

УДК 539.374

ВДАВЛИВАНИЕ РАСТУЩЕГО ШТАМПА В СТЕРЖНЕВОЕ ВЯЗКОУПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

НАУМОВ В. Э.

Приводится постановка и решение задачи о вдавливании жесткого штампа в стержневое вязкоупругое основание. Принципиальное отличие приведенной постановки задачи от исследованных ранее заключается в изменяемости размеров и конфигурации штампа за счет его наращивания. Предполагается, что на штамп действуют изменяющаяся со временем вдавливающая сила и опрокидывающие моменты. Закономерность наращивания (разрастания) штампа считается заданной.

Рассматриваются пространственная, осесимметричная и плоская постановки задачи. Полученные в некоторых частных случаях аналитические решения позволяют изучить влияние кинематических, геометрических и силовых параметров наращивания штампа на перераспределение контактных давлений и осадок основания при заданном силовом воздействии на штамп. Кинематическими параметрами являются скорости разрастания штампа в боковых направлениях вдоль свободной поверхности основания. Геометрические параметры определяют формирующийся заданным образом при наращивании профиль подошвы штампа, а в пространственном случае еще и эволюцию формы штампа в плане. Наличие силовых параметров наращивания в некоторых случаях связано с преодолением реакции основания при формировании заданного рельефа подошвы штампа.

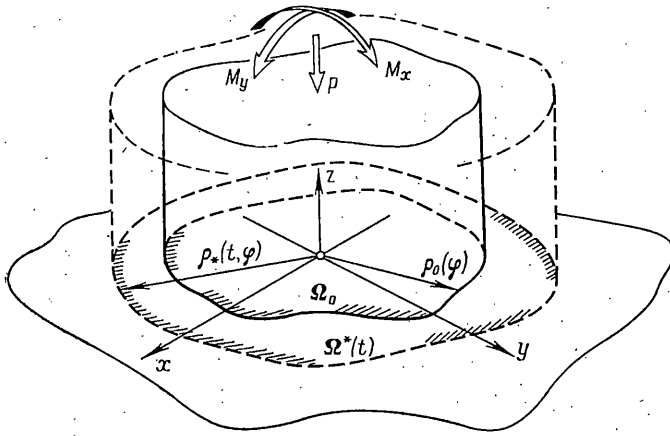
1. Пространственная задача. 1.1 Вязкоупругое основание. Пусть к стержневому вязкоупругому основанию на некотором участке границы в момент времени $t=0$ приложен жесткий штамп с плоской подошвой, имеющий в плане, вообще говоря, произвольную форму, ограниченную замкнутой кривой $r=\rho_0(\varphi)$ (в дальнейшем будем пользоваться двумя системами координат: прямоугольной (x, y, z) и цилиндрической (r, φ, z) , которые показаны на фиг. 1). Стержневое основание моделируется слоем постоянной конечной толщины, лежащим на плоской жесткой поверхности и воспринимающим только нормальные напряжения, действующие вдоль оси z . На штамп действует нагрузка, статически эквивалентная вдавливающей силе P и паре опрокидывающих моментов M_x и M_y . Усилия P , M_x и M_y , вообще говоря, изменяются со временем; будем считать их непрерывными функциями времени.

Начиная с момента времени $t=0$ осуществляется наращивание штампа за счет добавления к нему недеформируемого материала таким образом, что участок контакта непрерывно расширяется. Обозначим через Ω_0 исходную область контакта, соответствующую моменту $t=0$, а через $\Omega^*(t)$ — дополнительную область контакта, образующуюся при наращивании штампа. При этом $\Omega^*(0) = \emptyset$ и $\Omega^*(t_1) \subset \Omega^*(t_2)$, если $t_1 < t_2$. Предполагается, что подошва штампа сцеплена с основанием.

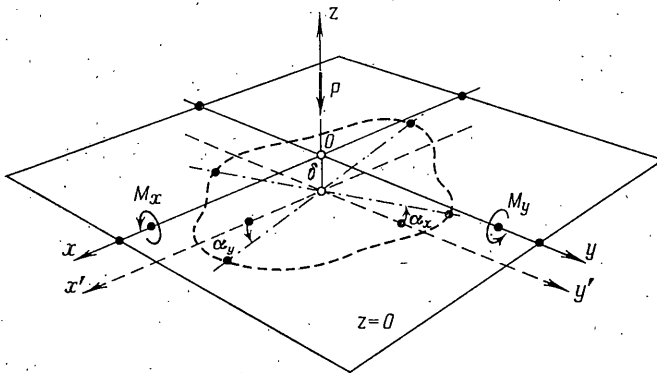
Для описания реологического поведения основания будем пользоваться линейным определяющим соотношением вида [1]:

$$q(t, \mathbf{x}) = k(t) \left[w(t, \mathbf{x}) + \int_{t^*(\mathbf{x})}^t w(\tau, \mathbf{x}) R(t, \tau) d\tau \right] \quad (\mathbf{x} \in \Omega_0 \cup \Omega^*(t), t \geq t^*(\mathbf{x})) \quad (1.1)$$

где $w(t, \mathbf{x})$ — вертикальное смещение границы основания в точке $\mathbf{x} = (x, y) = (r, \varphi)$ в момент времени t ; $q(t, \mathbf{x})$ — давление на поверхности основания; $k(t)$ — мгновенный модуль упругости (податливости) основа-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния; $R(t, \tau)$ — ядро релаксации стареющего вязкоупругого материала основания; $\tau^*(x)$ — момент времени, начиная с которого действует нагрузка в точке x .

Очевидно, что вязкоупругость материала основания, наращивание штампа и изменчивость внешней нагрузки приведет к непрерывному перераспределению контактных давлений и осадок основания под штампом. Вертикальные смещения основания под подошвой исходного штампа определяются формулой

$$w(t, x) = \delta(t) + x\alpha_y(t) - y\alpha_x(t) \quad (x \in \Omega_0) \quad (1.2)$$

где $\delta(t)$ — осадка основания в точке $x=y=0$, $\alpha_x(t)$ и $\alpha_y(t)$ — углы поворота штампа вокруг осей координат x и y соответственно (фиг. 2 иллюстрирует правило отсчета углов; положительные значения w и δ отсчитываются в отрицательном направлении оси z от недеформированной поверхности основания).

Смещения точек поверхности основания под подошвой штампа в зоне наращивания можно представить в виде

$$w(t, x) = [\delta(t) + x\alpha_y(t) - y\alpha_x(t)] - [\delta(\tau^*(x)) + x\alpha_y(\tau^*(x)) - y\alpha_x(\tau^*(x))] + \delta^*(x) \quad (x \in \Omega^*(t)) \quad (1.3)$$

где уже введенная выше функция $\tau^*(x)$ определяет момент времени, в который расширяющийся участок контакта проходит через точку $x \notin \Omega_0$, а функция $\delta^*(x)$ задает некоторое произвольное значение осадки, которое может придаваться приращиваемому элементу штампа. Если $\delta^*(x) = 0$, то соответствующий элемент прикладывается к поверхности основания без предварительного заглубления.

Интегральные уравнения равновесия штампа имеют вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0 \cup \Omega^*(t)} q(t, \mathbf{x}) dx dy &= P(t), & \iint_{\Omega_0 \cup \Omega^*(t)} q(t, \mathbf{x}) y dx dy &= -M_x(t) \\ \iint_{\Omega_0 \cup \Omega^*(t)} q(t, \mathbf{x}) x dx dy &= M_y(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставляя соотношение (1.1) в первое уравнение (1.4), используя при этом выражения для смещений (1.2), (1.3) и переходя к полярной системе координат, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0(\varphi)} \left\{ \delta(t) + \alpha_y(t) r \cos \varphi - \alpha_x(t) r \sin \varphi + \int_0^t [\delta(\tau) + \alpha_y(\tau) r \cos \varphi - \right. \\ \left. - \alpha_x(\tau) r \sin \varphi] R(t, \tau) d\tau \right\} r dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\rho_0(\varphi)}^{\rho_*(t, \varphi)} \left\{ \delta(t) + \alpha_y(t) r \cos \varphi - \alpha_x(t) r \sin \varphi - \right. \\ \left. - \delta(\tau^*(r, \varphi)) - \alpha_y(\tau^*(r, \varphi)) r \cos \varphi + \alpha_x(\tau^*(r, \varphi)) r \sin \varphi + \delta^*(r, \varphi) + \right. \\ \left. + \int_{\tau^*(r, \varphi)}^t [\delta(\tau) + \alpha_y(\tau) r \cos \varphi - \alpha_x(\tau) r \sin \varphi - \delta(\tau^*(r, \varphi)) - \right. \\ \left. - \alpha_y(\tau^*(r, \varphi)) r \cos \varphi + \alpha_x(\tau^*(r, \varphi)) r \sin \varphi + \delta^*(r, \varphi)] R(t, \tau) d\tau \right\} r dr d\varphi = \\ = P(t)/k(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Заметим, что функция $\tau^*(r, \varphi)$, определяющая момент вступления в контакт штампа и основания в точке (r, φ) , и функция $\rho_*(t, \varphi)$, задающая изменяющуюся границу области контакта, являются взаимно обратными по первому аргументу при фиксированном втором, т. е.

$$\rho_*(\tau^*(r, \varphi), \varphi) = r, \quad \tau^*(\rho_*(t, \varphi), \varphi) = t \quad (1.6)$$

Рассматривая аргумент φ как фиксированный, выполним в интеграле по r в (1.5) замену переменной $\tau^*(r, \varphi) = \xi$ (или, что то же, $r = \rho_*(\xi, \varphi)$). Переставляя порядки интегрирования и производя другие весьма громоздкие преобразования, представим уравнение (1.5) в форме

$$\begin{aligned} F(t) \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [F(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau + S_y(t) \alpha_y(t) - \\ - \int_0^t \alpha_y(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [S_y(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau - S_x(t) \alpha_x(t) + \\ + \int_0^t \alpha_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [S_x(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau = f(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*(t, \varphi)} r dr d\varphi, & S_x(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*(t, \varphi)} r^2 \sin \varphi dr d\varphi \\ S_y(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*(t, \varphi)} r^2 \cos \varphi dr d\varphi, & R^\vee(t, \tau) &= 1 + \int_\tau^t R(t, \xi) d\xi \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{P(t)}{k(t)} - \int_0^t R^\vee(t, \tau) \left[\int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(\tau, \varphi), \varphi) \rho_*(\tau, \varphi) \frac{\partial \rho_*(\tau, \varphi)}{\partial \tau} d\varphi \right] d\tau$$

Здесь F и S_x, S_y — площадь и статические моменты увеличивающейся области контакта; функция $R^\vee(t, \tau)$ характеризует релаксационные свойства материала основания, а функция $f(t)$ — изменение нагруженного состояния штампа во времени.

Второе и третье уравнения (1.4) преобразуются аналогичным образом и могут быть представлены в форме

$$S_x(t) \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [S_x(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau + I_{xy}(t) \alpha_y(t) - \quad (1.8)$$

$$- \int_0^t \alpha_y(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [I_{xy}(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau - I_x(t) \alpha_x(t) +$$

$$+ \int_0^t \alpha_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [I_x(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau = g(t)$$

$$S_y(t) \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [S_y(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau + I_y(t) \alpha_y(t) - \quad (1.9)$$

$$- \int_0^t \alpha_y(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [I_y(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau - I_{xy}(t) \alpha_x(t) +$$

$$+ \int_0^t \alpha_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [I_{xy}(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau = h(t)$$

Здесь введены обозначения (I_x, I_y и I_{xy} — полярные и центробежный моменты инерции площадки контакта):

$$I_x(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*(t, \varphi)} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi, \quad I_y(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*(t, \varphi)} r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi$$

$$I_{xy}(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*(t, \varphi)} r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi$$

$$g(t) = - \frac{M_x(t)}{k(t)} - \int_0^t R^\vee(t, \tau) \left[\int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(\tau, \varphi), \varphi) \rho_*^2(\tau, \varphi) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \rho_*(\tau, \varphi)}{\partial \tau} \sin \varphi d\varphi \right] d\tau$$

$$h(t) = - \frac{M_y(t)}{k(t)} - \int_0^t R^\vee(t, \tau) \left[\int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(\tau, \varphi), \varphi) \rho_*^2(\tau, \varphi) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \rho_*(\tau, \varphi)}{\partial \tau} \cos \varphi d\varphi \right] d\tau$$

Таким образом, пространственная задача о вдавливании растущего жесткого штампа в стержневое вязкоупругое основание сводится к определению из системы уравнений (1.7)–(1.9) трех функций времени: внедрения $\delta(t)$ и углов перекоса штампа $\alpha_x(t)$ и $\alpha_y(t)$. Уравнения (1.7)–(1.9) являются интегральными уравнениями типа Вольтерры второго рода. Численное исследование системы уравнений (1.7)–(1.9) может быть осуществлено посредством дискретизации их по времени.

1.2. Упругое основание. Остановимся более подробно на случае упругого стержневого основания, когда $R(t, \tau) \equiv 0$, $R^*(t, \tau) \equiv 1$. Система уравнений (1.7)–(1.9) в этом случае принимает вид (здесь и далее штрихом обозначается производная функции по единственному аргументу):

$$\begin{aligned}
 F(t)\delta(t) - \int_0^t \delta(\tau)F'(\tau)d\tau + S_y(t)\alpha_y(t) - \int_0^t \alpha_y(\tau)S_y'(\tau)d\tau - \\
 - S_x(t)\alpha_x(t) + \int_0^t \alpha_x(\tau)S_x'(\tau)d\tau = f(t) \\
 S_x(t)\delta(t) - \int_0^t \delta(\tau)S_x'(\tau)d\tau + I_{xy}(t)\alpha_y(t) - \int_0^t \alpha_y(\tau)I_{xy}'(\tau)d\tau - \\
 - I_x(t)\alpha_x(t) + \int_0^t \alpha_x(\tau)I_x'(\tau)d\tau = g(t) \\
 S_y(t)\delta(t) - \int_0^t \delta(\tau)S_y'(\tau)d\tau + I_y(t)\alpha_y(t) - \int_0^t \alpha_y(\tau)I_y'(\tau)d\tau - \\
 - I_{xy}(t)\alpha_x(t) + \int_0^t \alpha_x(\tau)I_{xy}'(\tau)d\tau = h(t)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь в выражениях для функций f , g и h (они введены выше) также необходимо положить $R^*(t, \tau) \equiv 1$. Продифференцируем уравнения (1.10) по t :

$$\begin{aligned}
 F\delta' + S_y\alpha_y' - S_x\alpha_x' &= f' \\
 S_x\delta' + I_{xy}\alpha_y' - I_x\alpha_x' &= g' \\
 S_y\delta' + I_y\alpha_y' - I_{xy}\alpha_x' &= h'
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь аргумент t у функций для краткости опущен, а правые части равны

$$\begin{aligned}
 f' &= \frac{P'k - k'P}{k^2} - \int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(t, \varphi), \varphi) \rho_*(t, \varphi) \frac{\partial \rho_*(t, \varphi)}{\partial t} d\varphi \\
 g' &= -\frac{M_x'k - k'M_x}{k^2} - \int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(t, \varphi), \varphi) \rho_*^2(t, \varphi) \frac{\partial \rho_*(t, \varphi)}{\partial t} \sin \varphi d\varphi \\
 h' &= \frac{M_y'k - k'M_y}{k^2} - \int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(t, \varphi), \varphi) \rho_*^2(t, \varphi) \frac{\partial \rho_*(t, \varphi)}{\partial t} \cos \varphi d\varphi
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Разрешая систему (1.11) относительно производных δ' , α_y' и α_x' и интегрируя затем полученные выражения по времени от 0 до некоторого текущего значения t , будем иметь

$$\delta(t) = \delta^0 + \int_0^t [(I_x I_y - I_{xy}^2) f' + (S_y I_{xy} - S_x I_y) g' + (S_x I_{xy} - S_y I_x) h'] \Delta d\tau$$

$$\alpha_y(t) = \alpha_y^{\circ} - \int_0^t [(S_y I_x - S_x I_{xy}) f' + (F I_{xy} - S_x S_y) g' + (S_x^2 - F I_x) h'] \Delta d\tau$$

$$\alpha_x(t) = \alpha_x^{\circ} - \int_0^t [(S_y I_{xy} - S_x I_y) f' + (F I_y - S_y^2) g' + (S_x S_y - F I_{xy}) h'] \Delta d\tau$$

$$\Delta \equiv (2S_x S_y I_{xy} - S_x^2 I_y - S_y^2 I_x + F I_x I_y - F I_{xy}^2)^{-1} \quad (1.13)$$

где аргумент τ (переменная интегрирования) у функций в подынтегральных выражениях опущен. Начальные значения внедрения δ° и углов перекоса α_y° , α_x° , определяющие мгновенную осадку штампа непосредственно перед началом его наращивания, находятся из системы линейных алгебраических уравнений, которая соответствует системе (1.10) при $t=0$. Эти значения определяются следующими выражениями:

$$\delta^{\circ} = [(I_x^{\circ} I_y^{\circ} - I_{xy}^{\circ 2}) P^{\circ} - (S_y^{\circ} I_{xy}^{\circ} - S_x^{\circ} I_y^{\circ}) M_x^{\circ} + (S_x^{\circ} I_{xy}^{\circ} - S_y^{\circ} I_x^{\circ}) M_y^{\circ}] \Delta^{\circ} / k^{\circ}$$

$$\alpha_y^{\circ} = -[(S_y^{\circ} I_x^{\circ} - S_x^{\circ} I_{xy}^{\circ}) P^{\circ} - (F^{\circ} I_{xy}^{\circ} - S_x^{\circ} S_y^{\circ}) M_x^{\circ} + (S_x^{\circ 2} - F^{\circ} I_x^{\circ}) M_y^{\circ}] \Delta^{\circ} / k^{\circ}$$

$$\alpha_x^{\circ} = -[(S_y^{\circ} I_{xy}^{\circ} - S_x^{\circ} I_y^{\circ}) P^{\circ} - (F^{\circ} I_y^{\circ} - S_y^{\circ 2}) M_x^{\circ} + (S_x^{\circ} S_y^{\circ} - F^{\circ} I_{xy}^{\circ}) M_y^{\circ}] \Delta^{\circ} / k^{\circ}$$

$$\Delta^{\circ} \equiv (2S_x^{\circ} S_y^{\circ} I_{xy}^{\circ} - S_x^{\circ 2} I_y^{\circ} - S_y^{\circ 2} I_x^{\circ} + F^{\circ} I_x^{\circ} I_y^{\circ} - F^{\circ} I_{xy}^{\circ 2})^{-1} \quad (1.14)$$

Градусом здесь и далее отмечаются величины, соответствующие начальному моменту времени $t=0$ и исходной конфигурации штампа.

Предположим теперь, что действующие на штамп опрокидывающие моменты M_x и M_y обусловлены только внецентренным приложением вдавливающей силы P (смысл понятия центрального приложения в случае штампа произвольной в плане конфигурации будет ясен из дальнейшего). Если точка приложения силы определяется координатами x_0 , y_0 в выбранной прямоугольной системе координат (x, y) , то моменты связаны с вдавливающей силой соотношениями

$$M_x = -P y_0, \quad M_y = P x_0 \quad (1.15)$$

Зададимся вопросом: в какой точке следует приложить силу P° в начальный момент времени $t=0$ и как должна смещаться со временем точка приложения силы P в плане штампа, чтобы углы перекоса α_x и α_y в течение всего периода загрузки и наращивания ($t \geq 0$) были равны нулю? При этом предполагается, что все кинематические параметры наращивания, а также функция δ^* заданы.

Положим во втором и третьем соотношениях (1.13) $\alpha_x = \alpha_y = 0$ при $t \geq 0$. Дифференцируя полученные уравнения по t , разрешая их относительно производных g' , h' и затем интегрируя по времени, получим

$$\frac{M_x}{k} = \frac{M_x^{\circ}}{k^{\circ}} - \int_0^t [(S_y I_{xy} - S_x I_y) (S_x^2 - F I_x) - (S_y I_x - S_x I_{xy}) (S_x S_y - F I_{xy})] G f' d\tau -$$

$$- \int_0^t \left\{ \int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(\tau, \varphi), \varphi) \rho_*^2(\tau, \varphi) \frac{\partial \rho_*(\tau, \varphi)}{\partial \tau} \sin \varphi d\varphi \right\} d\tau$$

$$\frac{M_y}{k} = \frac{M_y^{\circ}}{k^{\circ}} - \int_0^t [(S_y^2 - F I_y) (S_y I_x - S_x I_{xy}) - (S_y I_{xy} - S_x S_y - F I_{xy})] G f' d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \int_0^{2\pi} \delta^*(\rho_*(\tau, \varphi), \varphi) \rho_*^2(\tau, \varphi) \frac{\partial \rho_*(\tau, \varphi)}{\partial \tau} \cos \varphi d\varphi \right\} d\tau \quad (1.16)$$

$$G \equiv [(S_y^2 - F I_y) (S_x^2 - F I_x) - (S_x S_y - F I_{xy})^2]^{-1}$$

После определения моментов осадка штампа находится из первого уравнения (1.13). Подставляя выражения для моментов (1.16) в (1.15), найдем искомые функции $x_0(t)$ и $y_0(t)$, которые определяют смещение точки приложения силы $P(t)$, обеспечивающее отсутствие перекоса штампа.

Аналогичным образом, приравняв нулю правые части двух последних соотношений (1.14), получим значения моментов M_x° и M_y° , которые обеспечивают отсутствие перекоса штампа в момент приложения нагрузки к штампу ($t=0$) в исходной

конфигурации. Если моменты обусловлены только эксцентричным приложением вдавливающей силы P^0 , то по найденным значениям моментов M_x^0 , M_y^0 легко определяются координаты точки плана штампа, в которой должна прикладываться сила P^0 для предотвращения перекоса штампа:

$$\begin{aligned} x_0^0 &= M_y^0 / P^0 = [(S_y^0 I_x^0 - S_x^0 I_{xy}^0) (S_y^{02} - F^0 I_y^0) - (S_y^0 I_{xy}^0 - S_x^0 I_y^0) (S_x^0 S_y^0 - F^0 I_{xy}^0)] G^0 \\ y_0^0 &= -M_x^0 / P^0 = -[(S_y^0 I_{xy}^0 - S_x^0 I_y^0) (S_x^{02} - F^0 I_x^0) - (S_y^0 I_x^0 - S_x^0 I_{xy}^0) (S_x^0 S_y^0 - F^0 I_{xy}^0)] G^0 \\ G^0 &= [(S_x^0 S_y^0 - F^0 I_{xy}^0)^2 - (S_x^{02} - F^0 I_x^0) (S_y^{02} - F^0 I_y^0)]^{-1} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Определяемые соотношениями (1.17) моменты M_x^0 и M_y^0 входят в правые части (1.16). Подчеркнем, что соотношения (1.16) предполагают непрерывное при $t \geq 0$ смещение точки приложения вдавливающей силы из начальной позиции, задаваемой координатами (1.17).

2. Осесимметричная задача. Рассмотрим задачу о вдавливании в стержневое основание круглого в плане штампа, радиус которого увеличивается со временем. Примем, что опрокидывающие моменты равны нулю ($M_x = M_y = 0$), вдавливающая сила приложена в центре штампа $x = y = 0$, а функция δ^* , характеризующая начальное заглубление приращиваемых элементов штампа, зависит только от радиальной координаты. В рамках указанных ограничений задача становится осесимметричной. При этом будем иметь $S_x = S_y = I_{xy} = 0$, $g(t) = h(t) = 0$ и из системы (1.7) – (1.9) получаем $\alpha_x(t) = \alpha_y(t) = 0$.

Осадка штампа $\delta(t)$ определяется из следующего уравнения Вольтерры второго рода:

$$F(t) \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [F(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau = f(t) \quad (2.1)$$

$$F(t) = \pi \rho_*^2(t); \quad f(t) = \frac{P(t)}{k(t)} - 2\pi \int_0^t R^\vee(t, \tau) \delta^*(\rho_*(\tau)) \rho_*(\tau) \rho_*'(\tau) d\tau$$

Обращение уравнения (2.1) запишем в виде

$$\delta(t) = \frac{f(t)}{F(t)} + \int_0^t \frac{f(\tau)}{F(\tau)} Q(t, \tau) d\tau \quad (2.2)$$

где $Q(t, \tau)$ – резольвента ядра $\partial[F(\tau)F^{-1}(t)R^\vee(t, \tau)]/\partial\tau$. Если принять ядро релаксации материала основания в форме [2] ($\gamma = \text{const}$):

$$R(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \{k(\tau) - \varphi(\tau) [1 - \exp(-\gamma(t - \tau))]\} \quad (2.3)$$

то ядро уравнения (2.1) будем вырожденным и для резольвенты $Q(t, \tau)$ в (2.2) можно получить аналитическое выражение (соответствующие формулы довольно громоздки и здесь не приводятся).

В случае упругого стержневого основания из (2.1) (или из (1.11)) получаем ($k = k^0 = \text{const}$):

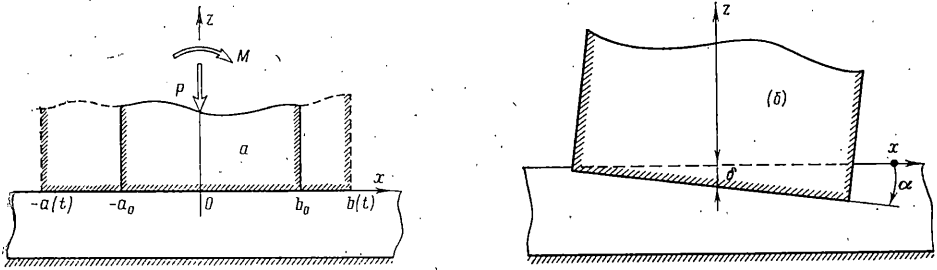
$$\delta'(t) = f'(t)/F(t), \quad f'(t) = P'(t)/k^0 - 2\pi \delta^*(\rho_*(t)) \rho_*(t) \rho_*'(t)$$

Проинтегрировав полученное выражение для $\delta'(t)$ с учетом начального условия $\delta^0 = P^0/(\pi k^0 \rho_0^2)$, будем иметь

$$\delta(t) = \frac{P^0}{\pi k^0 \rho_0^2} + \frac{1}{\pi k^0} \int_0^t \frac{P'(\tau)}{\rho_*^2(\tau)} d\tau - 2 \int_{\rho_0}^{\rho_*(t)} \frac{\delta^*(\rho)}{\rho} d\rho \quad (2.4)$$

где ρ_0 – исходный радиус штампа. Выражение (2.4) можно получить непосредственно из (1.13), (1.14).

При заданных функциях $P(t)$, $\rho_*(t)$ и $\delta^*(r)$ выражение (2.4) определяет изменение осадки растущего штампа со временем. Заметим, что если задана осадка $\delta(t)$, то любая из функций $P(t)$ и $\delta^*(r)$ может играть роль



Фиг. 3

«управляющего фактора», обеспечивающего заданное изменение осадки.

Пусть, например, при заданном законе увеличения внешнего радиуса подошвы штампа $\rho_*(t)$ и известных предварительных смещениях приращиваемых элементов $\delta^*(r)$ требуется поддерживать осадку, заданную непрерывной функцией $\delta_0(t)$, такой, что $\delta_0(0) = \delta^0$. Из (2.4) в этом случае получается, что вдавливающая сила должна изменяться следующим образом:

$$P(t) = P^0 + \pi k^0 \int_0^t \delta_0'(\tau) \rho_*^2(\tau) d\tau + 2\pi k^0 \int_{\rho_0}^{\rho_*(t)} \delta^*(\rho) \rho d\rho$$

Пусть теперь задан закон изменения вдавливающей силы $P(t)$ и закон наращивания штампа $\rho_*(t)$, а поддержание осадки $\delta_0(t)$ ($\delta_0(0) = \delta^0$) необходимо осуществить посредством надлежащего выбора функции δ^* . Из (2.4) находим, что предварительные смещения приращиваемых элементов для обеспечения заданного изменения осадки ядра штампа должны быть равны

$$\delta^*(\rho_*(t)) = \frac{1}{2\rho_*'(t)} \left[\frac{P'(t)}{\rho_*'(t)} - \delta_0'(t) \rho_*(t) \right]$$

Поскольку по предположению приращиваемые элементы сцепляются с основанием в момент срачивания, то во всех приведенных соотношениях функция $\delta^*(r)$ может принимать как положительные, так, вообще говоря, и отрицательные значения. Отрицательные значения функции $\delta^*(r)$ соответствуют возвышению точек подошвы штампа в области наращивания над недеформированной поверхностью основания.

3. Плоская задача. 3.1. Вязкоупругое основание. Обратимся к плоскому варианту задачи о взаимодействии растущего штампа со стержневым основанием. Положим, что координата y явным образом в постановке задачи не фигурирует, а все определяющие величины рассчитаны на единицу длины вдоль оси y . В этом случае, очевидно, должно быть $M_x = 0$, $\alpha_x = 0$.

Пусть в момент времени $t=0$ исходный штамп с плоской подошвой прикладывается к недеформированной границе основания на участке $-a_0 \leq x \leq z_0$ и загружается усилиями P^0 и $M_y^0 = M^0$. Начиная с момента времени $t=0$ осуществляется наращивание штампа в обе стороны вдоль оси x , а приложенные усилия изменяются со временем по законам $P(t)$ и $M(t)$. Наращивание производится таким образом, что участок контакта расширяется: $-a(t) \leq x \leq b(t)$ (фиг. 3, а), где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные монотонно возрастающие непрерывные функции.

В рассматриваемом случае система (1.7) — (1.9) приводится к следующим двум интегральным уравнениям относительно осадки δ точки $x=0$ и угла поворота штампа $\alpha_y = \alpha$:

$$[a(t) + b(t)] \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [a(\tau) + b(\tau)] R^*(t, \tau) \} d\tau + \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} [b^2(t) - a^2(t)] \alpha(t) - \int_0^t \alpha(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{2} [b^2(\tau) - a^2(\tau)] R^\vee(t, \tau) \right\} d\tau = \\
& = \frac{P(t)}{k(t)} - \int_0^t [\delta^*(-a(\tau)) a'(\tau) + \delta^*(b(\tau)) b'(\tau)] R^\vee(t, \tau) d\tau \\
& - \frac{1}{2} [b^2(t) - a^2(t)] \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{2} [b^2(\tau) - a^2(\tau)] R^\vee(t, \tau) \right\} d\tau + (3.2) \\
& + \frac{1}{3} [a^3(t) + b^3(t)] \alpha(t) - \int_0^t \alpha(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{3} [a^3(\tau) + b^3(\tau)] R^\vee(t, \tau) \right\} d\tau = \\
& = \frac{M(t)}{k(t)} + \int_0^t [\delta^*(-a(\tau)) a(\tau) a'(\tau) - \delta^*(b(\tau)) b(\tau) b'(\tau)] R^\vee(t, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

Здесь $R^\vee(t, \tau)$ — функция, характеризующая реологические свойства основания (введена в п. 1), а угол α отсчитывается как показано на фиг. 3, б.

3.2. Упругое основание. В случае упругого основания положим в (3.1), (3.2) $R^\vee(t, \tau) \equiv 1$ и продифференцируем полученные уравнения по t :

$$\begin{aligned}
(a+b) \delta' + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \alpha' &= f' \\
\frac{1}{2} (b^2 - a^2) \delta' + \frac{1}{3} (a^3 + b^3) \alpha' &= g'
\end{aligned} \quad (3.3)$$

где производные f' и g' в правых частях определяются формулами ($k = k^0 = \text{const}$):

$$\begin{aligned}
f' &= P'/k^0 - \delta^*(-a) a' - \delta^*(b) b' \\
g' &= M'/k^0 + \delta^*(-a) a a' - \delta^*(b) b b'
\end{aligned}$$

Разрешая уравнения (3.3) относительно производных δ' , α' и интегрируя полученные выражения по t , будем иметь

$$\delta(t) = \delta^0 + \int_0^t \left\{ \frac{1}{3} [a^3(\tau) + b^3(\tau)] f'(\tau) - \frac{1}{2} [b^2(\tau) - a^2(\tau)] g'(\tau) \right\} D(\tau) d\tau$$

$$\alpha(t) = \alpha^0 - \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} [b^2(\tau) - a^2(\tau)] f'(\tau) - [a(\tau) + b(\tau)] g'(\tau) \right\} D(\tau) d\tau$$

$$D(\tau) \equiv \left\{ \frac{1}{3} [a(\tau) + b(\tau)] [a^3(\tau) + b^3(\tau)] - \frac{1}{4} [b^2(\tau) - a^2(\tau)]^2 \right\}^{-1} \quad (3.4)$$

Здесь начальные значения функций равны ($D^0 = D(0)$):

$$\begin{aligned}
\delta^0 &= \left[\frac{1}{3} (a_0^3 + b_0^3) P^0 - \frac{1}{2} (b_0^2 - a_0^2) M^0 \right] D^0 / k^0 \\
\alpha^0 &= - \left[\frac{1}{2} (b_0^2 - a_0^2) P^0 - (a_0 + b_0) M^0 \right] D^0 / k^0
\end{aligned}$$

Выражения (3.4), разумеется, можно получить непосредственно из (1.13).

3.3. Плоский симметричный случай. Пусть штамп вдавливается в основание без перекоса, т. е. $M=0$, $a_0=b_0$, $a(t)=b(t)$. В этом случае из уравнения (3.2) следует, что $\alpha(t) \equiv 0$, а уравнение (3.1) принимает вид

$$a(t) \delta(t) - \int_0^t \delta(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [a(\tau) R^\vee(t, \tau)] d\tau = \frac{P(t)}{2k^0} - \int_0^t R^\vee(t, \tau) \delta^*(a(\tau)) a'(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Если ядро релаксации принять в форме (2.3), то решение уравнения (3.5) можно получить в аналитическом виде.

Остановимся на случае упругого основания. Полагая $R^*(t, \tau) = 1$ и дифференцируя уравнение (3.5) по t , будем иметь $\delta' = P' / (2k^0 a) - \delta^* (a)' / a$. Интегрируя это выражение по t , аналогично (2.4) получим

$$\delta(t) = \frac{P^0}{2k^0 a_0} + \frac{1}{2k^0} \int_0^t \frac{P'(\tau)}{a(\tau)} d\tau - \int_{a_0}^{a(t)} \frac{\delta^*(x)}{x} dx \quad (3.6)$$

Если вдавливающая сила и функция δ^* постоянны ($P = P^0 = \text{const}$, $\delta^* = \delta_0^* = \text{const}$), от осадка определяется простой формулой

$$\delta(t) = P^0 / (2k^0 a_0) - \delta_0^* \ln [a(t) / a_0] \quad (3.7)$$

Из этого выражения видно, что при $\delta_0^* > 0$ осадка уменьшается при наращивании штампа, т. е. ядро штампа «выталкивается» из основания за счет предварительного заглубления приращиваемых элементов. Из (3.7) можно найти полуширину штампа a^* , при достижении которой осадка ядра становится равной нулю: $a^* = a_0 \exp [P^0 / (2k^0 a_0 \delta_0^*)]$.

Выражение (3.6) позволяет проанализировать поведение растущего штампа в ряде других частных случаев.

Принятая в этой статье модель основания представляет собой обобщение модели упругого стержневого основания на случай вязкоупругости и старения материала. Исходная концепция стержневого упругого основания по-видимому, впервые была предложена в [3] и затем использована в [4] применительно к расчету железнодорожных шпал на грунтовой насыпи. В настоящее время эта модель основания носит название основания Винклера и широко применяется в практике расчета строительных сооружений. Применимость гипотезы Винклера в случае контакта узкого прямоугольного штампа с упругим основанием строго обоснована в [5].

В [6] рассмотрены плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой. Показано, что когда характерный размер области загрузки гораздо больше толщины слоя, то рассматриваемый слой в асимптотическом смысле ведет себя как вязкоупругий аналог основания Винклера.

В данной работе стержневое основание используется для решения задачи о взаимодействии растущего штампа с деформируемым полупространством или слоем в качестве первого приближения.

Отметим, что задача о наклонном штампе произвольной в плане неизменной формы на упругом полупространстве рассматривалась в [7]. Некоторые задачи для штампов сложной формы исследовались, в частности, в [8].

Остановимся вкратце на возможных приложениях контактных задач для растущих штампов. Задача о контактном взаимодействии растущего массивного тела с грунтовым основанием возникает, например, при анализе подвижек ледников, геометрическая форма и опорная поверхность которых изменяются за счет осадения и намерзания дополнительных объемов снега и льда.

В рамки рассмотренной постановки укладывается также следующая задача из области биомеханики. В принципе, в качестве растущего штампа, взаимодействующего с деформируемым основанием, можно интерпретировать развивающуюся корневую систему некоторых массивных деревьев. Вдавливающая сила при этом определяется собственным весом ствола и кроны дерева, а опрокидывающие моменты могут быть обусловлены воздействием ветра. Из биологии растений известно, что при длительных интенсивных ветровых нагрузках корневая система дерева адаптируется путем разрастания таким образом, чтобы исключить появление чрезмерных наклонов ствола. Представленная выше механическая модель вдавливания растущего штампа может быть использована для прикладной оценки кинематических и геометрических параметров наращивания корневой системы.

Наконец, заметим, что рассмотренные постановки задач принципиально отличаются от задач о внедрении жестких штампов с выпуклой искривленной подошвой, когда область контакта расширяется при увеличении осадки штампа. В таких задачах область контакта должна находиться в ходе решения задачи и по существу определяется конфигурацией штампа, свойствами основания и действующей нагрузкой на штамп. В задачах для растущих штампов ситуация значительно усложняется за счет введения дополнительной независимой кинематической характеристики — закономерности разрастания штампа. Кроме того, здесь предусматривается возможность предварительного заглубления приращиваемых слоев штампа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона // Докл. АН АрмССР: 1947. Т. 7. № 5. С. 203-209.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука: 1983. 336 с.
3. Winkler E. Lehre von Elastizität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. B. 1. Prag: Dominicus. 1867. 388 s.
4. Zimmermann H. Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues. В.: Ernst und Korn. 1888. 308 s.
5. Галин Л. А. О гипотезе Циммермана-Винклера для балок // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 4. С. 293-300.
6. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ. 1983. № 5. С. 153-158.
7. Fabrikant V. I. Inclined flat punch of arbitrary shape on an elastic half-space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1986. V. 53. No. 4. P. 798-806.
8. Реачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка. 1977. 235 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1987