в свою очередь связаны тремя соотношениями Коддаци — Гаусса [9], то мы можем рассматривать строго безмоментную оболочку как заданную с точностью до четырех величин: одного функционального параметра геометрии срединной поверхности и трех компонент поверхностных нагрузок q_k ($k=1, 2, 3$). Выведем условия, которым должны удовлетворять эти параметры, считая, что энергия деформирования несущих слоев одинакова, т. е. $\lambda^+ = \lambda^-$. В этом случае из (1.9) имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 - \frac{A_1}{R_1} u_3 + f_{11} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 + f_{12} \quad (1 \neq 2)$$

$$f_{11} = \frac{\lambda_0 A_1 b_{11} T_i}{2\delta}, \quad r = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

$$f_{12} = \frac{\lambda_0 b_{3r} A_2 S}{2\delta R_2} + \frac{r}{A_1} \frac{\partial (A_1 \theta_1)}{\partial \alpha_2} - \frac{r}{A_2} \frac{\partial (A_2 \theta_2)}{\partial \alpha_1} \quad (1 \neq 2) \quad (2.2)$$

Приравнивая смешанные производные $\partial^2 u_k / \partial \alpha_1 \partial \alpha_2$ и $\partial^2 u_k / \partial \alpha_2 \partial \alpha_1$ ($k=1, 2, 3$) и учитывая второе и пятое уравнения (1.9), получаем систему пяти уравнений относительно θ_1, θ_2 :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} = c_{31} \theta_2, \quad P_{41} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \alpha_1^2} + P_{51} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + P_{61} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} = c_{51} \theta_1 + c_{61} \theta_2 + c_{71} \quad (1 \neq 2) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
p_{31} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + p_{32} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} &= c_{41} \theta_1 + c_{42} \theta_2 \\
c_{31} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad c_{41} = -c_{31} p_{31}, \quad c_{51} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{r}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \\
c_{61} &= \frac{A_1 A_2}{R_1} - \frac{A_1 A_2}{R_1 + R_2} + \frac{r}{A_1 A_2} \left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)^2 \right] \\
c_{71} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\lambda_0 A_1 b_{1i} T_i}{2\delta} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\lambda_0 b_{2i} T_i}{2\delta} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\lambda_0 b_3 r A_2 S}{2\delta R_2} \right) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\lambda_0 b_3 r S}{2\delta R_1} \quad (2.4) \\
p_{31} &= A_1^{-1}, \quad p_{41} = -r A_2 A_1^{-1}, \quad p_{51} = \partial c_{41} / \partial \alpha_1 \\
p_{61} &= \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} - \frac{r}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \quad (1 \Leftrightarrow 2)
\end{aligned}$$

Продифференцируем по α_1 и α_2 третье уравнение системы (2.3) и исключим из полученных выражений $\partial^2 \theta_2 / \partial \alpha_1^2$, $\partial^2 \theta_1 / \partial \alpha_2^2$ с помощью четвертого и пятого уравнений (2.3) и $\partial^2 \theta_1 / \partial \alpha_1 \partial \alpha_2$, $\partial^2 \theta_2 / \partial \alpha_1 \partial \alpha_2$ с учетом первых двух уравнений (2.3). В результате будем иметь

$$a_{3k} \partial \theta_1 / \partial \alpha_2 + a_{4k} \partial \theta_2 / \partial \alpha_1 = a_{5k} \theta_1 + a_{6k} \theta_2 + a_{7k} \quad (k=1, 2, 3) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \partial p_{32} / \partial \alpha_1 - p_{31} p_{61} / p_{41}, \quad a_{41} = \partial p_{31} / \partial \alpha_1 - p_{31} p_{51} / p_{41} - c_{42} \\
a_{51} &= \partial c_{41} / \partial \alpha_1 - p_{31} c_{51} / p_{41} - c_{31} c_{32} c_{42} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$a_{61} = \partial c_{42} / \partial \alpha_1 + c_{31} c_{41} - p_{31} c_{61} / p_{41} - p_{32} \partial c_{31} / \partial \alpha_2$$

$$a_{71} = -p_{31} c_{71} / p_{41} \quad (1 \Leftrightarrow 2)$$

$$a_{33} = p_{32}, \quad a_{43} = p_{31}, \quad a_{52} = c_{41}, \quad a_{63} = c_{42}, \quad a_{73} = 0$$

Пусть

$$\delta_1 = a_{31} a_{42} - a_{32} a_{41} = -\frac{4}{r A_1 A_2} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \neq 0$$

Тогда из первых двух уравнений (2.5) найдем

$$\partial \theta_1 / \partial \alpha_2 = d_{11} \theta_1 + d_{12} \theta_2 + d_{13} \quad (2.7)$$

$$\partial \theta_2 / \partial \alpha_1 = d_{21} \theta_1 + d_{22} \theta_2 + d_{23}$$

$$d_{11} = \delta_1^{-1} (a_{51} a_{42} - a_{41} a_{52}), \quad d_{12} = \delta_1^{-1} (a_{61} a_{42} - a_{41} a_{62})$$

$$d_{13} = \delta_1^{-1} (a_{71} a_{42} - a_{41} a_{72}), \quad d_{21} = \delta_1^{-1} (a_{31} a_{52} - a_{32} a_{51})$$

$$d_{22} = \delta_1^{-1} (a_{31} a_{62} - a_{32} a_{61}), \quad d_{23} = \delta_1^{-1} (a_{31} a_{72} - a_{32} a_{71})$$

Из (2.3) с помощью (2.7) получаем систему трех линейных алгебраических уравнений относительно θ_1 , θ_2 :

$$A_{ij} \theta_j = d_i \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= p_{31} d_{21} + p_{32} d_{23} - c_{41}, \quad A_{12} = p_{31} d_{22} + p_{32} d_{12} - c_{42} \\
A_{13} &= -p_{31} d_{23} - p_{32} d_{13}, \quad A_{21} = p_{41} \partial d_{21} / \partial \alpha_1 + p_{41} d_{22} d_{21} + p_{51} d_{21} + p_{61} d_{11} - c_{51}, \\
A_{22} &= c_{31} p_{41} d_{21} + p_{41} \partial d_{12} / \partial \alpha_1 + p_{41} d_{22}^2 + p_{51} d_{22} + p_{61} d_{12} - c_{61}, \\
A_{23} &= c_{71} - p_{41} d_{22} d_{23} - p_{41} \partial d_{23} / \partial \alpha_1 - p_{51} d_{23} - p_{61} d_{13} \\
A_{31} &= p_{42} \partial d_{11} / \partial \alpha_2 + p_{42} d_{11}^2 + p_{52} d_{11} + p_{42} c_{32} d_{12} + p_{62} d_{21} - c_{62} \\
A_{32} &= p_{42} d_{11} d_{12} + p_{42} \partial d_{12} / \partial \alpha_2 + p_{52} d_{12} + p_{62} d_{22} - c_{52} \\
A_{33} &= c_{72} - p_{42} d_{11} d_{13} - p_{42} \partial d_{13} / \partial \alpha_2 - p_{52} d_{13} - p_{62} d_{23}
\end{aligned}$$

Если $\delta_1 = 0$, то выражения аналогичные (2.7) можно получить из уравнений (2.5); определители матриц коэффициентов при производных $\partial \theta_1 / \partial \alpha_2$, $\partial \theta_2 / \partial \alpha_1$ соответственно равны $\delta_2 = (2/r A_1 A_2) (\partial r / \partial \alpha_2)$, $\delta_3 = -(2/r A_1 A_2) (\partial r / \partial \alpha_1)$. После исключения $\partial \theta_i / \partial \alpha_j$ из оставшихся уравнений опять получим систему типа (2.8).

Таким образом, вопрос о разрешимости системы (2.3) сводится к вопросу о разрешимости системы (2.8), т. е. к требованию равенства рангов

матрицы системы и расширенной матрицы: $\text{rang } A = \text{rang}(A|d) = \rho$. Пусть $\rho = 2$; тогда

$$\sum_{k=1}^3 A_{k3} \Delta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \Delta_k^2 \neq 0 \quad (2.9)$$

где Δ_k — миноры второго порядка матрицы A . В этом случае из (2.8) найдем

$$\theta_m = \Delta_{km} \Delta_k^{-1} \text{ при } \Delta_k \neq 0 \quad (m=1, 2; k=1, 2, 3) \quad (2.10)$$

где Δ_{km} получаются из Δ_k заменой m -го столбца на d . Подставляя найденные θ_m в (2.3) и учитывая, что последние три уравнения (2.3) будут выполнены по построению (2.10) получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\Delta_{k1} \Delta_k^{-1}) = c_{31} \Delta_{k2} \Delta_k^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\Delta_{k2} \Delta_k^{-1}) = c_{32} \Delta_{k1} \Delta_k^{-1} \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.9), (2.11) определяет совокупность условий, которым должны удовлетворять параметры геометрии срединной поверхности и нагрузки, при выполнении которых в оболочке реализуется строго безмоментное состояние.

Если геометрия срединной поверхности такова, что $A_i = A_i(\alpha_i)$ ($i=1, 2$), то из (2.8) найдем

$$\theta_1 = - \left(2cA_1 \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} + f_1 \right) B_1^{-1}, \quad B_1 = A_1 A_2 [R_2^{-1} - (R_1 + R_2)^{-1}] \quad (1 \Rightarrow 2, c = \text{const})$$

$$f_1 = \frac{\lambda_0}{2} \left[A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{b_{2i} T_i}{\delta} \right) - b_3 A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{rS}{\delta R_1} \right) \right]$$

Условия (2.9), (2.11) являются в этом случае ограничениями на интенсивности поверхностных нагрузок и принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\left(2cA_2 \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} - f_2 \right) B_2^{-1} A_2 \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\left(2cA_1 \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} + f_1 \right) B_1^{-1} A_1 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\left(2cA_1 \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} + f_1 \right) B_1^{-1} A_2 \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\left(2cA_2 \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} - f_2 \right) B_2^{-1} A_1 \right] = 0$$

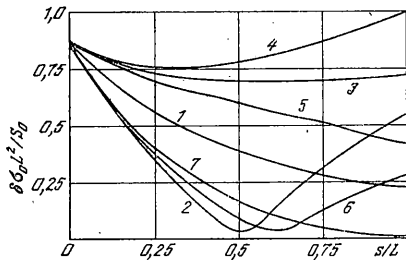
Для оболочек нулевой гауссовой кривизны при соответствующем выборе α_1 справедливы представления [9]: $A_1 = 1$, $R_1 = \infty$, $A_2 = A_2^\circ(\alpha_2) + \alpha_1 A_2^1(\alpha_2)$, $R_2 = R^\circ(\alpha_2) + \alpha_1 R^1(\alpha_2)$. Ограничения (2.9), (2.11) приводятся к виду

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} = -A_2^1 \theta_1, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2^\circ + \alpha_1 A_2^1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} = \frac{A_2^1 \theta_2}{A_2^\circ + \alpha_1 A_2^1}$$

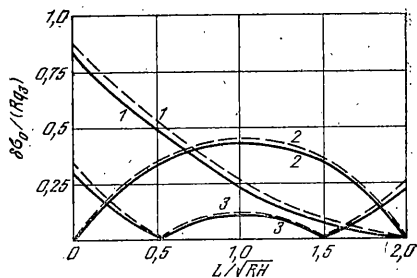
$$\theta_2 = \{ c [p_{51} - p_{61} (A_2^\circ + \alpha_1 A_2^1)] - c_{71} \} (c_{61} - A_2^1 p_{61})^{-1}$$

$$\theta_1 = \left\{ \left[p_{42} \frac{\partial A_2^1}{\partial \alpha_2} + p_{52} A_2^1 - c_{62} \right] \theta_2 + c \left[p_{62} - p_{42} \left(\frac{\partial A_2^\circ}{\partial \alpha_2} + \alpha_1 \frac{\partial A_2^1}{\partial \alpha_2} \right) - p_{52} (A_2^\circ + \alpha_1 A_2^1) - c_{72} \right] (c_{52} + [A_2^1]^2 p_{42})^{-1} \right\}$$

3. Достаточно широким классом оболочек, применяемых при разработке реальных конструкций, являются осесимметричные оболочки вращения. Уравнения, описывающие осесимметричные оболочки вращения абсолютно минимального объема, следуют из (1.1), (1.5), (1.9) при $\alpha_1 = s$, $\alpha_2 = \varphi$, $A_1 = 1$, $A_2 = v$, где s — длина дуги меридиана, φ — центральный угол в параллельном круге радиуса $v(s)$. Рассмотрим кручение осесимметричной оболочки. Из (1.5) имеем $b_3(SH \pm K)^2 = 4\sigma_0^2 \delta^2 H^2$, откуда следует $SK =$



Фиг. 1



Фиг. 2

=0. Пусть $K=0$, тогда из (1.1), (1.9) найдем

$$S = v^{-2} \left(S_0 - \int_{s_0}^s q_2(t) v^2(t) dt \right), \quad \delta = \frac{b_3^{1/2} |S|}{2\sigma_0} \quad (3.1)$$

$$\gamma = \frac{2H \sin \varphi}{v}, \quad u_3 = v \left(u_0 + b_3^{1/2} \sigma_0 \lambda_0 \operatorname{sign} S \int_{s_0}^s \frac{dt}{v(t)} \right)$$

Случай $S=0$ не реализуется, так как из (1.1), (1.9) следует $\gamma = R_2/2H$, но $|\gamma| < 1$, а для тонких оболочек $R_2 \gg 2H$. Рассмотрим для примера коническую оболочку $v = as + b$. Для толщины несущего слоя в этом случае из (3.1) найдем

$$\delta = \frac{b_3^{1/2}}{2\sigma_0 (as+b)^2} \left| S_0 - \int_{s_0}^s q_2(t) (at+b)^2 dt \right| \quad (3.2)$$

На фиг. 1 приведены характерные распределения толщины при $S_0 \neq 0$ для $q_2=0$ (кривая 1), $q_2=q_0$ (6), $q_2=-q_0$ (3), $q_2=q_0+q_1x$ (2), $q_2=-q_0-q_1x$ (4), $q_2=-q_0+q_1x$ (5), $q_2=q_0-q_1x$ (7), $q_0, q_1 = \text{const}$, $x=s/L$, $q_0=S_0L^{-3}$, $q_0=S_0L^{-4}$, L — длина оболочки.

Задача изгиба осесимметричных оболочек вращения сводится к решению граничной задачи вида

$$y'(s) = f(s, y(s), z(s)), \quad g(s, y(s), z(s)) = 0 \quad (3.3)$$

$$y = \|T_1, M_1, Q_1, u_1, u_3, \theta_1\|^T, \quad z = \|\gamma, \delta\|^T$$

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}^2, \quad A_1 y(s_1) + A_2 y(s_2) = b$$

$$f_1 = -(b_{12} + b_{22}) T_1 \cos \varphi / (b_{22}v) - Q_1/R_1 - q_1 + \quad (3.4)$$

$$+ 2\delta \cos \varphi [(u_1 - \gamma H \theta_1) \cos \varphi + u_3 \sin \varphi] / [(1 - \gamma^2) \lambda_0 b_{22} v^2]$$

$$f_2 = -(b_{12} + b_{22}) M_1 \cos \varphi / (b_{22}v) + Q_1 +$$

$$+ 2\delta H \cos \varphi [(H \theta_1 - \gamma u_1) \cos \varphi - \gamma u_3 \sin \varphi] / [(1 - \gamma^2) \lambda_0 b_{22} v^2]$$

$$f_3 = -Q_1 \cos \varphi / v + [R_1^{-1} - b_{12} \sin \varphi / (b_{22}v)] T_1 - q_3 +$$

$$+ 2\delta \sin \varphi [(u_1 - \gamma H \theta_1) \cos \varphi + u_3 \sin \varphi] / [(1 - \gamma^2) \lambda_0 b_{22} v^2]$$

$$f_4 = \Delta \lambda_0 (T_1 H + \gamma M_1) / (2b_{22} \delta H) + b_{12} u_1 \cos \varphi / (b_{22}v) +$$

$$+ [b_{12} \sin \varphi / (b_{22}v) - R_1^{-1}] u_3, \quad f_5 = u_1/R_1 - \theta_1$$

$$f_6 = \Delta \lambda_0 (M_1 + \gamma T_1 H) / (2b_{22} \delta H^2) + b_{12} \theta_1 \cos \varphi / (b_{22}v)$$

$$g_1 = \Delta T_1 M_1 + 4\delta^2 H [(u_1 - \gamma H \theta_1) \cos \varphi + u_3 \sin \varphi]$$

$$[(H \theta_1 - \gamma u_1) \cos \varphi - \gamma u_3 \sin \varphi] / [\lambda_0 v (1 - \gamma^2)]^2 \quad (3.5)$$

$$g_2 = \Delta (T_1^2 H^2 + M_1^2) + 4\delta^2 H^2 \{ [(u_1 - \gamma H \theta_1) \cos \varphi + u_3 \sin \varphi]^2 +$$

$$+ [(H \theta_1 - \gamma u_1) \cos \varphi - \gamma u_3 \sin \varphi]^2 \} / [\lambda_0 v (1 - \gamma^2)]^2 - 4b_{22} \sigma_0^2 H^2 \delta^2$$

Для численного решения задачи (3.3) были реализованы две методики. Одна основана на нахождении зависимости $z = z(y)$ в точках сетки $x = x_j$ и решении граничной задачи $y'(x) = f(x, y(x), z(y(x)))$, $A_1 y(x_1) + A_2 y(x_2) = b$. В другой методике задача (3.3) разделяется на две под-

задачи: при известном приближении $y^{(h)}, z^{(h)}$ к решению $y^{(h+1)}$ находится в результате решения граничной задачи $y'(x) = f(x, y(x), z^{(h)}(x))$, $A_1 y(x_1) + A_2 y(x_2) = b$, а $z^{(h+1)}$ как решение нелинейных уравнений $g(x, y^{(h)}(x), z(x)) = 0$. В качестве начального приближения в обоих случаях берется строго безмоментное решение. Расчеты показывают, что различие в результатах, полученных этими двумя способами, не превышает 10%, но второй способ экономичнее. Возникающие граничные задачи решаются методами разностной коррекции [15] и коллокации [16].

На практике задача оптимизаций часто связывается с задачей проектирования равнопрочных конструкций, при этом иногда утверждается эквивалентность равнопрочных и оптимальных по объему проектов. Поэтому представляет интерес сопоставление равнопрочных проектов и проектов абсолютно минимального объема. Под равнопрочным проектом мы будем понимать трехслойную оболочку, материал несущих слоев которой упругий, а напряжения в каждой точке меридиана удовлетворяют условиям

$$f^+(\sigma_{ij}) = \sigma_0^2, f^-(\sigma_{ij}) \leq \sigma_0^2 \text{ или } f^-(\sigma_{ij}) = \sigma_0^2, f^+(\sigma_{ij}) \leq \sigma_0^2 \quad (3.6)$$

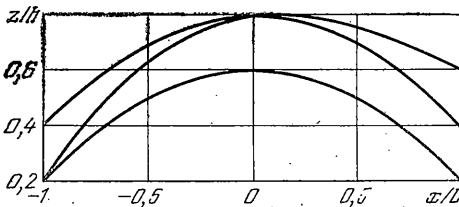
где f^\pm определяются соотношениями (1.5), (1.16). Задача расчета равнопрочных проектов приводится к виду (3.3), при этом в (3.4) следует положить $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$, $z = \delta$, $b_{ij} = A_{ij}/(2\lambda)$, где A_{ij} компоненты тензора упругих податливостей $\epsilon_i^\pm = A_{ij}\sigma_j^\pm$, при этом вместо (3.5) будем иметь ограничение (3.7):

$$\begin{aligned} A_1^\pm \delta^2 + A_2^\pm \delta + A_3^\pm &= 0 \\ A_1^\pm &= 4\{b_{22}H^2(A_{22}\nu)^{-2} [(u_1 \pm kH\theta_1) \cos \varphi + u_3 \sin \varphi]^2 - \\ &\quad - \sigma_0^2 H^2\}, A_2^\pm = 4(A_{22}\nu)^{-1} H(b_{12} - b_{22}A_{21}A_{22}^{-1})(T_1 H \pm \\ &\quad \pm kM_1) [(u_1 \pm kH\theta_1) \cos \varphi + u_3 \sin \varphi] \\ A_3^\pm &= (T_1 H \pm kM_1)^2 [b_{11} - 2b_{12}A_{21}A_{22}^{-1} + b_{22}A_{21}^2 A_{22}^{-2}] \quad (k = \pm 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

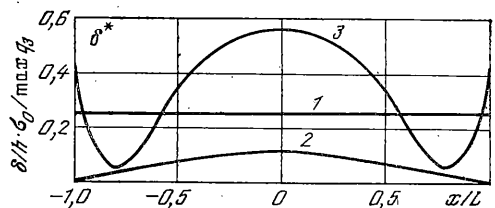
Таким образом, задача расчета равнопрочной трехслойной оболочки может быть решена тем же способом, что и задача расчета оболочек абсолютно минимального объема. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что объем равнопрочного проекта при фиксированных граничных условиях и поверхностных нагрузках не зависит от отношения E/σ_0 , E — модуль Юнга.

Расчеты, выполненные для случая изотропных материалов, показывают, что качественно распределение материала в несущих слоях равнопрочных оболочек подобно соответствующим распределениям для проектов абсолютно минимального объема. Однако при количественном сравнении объемов равнопрочных V_e и оптимальных V_0 оболочек оказывается, что $V_0/V_e < 1$, причем это отношение уменьшается как при фиксированной длине оболочек с уменьшением значения коэффициента Пуассона μ , так и при фиксированном μ с увеличением длины. При этом, если для $\mu = 0,5$ различие в объемах проектов лежит в пределах 5–9%, то для $\mu = 0,2$ оно достигает 25%. На фиг. 2 показаны проекты оптимальных (сплошная линия) и равнопрочных (пунктирная линия) конических оболочек для $\varphi = 45^\circ$ при следующих граничных условиях: $u_1(0) = u_3(0) = \theta_1(0) = T_1(l) = M_1(l) = Q_1(l) = 0$ (кривые 1); $u_3(x_k) = M_1(x_k) = T_1(x_k) = 0$, $x_k = 0, l$ (2); $u_1(x_k) = u_3(x_k) = \theta_1(x_k) = 0$, $x_k = 0, l$ (3), $l = L(RH)^{-1/2}$, $q_1 = 0$, $q_3 = \text{const}$, $R = \nu(0)$.

4. Другим широко используемым на практике конструктивным элементом является незамкнутая длинная цилиндрическая оболочка. Будем считать, что все поперечные сечения заданы в виде $x = x(t)$, $z = z(t)$, где t — длина дуги в поперечном сечении. Положив $\alpha_2 = t$, $A_1 = A_2 = 1$, $R_1 = \infty$



Фиг. 3



Фиг. 4

и учитывая независимость искомых величин от α_1 , из (1.1), (1.5), (1.9) получим уравнения, описывающие оптимальные незамкнутые цилиндрические оболочки. Окружное усилие T_2 определяется из уравнения

$$R_2 T_2^{\cdot\cdot} + R_2^{\cdot} T_2^{\cdot} - T_2/R_2 + q_2^{\cdot} R_2 + q_2 R_2^{\cdot} - q_3 = 0 \quad (4.1)$$

в котором точка обозначает дифференцирование по t . Далее последовательно находим

$$Q_2 = -R_2(q_2 + T_2^{\cdot}), \quad S = S_0 - \int_{t_0}^t q_1 dt, \quad M = M_2^{\circ} + \int_{t_0}^t Q_2 dt \quad (4.2)$$

$$K = -T_2 M_2 / (4S), \quad \gamma = -K / (SH), \quad Q_1 = K^{\cdot}$$

$$T_1 = -b_{12} T_2 / b_{11}, \quad M_1 = -b_{12} M_2 / b_{11}$$

Оптимальная толщина несущего слоя подсчитывается по формуле:

$$\delta = [b_{ij}(T_i T_j H^2 + M_i M_j) + b_3(S^2 H^2 + K^2)]^{1/2} / (2\sigma_0 H) \quad (4.3)$$

а поле скоростей удовлетворяет уравнениям:

$$u_2^{\cdot} = \Delta \lambda_0 (T_2 H + \gamma M_2) / (2b_{11} H \delta) - u_3 / R_2 \quad (4.4)$$

$$u_3^{\cdot} = u_2 / R_2 - \theta_2, \quad \theta_2^{\cdot} = \Delta \lambda_0 (M_2 + \gamma T_2 H) / (2b_{11} H^2 \delta)$$

Специального рассмотрения требует случай отсутствия сдвигающего усилия $S=0$. Из условий пластичности при $S=0$ с учетом (1.9) следует, что $T_2 M_2 = 0$. Пусть $T_2 = 0$, тогда будем иметь:

$$Q_2 = -q_2 R_2, \quad M_1 = -b_{12} M_2 / b_{11}, \quad K = T_1 = \gamma = 0,$$

$$M_2 = M_2^{\circ} - \int_{t_0}^t q_2 R_2 dt, \quad \delta = \frac{(b_{11} \Delta)^{1/2} |M_2|}{2\sigma_0 H} \quad (4.5)$$

а поле скоростей определяется из уравнений $u_2^{\cdot} = -u_3 R_2^{-1}$, $u_3^{\cdot} = u_2 R_2^{-1} - \theta_2$, $\theta_2^{\cdot} = \Delta \lambda_0 M_2 / (2b_{11} \delta H^2)$. Поскольку при $S=0$ разрешающая система оказывается переопределенной, то решение (4.5) реализуется в том случае, когда параметры нагрузки и геометрии сечения удовлетворяют условия

$$q_2 = q_2^{\cdot} R_2 + q_2 R_2^{\cdot} \quad (4.6)$$

Если $M_2 = 0$, то получим

$$M_1 = Q_2 = \gamma = 0, \quad T_2 = q_2 R_2, \quad \delta = (b_{11} \Delta)^{1/2} |T_2| / (2\sigma_0)$$

$$u_3^{\cdot} = u_2 R_2^{-1} - \theta_2, \quad u_2^{\cdot} = \Delta \lambda_0 T_2 / (2\delta b_{11}) - u_3 R_2^{-1}, \quad \theta_2^{\cdot} = 0$$

при этом решение (4.7), как следует из (2.9), (2.11), реализуется, если

$$q_2 = -q_3^{\cdot} R_2 - q_3 R_2^{\cdot} \quad (4.8)$$

Приведем два примера применения решений (4.5) — (4.8).

1. Пусть в сечении имеем дугу окружности $x(t) = R \sin(t/R)$, $z(t) = R \cos(t/R)$. Из (4.6) получаем $q_2 R = q_2 t + q^{\circ}$, а из (4.8): $q_3 R = -q_2 t + q^{\circ}$, $q^{\circ} = \text{const}$. Эти условия определяют в классе незамкнутых длинных круговых цилиндрических оболочек виды поверхностных нагрузок, при которых справедливы решения (4.5) и (4.7), соответственно. В частности, для внутреннего равномерно распределенного давления $q_2 = 0$, $q_3 = -q^{\circ} \neq 0$ выполняется условие (4.8) и имеет место (4.7), при этом $\delta = (b_{11} \Delta)^{1/2} |q^{\circ}| R / (2\sigma_0)$.

2. Рассмотрим задачу оптимизации объема материала несущих слоев подземного перекрытия. Здесь удобнее перейти от параметрического задания формы сечения к описанию в декартовых координатах, т. е. искать форму сечения в виде $z = z(x)$. Преобразование координат задается формулой $dt = (1 + z'^2)^{1/2} dx$, где $z' = dz/dx$, а компоненты нагрузки: $q_2 = \rho z'(z-h)(1+z'^2)^{-1/2}$; $q_3 = \rho(z-h)(1+z'^2)^{-1/2}$, где h — расстояние от поверхности до сечения $z=0$, ρ — безразмерная плотность материала породы. Подстановка этих выражений в (4.6) и (4.8) приводит к одному и тому же уравнению:

$$z''' = [(z-h)^{-1} + 3z''(1+z'^2)^{-1}] z' z'' \quad (4.9)$$

определяющему форму поперечного сечения. На фиг. 3 приведены решения уравнения (4.9), удовлетворяющие условиям $z(-L) = z_1$, $z(0) = z_2$, $z(L) = z_3$ (сечение, проходящее через три заданные точки). Возникающая трехточечная граничная задача решалась методом коллокации [16]. Отметим, что хотя форма срединной поверхности для слу-

чаев (4.5), (4.6) и (4.7), (4.8) получается одинаковой, распределение $\delta(x)$ разное. Если для решения (4.7), (4.8) толщина несущих слоев получается мало отличающейся от постоянной: $(\delta_{\max} - \delta_{\min})/\delta_{\max} \approx 3-5\%$, то для решения (4.5), (4.6) она существенно переменна. Распределение толщин показано на фиг. 4 для перекрытия, проходящего через точки $(-1, 0.2)$, $(0, 0.6)$, $(1, 0.2)$ (см. фиг. 3). Кривая 1 на фиг. 4 (по вертикали отложена величина $\delta^* = \delta\sigma_0/(h \max q_3)$) соответствует решению (4.7), (4.8), остальные кривые — решению (4.5), (4.6), при этом $M_2^* = 0$ для кривой 2 и $M_2^* = 0,1\sigma_0HR$ для кривой 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В. В.* Оптимальное проектирование пластинок и оболочек // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 722—735.
2. *Немировский Ю. В.* Устойчивость и выпучивание конструктивно анизотропных и неоднородных оболочек и пластин // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1976. Т. 9. С. 5—155.
3. *Рейтман М. И., Шаниро Г. С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М.: Наука, 1976. 266 с.
4. *Баничук Н. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
5. *Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И.* Расчет трехслойных конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 303 с.
6. *Shield R. T.* On the optimum desing of shells // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1960. V. 27. N 2. P. 316—322.
7. *Немировский Ю. В.* Оболочки абсолютно минимального веса // Механика деформируемых сред. Куйбышев: Куйбышев. ун-т, 1978. Вып. 3. С. 3—78.
8. *Микеладзе М. Ш.* Введение в техническую теорию идеально-пластичных тонких оболочек. Тбилиси: Мецниереба, 1969. 182 с.
9. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
10. *Пунгар Э. Т.* Оптимальное проектирование оболочек вращения с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина // Учен. зап. Тарт. ун-та, 1974. Вып. 342. С. 295—302.
11. *Ваништейн А. В., Листрова Ю. П.* К оптимальному проектированию составных конструкций на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина // Тр. НИИ математики Воронеж. ун-та, 1975. Вып. 18. С. 52—55.
12. *Фрайберггер В.* О проектировании цилиндрических слоистых оболочек минимального веса // Период сб. перев. иностр. статей. Механика. 1958. № 3. С. 91—94.
13. *Petzold L. R.* Differential-algebraic equations are not ODE's // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1982. V. 3. N 3. P. 367—384.
14. *Gear C. W., Petzold L. R.* ODE methods for the solution differential-algebraic systems // SIAM J. Numer. Analysis. 1984. V. 21. N 4. P. 716—728.
15. *Lentini M., Pereyra V.* An adaptive finite difference solver for nonlinear two-point boundary problems with mild boundary layers // SIAM J. Numer. Analysis. 1977. V. 14. N 1. P. 91—111.
16. *Ascher U., Christiansen J., Russell R. D.* A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems // Math. Comput. 1979. V. 33, N 146. P. 659—679.

Новосибирск

Поступила в редакцию
10.X.1986