МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1988

УДК 531.39

# ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

БАШИРОВ Р. Х., ТКАЧУК В. И.

Рассматривается задача управления ориентацией тонкого нерастяжимого стержня. Найдено распределение момента сил вдоль стержня, необходимое для осуществления режима, когда угловые скорости вращения совпадают с заданными, а деформации отсутствуют. Для случая большого числа расположенных на стержне невесомых точечных моментных исполнительных органов найдено приближенное решение для компонент смещения упругой линии.

1. Введем систему координат $O_*\xi_1\xi_2\xi_3$, связанную с плоскостью орбиты и ее перигеем, с центром $O_*$ в фокусе орбиты (эту систему можно считать инерциальной). Обозначим $\mathbf{R}_*$ — радиус-вектор элемента массы стрежня $dm_c$ относительно $O_*$; $\mathbf{R}$ — радиус-вектор того же элемента относительно центра масс $O$; $\mathbf{R}_0$ — вектор, определяющий положение $O$ в $O_*\xi_1\xi_2\xi_3$ (фиг. 1). Согласно принятым обозначениям, имеем (интегрирование по объему всего стержня):

$$\mathbf{D}=\int \mathbf{R}\, dm_c=0 \tag{1.1}$$

что означает равенство нулю вектора центра масс $\mathbf{D}$ относительно $O$ в любой момент времени. Обозначив $\mathbf{L}$ радиус-вектор частицы недеформированного стержня, представим $\mathbf{R}$ в виде суммы:

$$\mathbf{R}=\mathbf{L}+\mathbf{U} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{U}$ — вектор упругого смещения точек относительно положения в недеформированном стержне. Неоднозначность представления (1.2) устраним потребовав выполнения условий $\int \mathbf{U} dm_c=0$, из которых следует на основании (1.1) и (1.2), что центр масс недеформированного стержня совпадает с центром масс деформированного, что равносильно выполнению равенства $\int \mathbf{L} dm_c=0$. Введенные векторы связаны очевидным равенством: $\mathbf{R}_*=\mathbf{R}_0+\mathbf{L}+\mathbf{U}=\mathbf{R}_0+\mathbf{R}$.

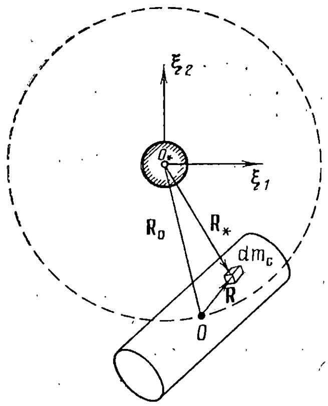
Свяжем с продольной осью недеформированного стержня орт $\mathbf{E}_2$, дополняющие до правой тройки орты обозначим $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_3$. В деформированном состоянии с плоскостью, касательной к линейным элементам, которые до деформации были в плоскости векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_3$, свяжем орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$, а орт $\mathbf{e}_2$ представляет нормаль к плоскости, натянутой на $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$. Положим

$$\mathbf{e}_i=A_{ij}\mathbf{E}_j \tag{1.3}$$

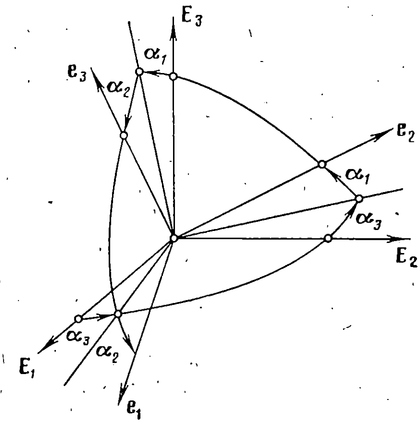
где по «немому» индексу предполагается суммирование, $A_{ij}$ — направляющие косинусы, образующие ортогональную матрицу поворота $A$.

Введем три угла, параметрирующие матрицу поворота $A$, такие, чтобы при отсутствии деформаций матрица становилась единичной. В частности, это углы поворота сечения: $\alpha_3$ — вокруг $\mathbf{E}_3$; $\alpha_2$ — вокруг $\mathbf{e}_2$; $\alpha_1$ — вокруг $\mathbf{e}_2\times\mathbf{E}_3$ (фиг. 2). В линейном приближении матрица $A$ имеет вид

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$




Фиг. 1




Фиг. 2

Предположим, что стержень однородный с постоянным сечением длиной $l=2l_0$. Вектор $\mathbf{L}$ представим в виде суммы

$$\mathbf{L}=x_i\mathbf{E}_i=\mathbf{l}+\mathbf{x} \tag{1.5}$$
$$\mathbf{l}=\mathbf{E}_2x_2,\quad \mathbf{x}=\mathbf{E}_1x_1+\mathbf{E}_3x_3$$
$$-l_0\leqslant x_2\leqslant l_0,\quad l_0=l/2$$

Прямая $\mathbf{l}$ проходит через центр масс параллельно образующей цилиндрической поверхности стержня.

Координаты точек сечения $x_1$ и $x_3$ обладают свойствами (интегралы берутся по площади сечения $S$):

$$\int x_1\,dx_1\,dx_3=0,\qquad \int x_3\,dx_1\,dx_3=0 \tag{1.6}$$

которые можно получить подставив $\mathbf{L}$ в (1.1) в виде (1.5).

Так как рассматриваемый стержень тонкий, введем малый параметр $\nu=S/l_0^2\ll1$. Приведем формулы дифференцирования базисных векторов, служащие определением кривизны и кручения $K_i$ $(i=1, 2, 3)$:

$$\partial\mathbf{e}_1/\partial x_2=\mathbf{e}_2K_3-\mathbf{e}_3K_2 \tag{1.7}$$
$$\partial\mathbf{e}_2/\partial x_2=\mathbf{e}_3K_1-\mathbf{e}_1K_3,\quad \partial\mathbf{e}_3/\partial x_2=\mathbf{e}_1K_2-\mathbf{e}_2K_1$$
$$K_1=\left(\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial x_2}\cdot\mathbf{e}_3\right),\qquad K_2=\left(\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial x_2}\cdot\mathbf{e}_1\right),\qquad K_3=\left(\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial x_2}\cdot\mathbf{e}_2\right)$$

Пользуясь свойствами $\partial\mathbf{E}_i/\partial x_2=0$, равенствами (1.3), (1.4), получим в линейном приближении $K_1=\partial A_{2i}/\partial x_2\cdot A_{3i}=\alpha_1'$, где штрихом обозначена производная по $x_2$. Аналогично получим $K_i=\alpha_i'$ $(i=1, 2, 3)$.

2. Уравнения Ньютона для элемента $dm_c$ в линейной теории упругости имеют вид

$$d^2\mathbf{R}_*/dt^2=\mathbf{g}+\Omega_0^2[3\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{R}]+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}/\rho+\mathbf{w} \tag{2.1}$$

где первые два слагаемых в правой части характеризуют силы тяготения, $\mathbf{w}$ — ненулевые пары сил типа $\mathbf{w}=\mathbf{w}_0[\delta(\mathbf{L}-\mathbf{L}_1^\circ)-\delta(\mathbf{L}-\mathbf{L}_2^\circ)]$, $\mathbf{L}_1^\circ-\mathbf{L}_2^\circ\to0$ (например, $\mathbf{w}$ — силы, действующие со стороны опор бесконечно малых гироскопов), $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\delta$ — символьная дельта-функция, $\mathbf{g}=\mu_0\boldsymbol{\gamma}/R_0^2$, $\Omega_0^2=\mu_0/R_0^3$, $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{R}_0/R_0$, $\mu_0$ — гравитационная постоянная, равная произведению массы планеты на постоянную тяготения, $R_0$ — модуль радиуса-вектора $\mathbf{R}_0$, $\rho=\mathrm{const}$ — плотность материала.

Проинтегрируем уравнения (2.1) по объему $\Delta V$, представляющему собой часть стержня, заключенную между поперечными сечениями $s_1$ и $s_2$ в точках $x_2$ и $x_2+\Delta x_2$, предполагая, что $\sigma_{ij}|_{s_0}=0$ на боковой поверхности $s_0$:

$$\int\limits_{\Delta V}(\mathbf{F}-\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\,dV=0,\qquad \int\limits_{\Delta V}\mathbf{w}\,dV=0 \tag{2.2}$$
$$\mathbf{F}=\rho\,\{\partial^2\mathbf{R}_*/\partial t^2-\mathbf{g}-\Omega_0^2[3\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{R}]\}$$

С помощью формулы Гаусса — Остроградского преобразуем интеграл

$$\int\limits_{\Delta V} \nabla \boldsymbol{\sigma}\, dV = -\int\limits_{s_1} \mathbf{e}_2(x_2)\cdot\boldsymbol{\sigma}\, ds + \int\limits_{s_2} \mathbf{e}_2(x_2+\Delta x_2)\cdot\boldsymbol{\sigma}\, ds \tag{2.3}$$

Введем вектор $\mathbf{Q}$ (по определению, $\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{e}_j\delta_{2i}\sigma_{ij}=\mathbf{e}_j\sigma_{2j}$, $\delta_{2i}$ — символ Кронекера):

$$\mathbf{Q}=\int\limits_{s_1} \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}\, ds=\mathbf{e}_i Q_i, \qquad Q_i=\int\limits_{s_1}\sigma_{2i}\, ds \tag{2.4}$$

После предельного перехода в (2.2) при $\Delta x_2\to 0$ и с использованием (2.3), (2.4) получим

$$\mathbf{Q}'=\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P}=\lim_{\Delta x_2\to 0}(\Delta x_2)^{-1}\int\limits_{\Delta V}\mathbf{F}\, dV=\int\limits_{s_1}\mathbf{F}\, ds \tag{2.5}$$

Уравнения движения центра масс можно получить интегрируя (2.5) по всей длине стержня:

$$\int\limits_{-l_0}^{l_0}(\mathbf{P}-\mathbf{Q}')\, dx_2=m_c\left(\frac{d^2\mathbf{R}_0}{dt^2}-\mathbf{g}\right)=0$$

Представим $\mathbf{F}$ в виде ряда Тейлора в окрестности осевой линии ($x_1=x_3=0$): $\mathbf{F}=\mathbf{f}+x_1\cdot\partial\mathbf{F}/\partial x_1+x_3\cdot\partial\mathbf{F}/\partial x_3+\ldots$ Тогда $P$ в (2.5) можно представить в виде ряда по степеням $\nu$:

$$\mathbf{P}=\nu\mathbf{p}^{(1)}+\nu^2\mathbf{p}^{(2)}+\ldots, \qquad \mathbf{p}=\int\limits_{s_1}\mathbf{f}\, ds=\nu\mathbf{p}^{(1)} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{f}+x_1\,\partial\mathbf{F}/\partial x_1|_{x_i=0}+x_3\,\partial\mathbf{F}/\partial x_3|_{x_i=0}+\ldots$$

$$\mathbf{f}=\rho\{\partial^2\mathbf{r}/\partial t^2-\Omega_0^2[3\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{r}]\}$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}|_{x_i=0} \quad (i=1,\ 3)$$

Ограничимся первыми членами разложения, как и в [1] (уточненные модели разработаны в [2, 3]). Уравнения равновесия сил для части стержня имеют вид

$$\mathbf{p}=\mathbf{Q}' \tag{2.7}$$

$$\mathbf{p}=S\rho\{\partial^2\mathbf{r}/\partial t^2-\Omega_0^2[3\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{r}]\}$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{l}+\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}=\mathbf{U}|_{x_{1,3}=0}$$

Абсолютную производную $\partial^2\mathbf{r}/\partial t^2$ выразим через относительные производные по времени, которые обозначим точкой ($\mathbf{a}^{\cdot}=\mathbf{E}_i\partial a_i/\partial t$):

$$\partial^2\mathbf{r}/\partial t^2=\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость трехгранника $\mathbf{E}_i$ ($\mathbf{E}_i^{\cdot}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}_i$).

Рассмотрим уравнения равновесия моментов

$$\int\limits_{\Delta V}(\mathbf{R}_0+\mathbf{R})\times(\mathbf{F}-\mathbf{W}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})\, dV=\int\limits_{\Delta V}[\mathbf{R}\times(\mathbf{F}-\mathbf{W}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})]\, dV, \qquad \mathbf{W}=\rho\mathbf{w}$$

Благодаря симметричности тензора $\sigma$ последнее преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Delta V}\mathbf{R}\times\mathbf{F}\, dV=\int\limits_{s_2}(\mathbf{R}\times(\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}))|_{x_2+\Delta x_2}\, ds\,-$$

$$-\int\limits_{s_1}(\mathbf{R}\times(\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}))|_{x_2}\, ds+\mathbf{m}^*, \qquad \mathbf{m}^*=\int\limits_{\Delta V}(\mathbf{R}\times\mathbf{W})\, dV$$

где $\mathbf{m}^*$ — вектор момента сил от исполнительных органов системы ориентации. Отсюда аналогично (2.5) после предельного перехода при $\Delta x_2 \to 0$ получим

$$\mathbf{Z} = \partial \mathbf{Y}/\partial x_2 + \mathbf{m},\ m = \lim_{\Delta x_2 \to 0} m^*/\Delta x_2$$

$$\mathbf{Z} = \int\limits_{s_1} \mathbf{R} \times \mathbf{F}\, ds, \qquad \mathbf{Y} = \int\limits_{s_1} \mathbf{R} \times (\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})\, ds$$

Вычисляя приближенно, как в (2.6), (2.7), получим равенство

$$\mathbf{z} = \mathbf{y}' + \mathbf{m}, \qquad \mathbf{z} = \int\limits_{s_1} \mathbf{r} \times \mathbf{f}\, ds = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{y} = \int\limits_{s_1} \mathbf{R} \times (\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})\, ds = \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{M} = \int\limits_{s_1} \mathbf{x} \times (\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})\, ds$$

Из (2.8) с помощью (2.7) имеем

$$\partial \mathbf{M}/\partial x_2 + \partial \mathbf{u}/\partial x_2 \times \mathbf{Q} + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0$$

Интегрируя уравнение (2.8) по $x_2$ по всей длине стержня, получим

$$\int\limits_{-l_0}^{l_0} (\mathbf{m} - \mathbf{r} \times \mathbf{p})\, dx_2 = 0$$

или после введения тензора инерции стержня $J$ с элементами $J_{ij} = \int (r_k^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\, dm_c$, $r_i$ — проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси, в которых вычисляется тензор инерции

$$J\boldsymbol{\omega}^{\bullet} + \boldsymbol{\omega} \times (J \cdot \boldsymbol{\omega}) = 3\Omega_0^2 [\boldsymbol{\gamma} \times (J \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \mathbf{m}_0 \tag{2.9}$$

где $\mathbf{m}_0 = \int \mathbf{m}\, dx_2$ — суммарный момент сил, действующих на стержень со стороны исполнительных органов.

Сравнивая призводные от вектора $\mathbf{r}$ по $x_2$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \mathbf{E}_3 - \alpha_3 \mathbf{E}_1, \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{E}_1 u_1' + \mathbf{E}_2 u_2' + \mathbf{E}_3 u_3' + \mathbf{E}_2 \tag{2.10}$$

которые получены с учетом нерастяжимости $dx_2 = \mathrm{const}$ при деформациях, получим связь $\alpha_i$ с $u_j'$:

$$\alpha_1 = u_3', \quad \alpha_3 = -u_1', \quad u_2' = 0 \tag{2.11}$$

Условие $\int \mathbf{U}\, dm = \int \mathbf{u}\, dm + O(\nu^2) = 0 \quad (\nu \to 0)$ с принятой точностью эквивалентно

$$\int\limits_{-l_0}^{l_0} u_1\, dx_2 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad \int\limits_{-l_0}^{l_0} u_3\, dx_2 = 0 \tag{2.12}$$

При вычислении матрицы $J$ опустим квадраты $u_i$ и их произведения и потребуем равенство нулю недиагональных элементов, что соответствует выбору ориентации ортов $\mathbf{E}_i$:

$$\int\limits_{-l_0}^{l_0} x_2 u_1\, dx_2 = 0, \qquad \int\limits_{-l_0}^{l_0} x_2 u_3\, dx_2 = 0 \tag{2.13}$$

Заметим, что в выбранной таким образом системе координат относительный момент количества движения равен нулю: $\int \mathbf{r} \times \mathbf{u}^{\bullet}\, dx_2 = 0$.

Учитывая (2.11) и (2.12), вычислим матрицу $J$:

$$J = \frac{m_c l_0^2}{3} \begin{Vmatrix} 1 + \beta_1 \nu & 0 & 0 \\ 0 & (\beta_1 + \beta_3)\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta_3 \nu \end{Vmatrix}$$

$$m_c = 2 l_0 \rho S, \quad \beta_1 \nu = 3 I_1/(S l_0^2), \quad \beta_3 \nu = 3 I_3/(S l_0^2)$$

где $I_1$, $I_2$, $I_3$ — моменты инерции поперечного сечения, $\beta_1=O(1)$, $\beta_3=O(1)$ при $\nu\to 0$; в частности, для круглого сечения $\beta_1=\beta_3=3/(4\pi)$.

Векторые уравнения (2.7) и (2.8) эквивалентны следующим шести уравнениям:

$$p_1=(Q_1+\alpha_2Q_3-\alpha_3Q_2)' \tag{2.14}$$

$$p_2=(Q_2+\alpha_3Q_1-\alpha_1Q_3)',\quad p_3=(Q_3+\alpha_1Q_2-\alpha_2Q_1)'$$

$$M_1'+\alpha_2'M_3-\alpha_3'M_2+Q_3+m_1=0$$

$$M_2'+\alpha_3'M_1-\alpha_1'M_3+m_2=0$$

$$M_3'+\alpha_1'M_2-\alpha_2'M_1-Q_1+m_3=0$$

которые отличаются от известных [1, 3] тем, что вместо компонент кривизны естественно изогнутого состояния $K_{i0}$, которые здесь равны нулю, учтены компоненты кривизны, связанные с упругой деформацией $K_i=\alpha_i'$.

Введем матрицу $\mathbf{b}=\|b_{ij}\|$ по формулам ($\Omega_0=\text{const}$):

$$b_{11}=-\omega_2^2-\omega_3^2+\Omega_0^2-3\Omega_0^2\gamma_1^2,\quad b_{12}=-\omega_3^{\cdot}+\omega_1\omega_2-3\Omega_0^2\gamma_1\gamma_2$$

$$b_{13}=\omega_2^{\cdot}+\omega_1\omega_3-3\Omega_0^2\gamma_1\gamma_3,\quad b_{21}=\omega_3^{\cdot}+\omega_1\omega_2-3\Omega_0^2\gamma_1\gamma_2$$

$$b_{22}=-\omega_1^2-\omega_3^2+\Omega_0^2-3\Omega_0^2\gamma_2^2,\quad b_{23}=-\omega_1^{\cdot}+\omega_2\omega_3-3\Omega_0^2\gamma_2\gamma_3$$

$$b_{31}=-\omega_2^{\cdot}+\omega_1\omega_3-3\Omega_0^2\gamma_1\gamma_3,\quad b_{32}=\omega_1^{\cdot}+\omega_2\omega_3-3\Omega_0^2\gamma_2\gamma_3$$

$$b_{33}=-\omega_2^2-\omega_1^2+\Omega_0^2-3\Omega_0^2\gamma_3^2 \tag{2.15}$$

Уравнения (2.9) позволяют определить $m_{0i}$ по заданным $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ (опущены члены $O(\nu^2)$, $\nu\to 0$):

$$m_{01}={}^1/_3 m_c l_0^2 b_{32},\quad m_{02}=0,\quad m_{03}=-{}^1/_3 m_c l_0^2 b_{12} \tag{2.16}$$

Вектор $\mathbf{p}$ в (2.7) представим в форме $\mathbf{p}=(\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\rho S$, проекции которого разложим в сумму $p_i=p_i^\circ+p_i^1$, где $p_i^\circ=x_2\rho Sb_{i2}$ ($i=1, 2, 3$) от упругих смещений не зависит:

$$p_1^1=[u_1^{\cdot\cdot}+2\omega_2u_3^{\cdot}+b_{11}u_1+b_{13}u_3]\rho S$$

$$p_2^1=[2(\omega_3u_1^{\cdot}-\omega_1u_3^{\cdot})+b_{21}u_1+b_{23}u_3]\rho S$$

$$p_3^1=[u_3^{\cdot\cdot}-2\omega_2u_1^{\cdot}+b_{31}u_1+b_{33}u_3]\rho S$$

Вектор $\mathbf{Q}$ будем искать в виде суммы $Q_i=Q_i^\circ+Q_i^1$, где $Q_i^\circ$ определяются путем интегрирования производной $\partial Q_i^\circ/\partial x_2=p_i^\circ$ с граничными условиями $Q_i^\circ(\pm l_0)=0$ и имеют вид $Q_i^\circ={}^1/_2\rho S(x_2^2-l_0^2)b_{i2}$, а $Q_i^1$ обращаются в нуль вместе со смещениями $u_i$ и $\alpha_j$. Линеаризуя уравнения (2.14), получим

$$p_1^1=(Q_1^1+\alpha_2Q_3^\circ-\alpha_3Q_2^\circ)' \tag{2.17}$$

$$p_2^1=(Q_2^1+\alpha_3Q_1^\circ-\alpha_1Q_3^\circ)',\quad p_3^1=(Q_3^1+\alpha_1Q_2^\circ-\alpha_2Q_1^\circ)'$$

Из (2.14) имеем необходимое распределение моментов исполнительных органов для сохранения недеформированного состояния в процессе движения с заданными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$:

$$m_1^\circ=-Q_3^\circ,\quad m_2^\circ=0,\quad m_3^\circ=Q_1^\circ \tag{2.18}$$

Пусть точечные исполнительные органы, число которых равно $k$, создают распределение моментов $m_i$, мало отличающееся по интегральной мере от необходимого (2.18) (здесь и далее суммирование по $i$ от 1 до $k$):

$$m_1=\Sigma t_i^1(t)\delta(x_2-x_{2i}),\quad m_2=0,\quad m_3=\Sigma t_i^3(t)\delta(x_2-x_{2i}) \tag{2.19}$$

$$\int_{-l_0}^{l_0} n_i\,dx_2=0,\qquad n_i=m_i-m_i^\circ\qquad (i=1,2,3) \tag{2.20}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, производные которой рассматриваются в обобщенном смысле, $x_{2i}$ — точки расположения исполнительных органов. Заметим, что (2.20) эквивалентно условию (2.16).

При указанных ограничениях на величины и распределение моментов линейные уравнения остаются в силе и сохраняется пропорциональная зависимость между $M_i$ и проекциями изменения вектора кривизны [1], выражающаяся окончательно в виде

$$M_1=EI_1u_3'', \quad M_2=GI_2\alpha_2', \quad M_3=-EI_3u_1''$$

где $E$, $G$ — модули упругости и сдвига, а уравнения (2.8) имеют известный вид

$$M_1'+Q_3^1+n_1=0, \quad \alpha_2'=-n_2=0, \quad M_3'-Q_1^1+n_3=0$$

Исключая из (2.17) $Q_1^1$, $Q_3^1$, получим искомые линейные уравнения для $u_1$, $u_3$:

$$u_1^{\cdot\cdot}+2\omega_2u_3^{\cdot}+b_{11}u_1+b_{13}u_3+EI_3(\rho S)^{-1}u_1^{\mathrm{IV}}+{}^1/_2[u_1'(l_0^2-x_2^2)]'b_{22}=n_3'/(\rho S)$$
$$u_3^{\cdot\cdot}-2\omega_2u_1^{\cdot}+b_{31}u_1+b_{33}u_3+EI_1(\rho S)^{-1}u_3^{\mathrm{IV}}+{}^1/_2[u_3'(l_0^2-x_2^2)]'b_{22}=-n_1'/(\rho S)$$

где среди коэффициентов есть функции времени и координаты $x_2$. Римскими цифрами указан порядок производной по $x_2$.

Замена, соответствующая переходу во вращающуюся систему координат $(u_1, \ u_3)\to(v_1, \ v_3)$: $u_1=v_1\cos\psi-v_3\sin\psi$, $u_3=v_1\sin\psi+v_3\cos\psi$, $\psi=\int\omega_2dt$, приводит к уравнениям

$$v_1^{\cdot\cdot}+B_{11}v_1+B_{13}v_3+(I_{11}v_1+I_{13}v_3)^{\mathrm{IV}}E(\rho S)^{-1}+{}^1/_2[v_1'(l_0^2-x_2^2)]'B_{22}=N_3' \quad (2.21)$$
$$v_3^{\cdot\cdot}+B_{31}v_1+B_{33}v_3+(I_{13}v_1+I_{33}v_3)^{\mathrm{IV}}E(\rho S)^{-1}+{}^1/_2[v_3'(l_0^2-x_2^2)]'B_{22}=-N_1'$$

где $N_1$, $N_3$, $B_{ij}$, $T_j$ — компоненты соответствующих величин $n_1$, $n_3$, $b_{ij}$, $t_j$ во вращающейся системе координат:

$$N_1=(\rho S)^{-1}\Sigma T_i^1\delta(x_2-x_{2i})+{}^1/_2(x_2^2-l_0^2)B_{32}$$
$$N_3=(\rho S)^{-1}\Sigma T_i^3\delta(x_2-x_{2i})+{}^1/_2(x_2^2-l_0^2)B_{12}$$
$$T_i^1=t_i^1\cos\psi+t_i^3\sin\psi, \quad T_i^3=t_i^3\cos\psi-t_i^1\sin\psi$$
$$I_{11}=I_3\cos^2\psi+I_1\sin^2\psi, \quad I_{33}=I_1\cos^2\psi+I_3\sin^2\psi$$
$$I_{31}=I_{13}=(I_1-I_3)\sin\psi\cos\psi$$

$$B=\begin{Vmatrix} -\Omega_3^2+\Omega_0^2-3\Omega_0^2\Gamma_1^2 & -\Omega_3^{\cdot}-3\Omega_0^2\Gamma_1\Gamma_2 & \Omega_1\Omega_3-3\Omega_0^2\Gamma_1\Gamma_3 \\ \Omega_3^{\cdot}-3\Omega_0^2\Gamma_1\Gamma_2 & -\Omega_1^2-\Omega_3^2+\Omega_0^2-3\Omega_0^2\Gamma_2^2 & -\Omega_1^{\cdot}-3\Omega_0^2\Gamma_2\Gamma_3 \\ \Omega_1\Omega_3-3\Omega_0^2\Gamma_1\Gamma_3 & \Omega_1^{\cdot}-3\Omega_0^2\Gamma_2\Gamma_3 & \Omega_0^2-\Omega_1^2-3\Omega_0^2\Gamma_3^2 \end{Vmatrix}$$

$$\Gamma_1=\gamma_1\cos\psi+\gamma_3\sin\psi, \quad \Gamma_2=\gamma_2, \quad \Gamma_3=\gamma_3\cos\psi-\gamma_1\sin\psi$$
$$\Omega_1=\omega_1\cos\psi+\omega_3\sin\psi, \quad \Omega_2=\omega_2, \quad \Omega_3=\omega_3\cos\psi-\omega_1\sin\psi$$

здесь в $N_1$ и $N_3$ идет суммирование до $k$, являющегося числом точек размещения исполнительных органов.

Введем замену $(x_2, \ t)\to(\theta, \ \tau)$ и обозначения: $\tau=\varkappa t$, $\theta=x_2/2l_0=x_2/l$, $\varkappa^2=E(I_1+I_3)/(2\rho Sl^4)$, $B_{ij}\varkappa^{-2}=\varepsilon B_{ij}^*$, $\Lambda=(I_3-I_1)/(I_3+I_1)$. Уравнения (2.21) принимают вид

$$\frac{\partial^2v_1}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^4v_1}{\partial\theta^4}=\Lambda\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(v_3\sin2\psi-v_1\cos2\psi)-\varepsilon(B_{11}^*v_1+B_{13}^*v_3)+$$
$$+\frac{\varepsilon\partial}{2\,\partial\theta}\left[\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\left(\theta^2-\frac{1}{4}\right)\right]B_{22}^*+\frac{\partial N_3}{\partial\theta}\frac{1}{\varkappa^2l}$$
$$(2.22)$$
$$\frac{\partial^2v_3}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^4v_3}{\partial\theta^4}=\Lambda\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(v_1\sin2\psi+v_3\cos2\psi)-\varepsilon(B_{31}^*v_1+B_{33}^*v_3)+$$
$$+\frac{\varepsilon\partial}{2\,\partial\theta}\left[\frac{\partial v_3}{\partial\theta}\left(\theta^2-\frac{1}{4}\right)\right]B_{22}^*-\frac{\partial N_1}{\partial\theta}\frac{1}{\varkappa^2l}$$

Таким образом получена система уравнений относительно $v_1$ и $v_3$, в которой $B_{ij}$, $T_j$, $\psi$, $\Omega_i$, $\Gamma_i$ являются известными функциями времени. Относительно параметров $\Lambda$, $\varepsilon$ примем предположение $\Lambda\ll1$, $\varepsilon\ll1$, первое из которых соответствует малой асимметрии сечения, а второе — малости угловых скоростей разворотов $\omega_i$ $(i=1, 2, 3)$ и их производных по $t$ по сравнению с низшими собственными частотами системы. Эти условия заведомо выводят из рассмотрения случаи неустойчивости вращения гибких валов [4]. Производные от символьной δ-функции понимаются в обобщенном смысле.

Граничные условия имеют вид

$$\partial^2 v_i/\partial\theta^2|_{\pm 1/2}=0,\quad \partial^3 v_i/\partial\theta^3|_{\pm 1/2}=0 \tag{2.23}$$

3. Исследование уравнений (2.22) начнем с решения системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 v_1^\circ}{\partial\theta^4}&=\frac{1}{\varkappa^2 l}\frac{\partial N_3}{\partial\theta}=\frac{1}{\varkappa^2\rho l^2 S}\Sigma T_i^3\delta'(\theta-\theta_i)-\varepsilon l\theta B_{12}^*\\ \frac{\partial^4 v_3^\circ}{\partial\theta^4}&=-\frac{1}{\varkappa^2 l}\frac{\partial N_1}{\partial\theta}=-\frac{1}{\varkappa^2\rho l^2 S}\Sigma T_i^1\delta'(\theta-\theta_i)-\varepsilon l\theta B_{32}^*\end{aligned} \tag{3.1}$$

Вводя обозначение $\varepsilon l T_j^{h*}=T_j^h/(\rho\varkappa^2 S l^2)$, учитывающее малость управляющих усилий $T_j^h$ ($h$=1,3) в каждой $j$-й точке, и дважды интегрируя (3.1) вместе с граничными условиями (2.23), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_1^\circ}{\partial\theta^2}&=\varepsilon l\left[\Sigma T_i^{3*}U(\theta-\theta_i)-B_{12}^*\frac{4\theta^3-3\theta-1}{24}\right]\\ \frac{\partial^2 v_3^\circ}{\partial\theta^2}&=\varepsilon l\left[-\Sigma T_i^{1*}U(\theta-\theta_i)-B_{32}^*\frac{4\theta^3-3\theta-1}{24}\right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $U$ — симметричная импульсная функция: $U(\theta)=0$ $(\theta<0)$, $U(\theta)=1/2$ $(\theta=0)$, $U(\theta)=1$ $(\theta>0)$.

Решение (3.2) находим интегрированием

$$v_1^\circ=\varepsilon l\left[\Sigma T_i^{3*}U(\theta-\theta_i)\frac{(\theta-\theta_i)^2}{2}-\frac{B_{12}^*}{24}\left(\frac{\theta^5}{5}-\frac{\theta^3}{2}-\frac{\theta^2}{2}-\frac{3}{16}\theta-\frac{1}{40}\right)\right]+C_1+\theta\left.\frac{\partial v_1^\circ}{\partial\theta}\right|_{\theta=-1/2} \tag{3.3}$$

аналогичное выражение имеем для $v_3^\circ$. Для определения произвольных функций времени $C_1$ и $C_3$ воспользуемся условием (2.12) в форме (интегрирование по θ от $-1/2$ до $1/2$): $\int v_1^\circ d\theta=\int v_3^\circ d\theta=0$. Получим

$$C_1=\varepsilon l[-\Sigma {}^1/_6 T_i^{3*}({}^1/_2-\theta_i)^3-B_{12}^*/360]$$
$$C_3=\varepsilon l[\Sigma {}^1/_6 T_i^{1*}({}^1/_2-\theta_i)^3-B_{32}^*/360]$$

Аналогично получим другие постоянные из (2.13) в форме $(-1/2\leqslant\theta\leqslant 1/2)$ $\int v_1^\circ\theta d\theta=\int v_3^\circ\theta d\theta=0$, подставив которые в (3.3) окончательно получим

$$\begin{aligned}v_1^\circ=\varepsilon l\{&\Sigma T_i^{3*}[{}^1/_2U(\theta-\theta_i)(\theta-\theta_i)^2-{}^1/_6({}^1/_2-\theta_i)^3-\\ &-{}^3/_2({}^1/_{16}-{}^1/_3\theta_i+{}^1/_2\theta_i^2-{}^1/_3\theta_i^4)\theta]-\\ &-{}^1/_{24}B_{12}^*({}^1/_5\theta^5-{}^1/_2\theta^3-{}^1/_2\theta^2+{}^{39}/_{560}\theta+{}^1/_{24})\}\\ v_3^\circ=\varepsilon l\{&-\Sigma T_i^{1*}[{}^1/_2U(\theta-\theta_i)(\theta-\theta_i)^2-{}^1/_6({}^1/_2-\theta_i)^3-\\ &-{}^3/_2({}^1/_{16}-{}^1/_3\theta_i+{}^1/_2\theta_i^2-{}^1/_3\theta_i^4)\theta]-\\ &-{}^1/_{24}B_{32}^*({}^1/_5\theta^5-{}^1/_2\theta^3-{}^1/_2\theta^2+{}^{39}/_{560}\theta+{}^1/_{24})\}\end{aligned}$$

4. Используя (3.4), произведем замену переменных в (2.22) $v_1=v_1^\circ+\eta$, $v_3=v_3^\circ+\zeta$. Опуская произведение $\varepsilon\Lambda$ и $\varepsilon^2$, получим уравнения для η и ζ:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v_1^\circ}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^4\eta}{\partial\theta^4}=\Lambda\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(\zeta\sin 2\psi-\eta\cos 2\psi)-\\ &-\varepsilon(B_{11}^*\eta+B_{13}^*\zeta)+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\left(\theta^2-\frac{1}{4}\right)\right]B_{22}^*\\ &\frac{\partial^2 v_3^\circ}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial\theta^4}=\Lambda\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(\eta\sin 2\psi+\zeta\cos 2\psi)-\\ &-\varepsilon(B_{13}^*\eta+B_{33}^*\zeta)+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\left(\theta^2-\frac{1}{4}\right)\right]B_{22}^*\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ограничимся случаем, когда вращения происходят значительно медленнее упругих колебательных процессов, т. е. $\psi$, $B_{ij}$ являются медленно меняющимися функциями $\tau$: $\psi=\psi(\varphi)$, $B_{ij}^*=B_{ij}^*(\varphi)$, $\varphi=\mu\tau$, $\mu\ll 1$. Частные производные по $\tau$ от $v_1^\circ$ и $v_3^\circ$ в (4.1) при этом опустим.

Решение линейной системы уравнений с малым параметром и медленно меняющимися коэффициентами

$$\begin{gathered}
\eta^{\cdot\cdot}+\eta^{IV}=\Lambda(\zeta^{IV}\sin 2\psi-\eta^{IV}\cos 2\psi)-\varepsilon(B_{11}^*\eta+B_{13}^*\zeta)+\\
+{}^1/_2\varepsilon[\eta'(\theta^2-{}^1/_4)]'B_{22}^*\\
\zeta^{\cdot\cdot}+\zeta^{IV}=\Lambda(\eta^{IV}\sin 2\psi+\zeta^{IV}\cos 2\psi)-\varepsilon(B_{13}^*\eta+B_{33}^*\zeta)+\\
+{}^1/_2\varepsilon[\zeta'(\theta^2-{}^1/_4)]'B_{22}^*\\
\eta^{II},\ \zeta^{II},\ \eta^{III},\ \zeta^{III}|_{\theta=\pm 1/2}=0
\end{gathered}\tag{4.2}$$

будем искать методом Фурье [5]. При $\varepsilon=\Lambda=0$ решение имеет вид [6]:

$$\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_{1j}(\tau)\Phi_j(\theta),\qquad \zeta=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_{3j}(\tau)\Phi_j(\theta)\tag{4.3}$$

$$\psi_{1i}=W_{1i}\cos\lambda_i\tau+X_{1i}\sin\lambda_i\tau,\quad \psi_{3i}=W_{3i}\cos\lambda_i\tau+X_{3i}\sin\lambda_i\tau$$

$$\eta^{\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}(-W_{1j}\sin\lambda_j\tau+X_{1j}\cos\lambda_j\tau)\lambda_j\Phi_j(\theta)$$

$$\zeta^{\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}(-W_{3j}\sin\lambda_j\tau+X_{3j}\cos\lambda_j\tau)\lambda_j\Phi_j(\theta)$$

$$\begin{gathered}
\Phi_j={}^1/_2\{\mathrm{ch}[\sqrt{\lambda_j}(\theta+{}^1/_2)]+\cos[\sqrt{\lambda_j}(\theta+{}^1/_2)]\}-\\
-{}^1/_2(\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_j}+\sin\sqrt{\lambda_j})(\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_j}-\cos\sqrt{\lambda_j})^{-1}\times\\
\times\{\mathrm{sh}[\sqrt{\lambda_j}(\theta+{}^1/_2)]+\sin[\sqrt{\lambda_j}(\theta+{}^1/_2)]\},\ -{}^1/_2\leqslant\theta\leqslant{}^1/_2
\end{gathered}$$

Собственные частоты определяются как корни уравнения $\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=1$, приближенное решение которого имеет вид $\lambda_h={}^1/_4\pi^2(2h+1)^2$ ($h=1, 2,\ldots$).

Решение возмущенных уравнений (4.2) имеет вид (4.3), но с коэффициентами, зависящими от $\tau$ [5]. Осуществим замену $(\eta, \zeta, \eta^{\cdot}, \zeta^{\cdot})\to(W_{1h}, W_{3h}, X_{1h}, X_{3h})$ в соответствии с (4.3), приводящую к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных между собой в модальном пространстве (точка вверху означает дифференцирование по $\tau$):

$$\begin{gathered}
\lambda_h W_{1h}^{\cdot}=-\Lambda\lambda_h^2\sin\lambda_h\tau(\psi_{3h}\sin 2\psi-\psi_{1h}\cos 2\psi)+\\
+\varepsilon\sin\lambda_h\tau(B_{11}^*\psi_{1h}+B_{13}^*\psi_{3h})-\varepsilon B_{22}^*\sum_{j=1}^{\infty}\psi_{1j}H_{jh}\sin\lambda_h\tau\\
\lambda_h W_{3h}^{\cdot}=-\Lambda\lambda_h^2\sin\lambda_h\tau(\psi_{1h}\sin 2\psi+\psi_{3h}\cos 2\psi)+\\
+\varepsilon\sin\lambda_h\tau(B_{13}^*\psi_{1h}+B_{33}^*\psi_{3h})-\varepsilon B_{22}^*\sum_{j=1}^{\infty}\psi_{3j}H_{jh}\sin\lambda_h\tau\\
\lambda_h X_{1h}^{\cdot}=\Lambda\lambda_h^2\cos\lambda_h\tau(\psi_{3h}\sin 2\psi-\psi_{1h}\cos 2\psi)-\\
-\varepsilon\cos\lambda_h\tau(B_{11}^*\psi_{1h}+B_{13}^*\psi_{3h})+\varepsilon B_{22}^*\sum_{j=1}^{\infty}\psi_{1j}H_{jh}\cos\lambda_h\tau\\
\lambda_h X_{3h}^{\cdot}=\Lambda\lambda_h^2\cos\lambda_h\tau(\psi_{1h}\sin 2\psi+\psi_{3h}\cos 2\psi)-
\end{gathered}$$

$$- \varepsilon \cos \lambda_h \tau (B_{33}^* \psi_{3h} + B_{13}^* \psi_{1h}) + \varepsilon B_{22}^* \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{3j} H_{jh} \cos \lambda_h \tau$$

$$\varphi^{\cdot} = \mu \quad (h=1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

где $H_{jh}$ — коэффициенты разложения функций $^1/_2[\Phi_j'(\theta)(\theta^2-^1/_4)]$ по собственным формам $\Phi_h$.

К уравнениям (4.4) применим метод осреднения [4, 5], в результате получим бесконечную систему разделившихся групп уравнений

$$\begin{gathered} W_{1h}^{\cdot} = a_h X_{1h} + d_h X_{3h}, \quad W_{3h}^{\cdot} = d_h X_{1h} + c_h X_{3h} \\ X_{1h}^{\cdot} = -a_h W_{1h} - d_h W_{3h}, \quad X_{3h}^{\cdot} = -d_h W_{1h} - c_h W_{3h} \\ a_h = (2\lambda_h)^{-1} \{\varepsilon B_{11}^* - \varepsilon B_{22}^* H_{hh} + \Lambda \lambda_h^2 \cos 2\psi\} \\ c_h = (2\lambda_h)^{-1} \{\varepsilon B_{33}^* - \varepsilon B_{22}^* H_{hh} - \Lambda \lambda_h^2 \cos 2\psi\} \\ d_h = (2\lambda_h)^{-1} \{\varepsilon B_{13}^* - \Lambda \lambda_h^2 \sin 2\psi\} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Произведем замену неизвестных $W_{1h}$, $W_{3h}$, $X_{1h}$, $X_{3h}$ на два ряда комплекснозначных неизвестных $w_{1h}$, $w_{2h}$ $(h=1, 2, \ldots)$:

$$\begin{gathered} w_{1h} = D_{1h}(W_{1h} + iX_{1h}) + W_{3h} + iX_{3h} \\ w_{2h} = D_{2h}(W_{1h} + iX_{1h}) + W_{3h} + iX_{3h} \quad (h=1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{4.6}$$

причем $D_{1h}$, $D_{2h}$ выберем как корни одного квадратного уравнения

$$D_h^2 + d_h^{-1}(c_h - a_h) D_h - 1 = 0 \quad (h=1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

где $d_h$, $c_h$, $a_h$ определены в (4.5) через исходные медленно меняющиеся функции времени. Имеем уравнения

$$w_{1h}^{\cdot} = -i(D_{1h} d_h + c_h) w_{1h}, \quad w_{3h}^{\cdot} = -i(D_{2h} d_h + c_h) w_{2h} \quad (h=1, 2, \ldots) \tag{4.8}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{gathered} w_{1h} = w_{1h}|_{\tau=0} \exp\left[-i \int_0^{\tau} (D_{1h} d_h + c_h)\, d\tau\right] \\ w_{2h} = w_{2h}|_{\tau=0} \exp\left[-i \int_0^{\tau} (D_{2h} d_h + c_h)\, d\tau\right] \\ (h=1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{4.9}$$

Введем обозначения

$$\chi_{1h} = \int_0^{\tau} (D_{1h} d_h + c_h)\, d\tau, \qquad \chi_{2h} = \int_0^{\tau} (D_{2h} d_h + c_h)\, d\tau \tag{4.10}$$

$$W_{jh}|_{\tau=0} = W_{jh}^{\circ}, \; X_{jh}|_{\tau=0} = X_{jh}^{\circ} \; (j=1, 3, \; h=1, 2, \ldots)$$

Искомое решение для $\eta$ и $\zeta$ с помощью (4.3) и (4.10) преобразуется к виду

$$\eta = \sum_{h=1}^{\infty} \Phi_h(\theta) [D_{1h}(\tau) - D_{2h}(\tau)]^{-1} \{[D_{1h}(\tau) W_{1h}^{\circ} + W_{3h}^{\circ}] \times$$
$$\times \cos(\lambda_h \tau + \chi_{1h}(\tau)) + [D_{1h}(\tau) X_{1h}^{\circ} + X_{3h}^{\circ}] \sin(\lambda_h \tau + \chi_{1h}(\tau)) -$$
$$- [D_{2h}(\tau) W_{1h}^{\circ} + W_{3h}^{\circ}] \cos(\lambda_h \tau + \chi_{2h}(\tau)) -$$
$$- [D_{2h}(\tau) X_{1h}^{\circ} + X_{3h}^{\circ}] \sin(\lambda_h \tau + \chi_{2h}(\tau))\}$$

$$\zeta = \sum_{h=1}^{\infty} \Phi_h(\theta) [D_{1h}(\tau) - D_{2h}(\tau)]^{-1} \{-D_{2h}(\tau) [D_{1h}(\tau) W_{1h}^{\circ} + W_{3h}^{\circ}] \times$$

$$\times \cos(\lambda_h\tau+\chi_{1h}(\tau))-D_{2h}(\tau)[D_{1h}(\tau)X_{1h}^\circ+X_{3h}^\circ]\sin(\lambda_h\tau+\chi_{1h}(\tau))+$$
$$+D_{1h}(\tau)[D_{2h}(\tau)W_{1h}^\circ+W_{3h}^\circ]\cos(\lambda_h\tau+\chi_{2h}(\tau))+$$
$$+D_{1h}(\tau)[D_{2h}(\tau)X_{1h}^\circ+X_{3h}^\circ]\sin(\lambda_h\tau+\chi_{2h}(\tau))\}$$

Видно, что возмущение вносит расщепление частот $\lambda_h$. Важно отметить, что в случае $N_1=N_3=0$, соответствующем непрерывному распределению управляющих моментов $m_1=-Q_3^\circ(x_2)$, $m_2=0$, $m_3=Q_1^\circ(x_2)$, квазистационарные прогибы стержня при ускоренном вращении в ньютоновском поле сил отсутствуют.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр. ОНТИ. 1935. 674 с.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука. 1979. 560 с.
3. *Washizu K.* Some consideration on a naturally curved and twisted slender beam // J. Math. and Phys. 1964. V. 43. No. 2. P. 111–116.
4. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1956. 600 с.
5. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. Киев: Наук. думка. 1983. 216 с.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1976. 576 с.



Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1987