

УДК 539.375

КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ  
С РАДИАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ,  
ОТХОДЯЩИМИ ОТ ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

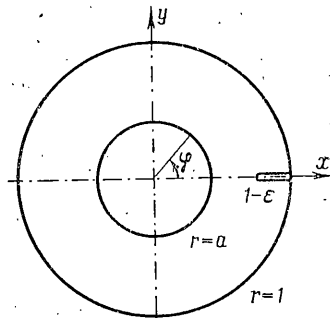
ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ А. С., СУСЛОВА И. Б.

Задача кручения круглой трубы с радиальной трещиной, отходящей от внешней поверхности, сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно вспомогательной функции, через которую все искомые функции выражаются однократными интегралами. Показано, что для широкого диапазона значений геометрических параметров задачи соответствующий интегральный оператор является оператором сжатия. В случае короткой трещины построено решение интегрального уравнения в виде ряда по целым степеням параметра, представляющего безразмерную длину трещины. Задача о кручении трубы с произвольным числом внешних радиальных трещин сведена к системе интегральных уравнений того же типа.

1. Рассмотрим задачу кручения цилиндрической трубы с одной радиальной трещиной, отходящей от наружной поверхности. Поперечное сечение трубы изображено на фиг. 1. Если обозначить через  $b$  радиус внешнего контура и нормировать относительно него все размеры, то постановка соответствующей задачи кручения в полярных координатах  $r, \varphi$  примет вид [1, 2]:

$$u = -2, \quad a < r < 1, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad \varphi \neq 0; \\ a < r < 1 - \varepsilon, \quad \varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=a} = U; \quad u|_{\varphi=0} = 0, \\ 1 - \varepsilon < r < 1 \quad (1.2)$$



Здесь  $u(r, \varphi)$  — безразмерная (отнесенная к  $b^2$ ) функция Прандтля,  $a, \varepsilon$  — безразмерные радиус внутреннего контура и длина трещины. Постоянное контурное значение  $U = \text{const}$  функции Прандтля при  $r = a$  обусловлено неодносвязностью области и определяется с помощью теоремы Бредта [1, 2], которая в данном случае выражается равенством

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} a d\varphi = -2\pi a \quad (1.3)$$

На функцию  $u$  накладывается также требование конечности энергии. Обобщая предложенный в [3] метод сингулярного потенциала<sup>1</sup> ищем решение задачи (1.1) — (1.3) в форме

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2}(1 - r^2) + A \frac{\ln r}{\ln a} + \int_{1-\varepsilon}^1 p(t) V(r, \varphi, t, \varepsilon) dt \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> См. также: Зильберглейт А. С., Суслова И. Б. Препринт № 805. Л.: Физико-технический ин-т им. А. Ф. Иоффе АН СССР. 1983. 44 с.

$$\begin{aligned} V(r, \varphi, t, \varepsilon) &= V_0(r, \varphi, t, \varepsilon) + V_1(r, \varphi, t, \varepsilon) \\ V_0(r, \varphi, t, \varepsilon) &= \operatorname{Re} [\zeta(z, t, \varepsilon) - \zeta(\bar{z}^{-1}, t, \varepsilon)] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} V_1(r, \varphi, t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} [\zeta(a^{2n}z, t, \varepsilon) - \zeta(a^{2n}\bar{z}^{-1}, t, \varepsilon) + \zeta(a^{-2n}z, t, \varepsilon) - \\ &\quad - \zeta(a^{-2n}\bar{z}^{-1}, t, \varepsilon)] \\ \zeta(z, t, \varepsilon) &= [(1-\varepsilon-z)/(1-tz)]^{1/2}, \quad z=re^{i\varphi} \end{aligned}$$

В (1.4)  $A$  — неизвестная постоянная,  $p(t) \in C[1-\varepsilon, 1]$  — искомая вещественная функция,  $V(r, \varphi, t, \varepsilon)$  — ядро гармонического сингулярного потенциала, описывающего вклад трещины в решение,  $\bar{z}$  — комплексно-сопряженное к  $z$  число. Как видно из (1.5),  $V$  состоит из основной сингулярной части  $V_0$ , совпадающей с ядром потенциала из [3], и добавки  $V_1$ , полученной путем последовательного отражения  $V_0$  относительно окружностей  $r=a$  и  $r=1$ . В силу этого (1.4) удовлетворяет уравнению (1.1) и первому граничному условию (1.2).

Чтобы удовлетворить второму условию (1.2) и (1.3), следует принять во внимание соотношения

$$V|_{r=a} = (1-\varepsilon)^{1/2} - t^{-1/2}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=a} d\varphi = 0 \quad (1.6)$$

которые проще всего установить разложив гармоническую функцию  $V(r, \varphi, t, \varepsilon)$  в ряд Фурье по  $\varphi$ . Последнее достигается путем разложения каждого из слагаемых в (1.5) в ряды по степеням  $z$  или  $\bar{z}^{-1}$  с помощью формулы

$$\left( \frac{1-\xi}{1-\theta\xi} \right)^{\kappa} = 1 - \kappa(1-\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m F(-m+1, \kappa+1, 2, 1-\theta), \quad |\xi| < 1, \quad |\theta| < 1$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — гипергеометрическая функция (используется  $\kappa = \pm 0,5$ ). Эта формула следует как предельный случай из одного известного разложения по гипергеометрическим полиномам [4].

Итак, подставляя (1.4) во второе условие (1.2) и (1.3), с учетом (1.6) находим

$$A=0, \quad U = 1/2(1-a^2) + \int_{1-\varepsilon}^1 p(t) [(1-\varepsilon)^{1/2} - t^{-1/2}] dt \quad (1.7)$$

и окончательное представление функции Прандтля принимает вид ( $u_0$  — функция Прандтля в отсутствие трещины):

$$u(r, \varphi) = 1/2(1-r^2) + \int_{1-\varepsilon}^1 p(t) V(r, \varphi, t, \varepsilon) dt = u_0(r) + u_1(r, \varphi) \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) удовлетворяет (1.1), второму из условий (1.2), (1.3); конечность энергии в окрестности вершины трещины будет установлена далее непосредственно. Таким образом, остается потребовать выполнения третьего граничного условия (1.2), которое должно определить функцию  $p(t)$ .

2. Подстановка (1.8) в третье условие (1.2) приводит к равенству

$$\int_r^1 \frac{p(t) dt}{(t-r)^{1/2}} = \frac{1-r^2}{2(1-(1-\varepsilon)r)^{1/2}} + \int_{1-\varepsilon}^1 p(s) \frac{V_1(r, 0, s, \varepsilon) ds}{(1-(1-\varepsilon)r)^{1/2}}$$

в котором учтено поведение функции  $V_0(r, \varphi, \varepsilon)$  на разрезе  $\varphi=0$ ,  $1-\varepsilon < r < 1$ . Обращая стоящее слева преобразование Абеля, приходим к инте-

гральному уравнению Фредгольма второго рода относительно  $p(t)$ :

$$p(t) = f(t) + \int_{1-\varepsilon}^1 p(s) L(s, t) ds \quad (1-\varepsilon < t < 1) \quad (2.1)$$

$$L(s, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{V_1(r, 0, s, \varepsilon) dr}{[(r-t)(1-(1-\varepsilon)r)]^{1/2}} \quad (2.2)$$

$$f(t) = (4\pi)^{-1} \{ [1+3(1-\varepsilon)t] (1-\varepsilon)^{1/2} \operatorname{arctg} [(1-\varepsilon)(1-t)/\varepsilon]^{1/2} + \varepsilon^{1/2}(1-t)^{1/2} [1-2\varepsilon+3(1-\varepsilon)t] (1-\varepsilon)^{-1} [1-(1-\varepsilon)t]^{-1} \} \quad (2.3)$$

Ядро  $L(s, t)$  этого уравнения непрерывно и может быть выражено через эллиптические интегралы.

После выполнения интегрирования по частям и дифференцирования по  $t$  выражение (2.2) может быть переписано в форме

$$L(s, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-(1-\varepsilon)s}{1-(1-\varepsilon)t} \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} [S(s, t, \varepsilon, a^{2n}) + T(s, t, \varepsilon, a^{2n}) + \quad (2.4)$$

$$+ a^{-4n} S(s, t, \varepsilon, a^{-2n}) + a^{-4n} T(s, t, \varepsilon, a^{-2n})]$$

$$S(s, t, \varepsilon, \lambda) = \int_t^1 \left( \frac{1-(1-\varepsilon)r}{1-\varepsilon-\lambda r} \right)^{1/2} \frac{dr}{[(1-\lambda sr)^3 (r-t)]^{1/2}}$$

$$T(s, t, \varepsilon, \lambda) = \int_t^1 \left( \frac{1-(1-\varepsilon)r}{(1-\varepsilon)r-\lambda} \right)^{1/2} \frac{dr}{[(r-\lambda s)^3 (r-t)]^{1/2}}$$

Отсюда следует

$$L(s, t) > 0, \quad 1-\varepsilon \leq s \leq 1, \quad 1-\varepsilon \leq t \leq 1, \quad L(s, 1) = 0 \quad (2.5)$$

Интегральный оператор  $L^\wedge: C([1-\varepsilon, 1]) \rightarrow C([1-\varepsilon, 1])$ , стоящий в правой части (2.1), допускает следующую оценку нормы, вытекающую из (2.4):

$$\|L^\wedge\| = \max_{t \in [1-\varepsilon, 1]} \int_{1-\varepsilon}^1 L(s, t) ds < L_0(\varepsilon, a) \quad (2.6)$$

$$L_0(\varepsilon, a) = 2a^2 \varepsilon^{1/2} l_1^{-1} [(l_1^{-1} l_2^{-1/2} + l_2^{-1} l_3^{-1/2}) (l_1^{1/2} + l_4^{1/2})^{-1} + (l_3^{-1} (1-\varepsilon)^{-1/2} l_1^{-1/2} + l_2^{-1} l_4^{-1/2}) (l_1^{1/2} + l_2^{1/2})^{-1}]$$

$$l_1 = 1-a^2, \quad l_2 = 1-\varepsilon-a^2, \quad l_3 = (1-\varepsilon)^2-a^2, \quad l_4 = 1-(1-\varepsilon)a^2$$

Вычисления величины  $L_0(\varepsilon, a)$  во всем диапазоне изменения геометрических параметров задачи ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ,  $0 \leq a < 1-\varepsilon$ ) показали, что область, в которой  $L_0 < 1$ , составляет более 80% площади треугольника, в котором лежат допустимые значения параметров (оставшаяся часть может быть уменьшена за счет улучшения оценки (2.6)). Таким образом, для большинства значений  $\varepsilon$  и  $a$ , за исключением, может быть, случая очень длинных  $\varepsilon \rightarrow 1-a$  трещин,  $L^\wedge$  является оператором сжатия, и уравнение (2.1) имеет единственное непрерывное на  $[1-\varepsilon, 1]$  решение  $p(t)$ . Из (2.1), (2.3)–(2.5) нетрудно вывести и существование непрерывной производной  $p'(t)$ , а также равенство  $p(1) = 0$ .

Однозначная разрешимость (2.1) гарантирована, в частности, при любом фиксированном  $a$  и достаточно малых значениях  $\varepsilon \rightarrow +0$ , что отвечает особенно интересному для приложений случаю трещины малой длины. Решение (2.1) удобно строить при этом в так называемых погранслойных переменных  $\sigma = (1-s)\varepsilon^{-1}$ ,  $\tau = (1-t)\varepsilon^{-1}$ . Полагая  $p(t) = q(\tau) = q(\tau, \varepsilon, a)$ ,  $L(s, t) = \varepsilon \Lambda(\sigma, \tau) = \varepsilon \Lambda(\sigma, \tau, \varepsilon, a)$ ,  $f(t) = F(\tau) = F(\tau, \varepsilon)$ , перепишем (2.1)

в виде

$$q(\tau) = F(\tau) + \varepsilon^2 \int_0^1 q(\sigma) \Lambda(\sigma, \tau) d\sigma, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (2.7)$$

Ядро  $\Lambda(\sigma, \tau, \varepsilon, a)$  можно представить рядом по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :  $\Lambda(\sigma, \tau, \varepsilon, a) = \sum \Lambda_j(\sigma, \tau, a) \varepsilon^j$  ( $j=1, \dots, \infty$ ) сходящимся при любом  $a \in [0, 1-\varepsilon)$ , равномерно по  $\sigma, \tau \in [0, 1]$ . Коэффициенты  $\Lambda_j$  являются гладкими функциями  $\sigma$  и  $\tau$  в указанной области; явное выражение первого из них имеет вид (сумма ряда приведена в [5]):

$$\Lambda_0(\sigma, \tau, a) = \Delta(a) [\tau^{1/2}(1+\tau)^{-1} + \operatorname{arctg} \tau^{1/2}] / 2\pi \quad (2.8)$$

$$\Delta(a) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(1-a^{2n})^2} = \frac{1}{6} + \frac{2(2-k^2)}{3\pi} K^2(k) - \frac{2}{\pi} K(k)E(k)$$

Здесь  $K(k)$ ,  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, причем их аргумент  $k=k(a)$  связан с параметром  $a$  следующим образом [6]:

$$a^2 = \exp[-\pi K(k')/K(k)] \quad (k' = 1-k) \quad (2.9)$$

$$\ln k = \ln 4\sqrt{a} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n(1+a^n)}$$

Разложение свободного члена  $F(\tau, \varepsilon)$  было найдено в общем виде в [3]; явные выражения трех первых коэффициентов, необходимые для дальнейших вычислений, таковы:

$$F_0(\tau) = [\tau^{1/2}/(1+\tau) + \operatorname{arctg} \tau^{1/2}] / \pi \quad (2.10)$$

$$F_1(\tau) = (4\pi)^{-1} [3(1-\tau) \operatorname{arctg} \tau^{1/2} - \tau^{1/2}(3+2\tau+3\tau^2)(1+\tau)^{-2}]$$

$$F_2(\tau) = (4\pi)^{-1} [3/2(2-\tau) \operatorname{arctg} \tau^{1/2} - 1/2\tau^{1/2}(6+13\tau+2\tau^2+3\tau^3)(1+\tau)^{-3}]$$

Теперь решение уравнения (2.7) при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  можно также представить степенным рядом (см., например, [7]), сходящимся равномерно по  $\tau \in [0, 1]$  при любом  $a \in [0, 1-\varepsilon]$ :

$$q(\tau, \varepsilon, a) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau, a) \varepsilon^n, \quad q_0(\tau, a) = F_0(\tau), \quad q_1(\tau, a) = F_1(\tau) \quad (2.11)$$

$$q_m(\tau, a) = F_m(\tau) + \sum_{n=0}^{m-2} \int_0^1 \Lambda_n(\sigma, \tau) q_{m-n-2}(\sigma) d\sigma$$

3. Получим выражения для крутильной жесткости трубы и коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины через функцию  $p(t) = q(\tau)$ . Жесткость  $C$  определяется формулой [1, 2] ( $G$  — модуль сдвига):

$$C = 2Gb^4 \left[ \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) r dr d\varphi + \pi a^2 U \right] \quad (3.1)$$

Преобразуем это с помощью формулы Грина, применив ее к паре функций  $u(r, \varphi)$ ,  $u_0(r)$  (см. (1.18)). Учитывая, что  $\Delta u_0 = -2$ ,  $u_0(1) = 0$ , а  $u(r, \varphi)$  удовлетворяет (1.1), (1.2), а также принимая во внимание (1.7) и (1.8), приходим к равенству

$$-2 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) r dr d\varphi + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2) r dr d\varphi = - \int_{-\pi}^{\pi} U u_0'(a) a d\varphi +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} u_0(a) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} a d\varphi - 2 \int_{1-\varepsilon}^1 u_0 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0+} dr$$

Выражая отсюда стоящий в (3.1) интеграл и преобразуя полученное с учетом (1.8) и свойств ядер  $V_0$  и  $V_1$  из (1.5), имеем

$$C = C_0 \left[ 1 - a^4 - \frac{2}{\pi} \int_{1-\varepsilon}^1 (1-r^2) dr \operatorname{Re} \int_{1-\varepsilon}^1 p(t) \frac{1}{r} \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0+} dt \right] \quad (3.2)$$

где  $C_0 = \frac{1}{2} \pi G b^4$  — крутильная жесткость круглого стержня,  $C^0 = (1-a^4)C_0$  — жесткость круглой трубы без трещины. После вычисления квадратур и перехода к переменной  $\tau$  из (2.7) получаем формулу для жесткости цилиндрической трубы с трещиной

$$C = C_0 \left[ 1 - a^4 - \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_0^1 q(\tau, \varepsilon, a) X(\tau, \varepsilon) d\tau \right] \quad (3.3)$$

$$X(\tau, \varepsilon) = \tau^{1/2} \left\{ [4 - (5+3\tau)\varepsilon + 3\varepsilon^2\tau] (1-\varepsilon)^{-1} - [4 + (1-\tau)\varepsilon - \varepsilon^2\tau] (1-\varepsilon\tau)^{-2} + (1+\tau-\varepsilon\tau) [4 - 3(1+\tau)\varepsilon + 3\varepsilon^2\tau] (1-\varepsilon)^{-3/2} \operatorname{arctg} [(1-\varepsilon)^{1/2}\tau^{1/2}] + [4 - (1+\tau)\varepsilon + \varepsilon^2\tau] (1-\varepsilon\tau)^{-3/2} \operatorname{arctg} [(1-\varepsilon\tau)^{1/2}\tau^{1/2}] \right\}$$

Коэффициент интенсивности напряжений  $K_{III}$  в вершине трещины определяется через функцию Прандтля  $u$  по формуле [3, 8]:

$$K_{III} = K_0 \lim_{r=(1-\varepsilon)+0} [r - (1-\varepsilon)]^{1/2} r^{-1} (\partial u / \partial \varphi) \Big|_{\varphi=0+} \quad (3.4)$$

$K_0 = (2\pi b^3)^{1/2} G C_0^{-1} M$ ,  $M$  — крутящий момент. Отсюда следует выражение

$$K_{III} = \frac{C_0}{C} K_0 \sqrt{\varepsilon} \left[ q(1) \sqrt{2-\varepsilon} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{q(\tau) d\tau}{(1+\tau-\varepsilon\tau)^{1/2}} \right] \quad (3.5)$$

Равенства (3.4) и (3.5) показывают, что построенное решение обладает нужным поведением в окрестности вершины трещины, т. е. удовлетворяет условию конечности энергии.

4. Рассмотрим вновь случаи короткой трещины  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Подставляя разложение (2.11) в (3.3), приходим к асимптотической формуле для жесткости трубы с трещиной малой длины

$$C = C_0 \left\{ 1 - a^4 - \varepsilon^2 + \left( \frac{16}{3}\pi - 1 \right) \varepsilon^3 - \pi^{-2} \left[ \frac{15}{8} - 8(\pi-1)\pi^{-2} + \frac{1}{4}\Delta(a) \right] \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \right\} = C^0 - C_0 \varepsilon^2 \left\{ 1 - \left( \frac{16}{3}\pi - 1 \right) \varepsilon + \varepsilon^2 \left[ \frac{15}{8} - 8(\pi-1)\pi^{-2} + \frac{1}{4}\Delta(a) \right] + O(\varepsilon^3) \right\} \quad (4.1)$$

причем  $\Delta(a)$  берется из (2.8), (2.9), а  $C^0 = C_0(1-a^4)$  — жесткость трубы без трещины. Для коэффициента интенсивности из (3.5), (2.11) следует

$$K_{III}(\varepsilon, a) = (C_0/C) K_0 (\varepsilon/2)^{1/2} \left\{ 1 - \varepsilon \kappa_1 + \varepsilon^2 \left[ \kappa_2 + \frac{1}{4}\Delta(a) \right] + O(\varepsilon^3) \right\} = K_0 (\varepsilon/2)^{1/2} (1-a^4)^{-1} \left\{ 1 - \varepsilon \kappa_1 + \varepsilon^2 \left[ (1-a^4)^{-1} + \kappa_2 + \frac{1}{4}\Delta(a) \right] + O(\varepsilon^3) \right\} \quad (4.2)$$

$$\kappa_1 = (4\pi)^{-1} (16 - 3\pi), \quad \kappa_2 = (32\pi)^{-1} (51\pi - 160)$$

Формулы (4.1), (4.2) справедливы при любом  $a$  ( $0 \leq a \leq a_0 < 1 - \varepsilon$ ),  $\varepsilon \rightarrow +0$ , при  $a=0$  (стержень круглого сечения) они совпадают с выражениями [3]. Первая поправка к жесткости имеет порядок квадрата длины трещины, как и в случае односвязного сечения [3, 9]; такой же результат справедлив и для стержней с малыми гладкими выточками [1].

Влияние границы  $r=a$  в разложении для жесткости (4.1) сказывается лишь в слагаемом порядка  $\varepsilon^4$ , т. е. является слабым. Напротив, коэффициент интенсивности существенно зависит от  $a$  уже в главном слагаемом

и резко растет с возрастанием  $a$ , т. е. с уменьшением толщины стенки трубы. Особый интерес представляют прочностные характеристики тонкостенной трубы с трещиной при фиксированном отношении длины трещины к толщине трубы, т. е. в случае  $a=1-h$ ,  $\varepsilon=\mu h$ ,  $0<\mu<1$ ,  $h\rightarrow+0$ . Анализ полных разложений (4.1), (4.2) позволяет утверждать, что для жесткости тонкостенной трубы с трещиной сохраняется известная формула Бредта [1]:  $C=C_0[4h+O(h^2)]$ ,  $h\rightarrow+0$ , поправка в которой зависит от  $\mu$ , т. е. от длины трещины. В соответствии с этим коэффициент интенсивности есть  $K_{III}=\frac{1}{4}K_0[\mu/(2h)]^{1/2}[1+O(h)]$ ,  $h\rightarrow+0$ . Его величина растет обратно пропорционально квадратному корню из толщины стенки.

5. Остановимся кратко на задаче кручения трубы с произвольным числом  $N$  внешних радиальных приповерхностных трещин. Обобщение предложенной выше методики на этот случай производится в [3] для сплошного круглого стержня с радиальными трещинами.

Пусть трещины располагаются по радиусам  $\varphi=\alpha_n$ ,  $-\pi<\alpha_1<\dots<\alpha_N\leq\pi$  и имеют безразмерные длины  $\varepsilon_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ). Представление функции Прандтля, обобщающее (1.8), имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2}(1-r^2) + \sum_{n=1}^N \int_{1-\varepsilon_n}^1 p_n(t) V(r, \varphi - \alpha_n, t, \varepsilon_n) dt \quad (5.1)$$

где  $V$  определяется согласно (1.5). Удовлетворение граничных условий на трещинах приводит к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций  $p_n(t)$  (см. (2.3), (2.4)):

$$p_m(t) = f_m(t) + \int_{1-\varepsilon_m}^1 p_m(s) L_m(s, t) ds + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \int_{1-\varepsilon_n}^1 p_n(s) L_{mn}(s, t) ds \quad (0 \leq t \leq 1 - \varepsilon_m) \quad (5.2)$$

$$f_m(t) = f(t, \varepsilon_m, a), \quad L_m(s, t) = L(s, t, \varepsilon_m, a)$$

$$L_{mn}(s, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{V(r, \alpha_m - \alpha_n, s, \varepsilon_n) dr}{\sqrt{1 - (1 - \varepsilon_m)r} \sqrt{r - t}}$$

Выражение крутильной жесткости  $C_N$  и коэффициента интенсивности напряжений  $K_{III}^{(m)}$  в вершине  $m$ -трещины будет ( $q_n(\tau) = p_n(t)$ ,  $\tau = \varepsilon_n^{-1}(1-t)$ ,  $X(\tau, \varepsilon)$  дано в (3.3)):

$$C_N = C_0 \left[ 1 - a^4 - \sum_{n=1}^N \pi^{-1} \varepsilon_n^2 \int_0^1 q_n(\tau) X(\tau, \varepsilon_n) d\tau \right] \quad (5.3)$$

$$K_{III}^{(m)} = C_0 / C_N K_0 \varepsilon_m^{1/2} \left[ q_m(1) \sqrt{2 - \varepsilon_m} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{a_m(\tau) d\tau}{(1 + \tau - \varepsilon_m \tau)^{1/2}} \right]$$

В случае коротких трещин, когда  $\varepsilon_n = \mu_n \varepsilon$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,  $\alpha_n, \mu_n$  фиксированы ( $n=1, 2, \dots, N$ ), система (5.2) имеет единственное решение, которое можно эффективно построить в виде степенного ряда по  $\varepsilon$ , подобного (2.11). После этого на основании (5.3) несложно получить аналоги асимптотических формул (4.1) и (4.2) для  $C_N, K_{III}^{(m)}$ :

$$C_N = C_0 \left[ 1 - a^4 - \sum_{n=1}^N \varepsilon_n^2 + O(\varepsilon_n^3) \right] \quad (5.4)$$

$$K_{III}^{(m)} = C_0 / C_N K_0 (\varepsilon/2)^{1/2} \left\{ 1 - \chi_1 \varepsilon_m + \frac{1}{4} \Delta(a) \varepsilon_m^2 + \dots \right\} \quad (5.5)$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \varepsilon_n^2 [\Delta_{mn}(a) - \sec^2(\alpha_m/2 - \alpha_n/2)] \}$$

$$\Delta_{mn}(a) = 4 \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a^{2h} \exp i(\alpha_m - \alpha_n)}{[1 - a^{2h} \exp i(\alpha_m - \alpha_n)]^2}$$

$\kappa_1, \kappa_2, \Delta(a)$  совпадают с соответствующими величинами из (4.2). Формулы (5.4) и (5.5) показывают, что выводы относительно взаимного влияния трещин, сделанные в [3] для сплошного круглого стержня, сохраняют свою силу и здесь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
3. Зильбергейт А. С., Сулова И. Б. Кручение упругого стержня круглого сечения, ослабленного произвольным числом радиальных трещин, выходящих на поверхность. // Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1983. Т. 271. № 2. С. 319–323.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
6. Jacobi C. G. J. Gesammelte Werke. Bd. 1. В.: Verlag von G. Reimer. 1881. 546 p.
7. Seely R. T. Integral equations depending analitically on parameter // Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetensch. Ser. A. 1962. V. 65. No. 4. P. 434–442.
8. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
9. Wigglesworth L. A. Flexure and torsion of a circular shaft with two cracks // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1940. V. 47. Pt. 1. P. 20–37.

Ленинград

Поступила в редакцию  
22.V.1986