МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1988

УДК 539.3

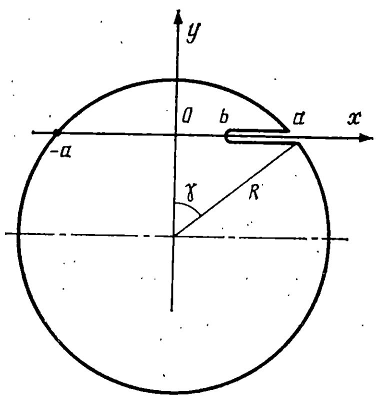
КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРОДОЛЬНЫМ ПЛОСКИМ НЕРАДИАЛЬНЫМ НАДРЕЗОМ

ГРИБОВА М. Б., НУЛЛЕР Б. М.

Задаче Сен-Венана о кручении кругового цилиндра с плоскими радиальными разрезами посвящены работы [1–4]. В них решения осуществлялись при помощи конформных отображений, методом Фурье, методом парных уравнений. В публикуемой работе применяется иной метод, позволяющий свести к задаче Римана и решить в квадратурах задачи кручения, изгиба и некоторые бигармонические задачи для круга с произвольным нерадиальным надрезом.

1. Рассмотрим кручение упругого цилиндра, круговое сечение которого имеет надрез $b<x<a$, $y=0$ (фиг. 1), выходящий на граничную окружность под углом γ, где $a=R\sin\gamma$, R – радиус цилиндра, $0<\gamma<\pi$. Введем биполярные координаты (α, β) с полюсами в точках $(\pm a, 0)$. Тогда в силу соотношений между декартовыми и биполярными координатами

$$x=a\,\mathrm{sh}\,\alpha\,(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^{-1},\qquad y=a\sin\beta\,(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)^{-1} \tag{1}$$



Фиг. 1

граничные дуги окружности будут координатными линиями $\beta=\gamma$ при $y>0$ и $\beta=\gamma-\pi$ при $y<0$ $(\alpha\in(-\infty, \infty))$, линии $\beta=0$ и $\alpha=0$ совпадут с осями OX и OY. При этом касательные напряжения определяются формулами [5]:

$$\tau_{\alpha z}=\frac{G\theta}{h}\frac{\partial u}{\partial\beta},\qquad \tau_{\beta z}=-\frac{G\theta}{h}\frac{\partial u}{\partial\alpha} \tag{2}$$

$$\Delta u=-2,\quad h=a(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^{-1}$$

Здесь G – модуль сдвига, θ – угол закручивания на единицу длины цилиндра, Δ – оператор Лапласа.

Согласно (1) и (2), краевая задача для круга с надрезом относительно функции напряжений $u(\alpha, \beta)$ принимает вид

$$\Delta u=-2,\quad u(\alpha,\gamma)=0,\quad u(\alpha,\gamma-\pi)=0\quad (\alpha\in(-\infty,\infty))$$
$$u(\alpha\pm 0)=0\quad (\alpha\in(s,\infty),\quad s=\ln[(a+b)/(a-b)]) \tag{3}$$

Сделав замены $u=v-y^2$ и $\alpha=\varphi+s$, получим из (3) краевую задачу

$$\partial^2 v/\partial\varphi^2+\partial^2 v/\partial\beta^2=0 \tag{4}$$

$$v(\varphi,\gamma)=\frac{R^2\sin^4\gamma}{[\mathrm{ch}(\varphi+s)+\cos\gamma]^2},\qquad v(\varphi,\gamma-\pi)=\frac{R^2\sin^4\gamma}{[\mathrm{ch}(\varphi+s)-\cos\gamma]^2}$$

$$v(\varphi,\pm 0)=0\quad (\varphi\in(0,\infty))$$

Решение будем искать в виде интегралов Лапласа

$$v_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L [A_k(p)\cos\beta p+B_k(p)\sin\beta p]e^{p\varphi}\,dp$$

где l – мнимая ось, $k=1$ при $y>0$ и $k=2$ при $y<0$.

Тогда условия (4) можно записать в виде основных условий

$$v_1(\varphi,\gamma)=\frac{R^2\sin^4\gamma}{[\operatorname{ch}(\varphi+s)+\cos\gamma]^2},\quad v_2(\varphi,\gamma-\pi)=\frac{R^2\sin^4\gamma}{[\operatorname{ch}(\varphi+s)-\cos\gamma]^2}$$
$$v_1(\varphi,0)-v_2(\varphi,0)=0\quad (\varphi\in(-\infty,\infty))$$

используя которые, получим соотношения [6]:

$$A_1(p)=A_2(p)\equiv A(p)$$
$$B_1(p)=F_1/\sin\gamma p-A(p)\operatorname{ctg}\gamma p$$
$$B_2(p)=F_2/\sin(\gamma p-\pi p)-A(p)\operatorname{ctg}(\gamma p-\pi p)$$
$$F_1=2\pi R^2\sin\gamma(\sin\pi p)^{-1}e^{sp}[p\sin\gamma\cos\gamma p-\sin\gamma p\cos\gamma]$$
$$F_2=2\pi R^2\sin\gamma(\sin\pi p)^{-1}e^{sp}[p\sin\gamma\cos(\gamma p-\pi p)-$$
$$-\sin(\gamma p-\pi p)\cos\gamma]$$

а также смешанных условий

$$v_*(\varphi)\equiv\frac{\partial}{\partial\beta}[v_1(\varphi,\beta)-v_2(\varphi,\beta)]_{\beta=0}=0\quad(\varphi\leqslant 0)$$
$$v_1(\varphi,0)=0\quad(\varphi>0)$$

Эти условия связывают трансформанты Лапласа равенствами [7]:

$$V^+_{(p)}=A(p)K(p)+C(p),\qquad V^-(p)=A(p) \tag{5}$$

$$K(p)=\frac{p\sin\pi p}{\sin\gamma p\sin(\gamma p-\pi p)},\qquad C(p)=\frac{2\pi R^2p^2e^{sp}\sin^2\gamma}{\sin\gamma p\sin(\pi p-\gamma p)}$$

$$V^+(p)=\int\limits_0^\infty v_*(\varphi)e^{-p\varphi}d\varphi,\qquad V^-(p)=\int\limits_{-\infty}^0 v_1(\varphi,0)e^{-p\varphi}d\varphi\quad(p\in L)$$

Для решения задачи Римана (5) функцию $K(p)$ можно факторизовать в виде

$$K(p)=K^+(p)/K^-(p) \tag{6}$$
$$K^+(p)=\pi\Gamma(1+\varkappa p)\Gamma(1+(1-\varkappa)p)[\gamma(\gamma-\pi)\varkappa^{p\varkappa}(1-$$
$$-\varkappa)^{p(1-\varkappa)}\Gamma(1+p)]^{-1}$$
$$K^-(p)=\Gamma(1-p)[\varkappa^{p\varkappa}(1-\varkappa)^{p(1-\varkappa)}\Gamma(1-\varkappa p)\Gamma(1-(1-\varkappa)p)]^{-1}$$
$$\varkappa=\gamma/\pi\quad(0<\varkappa<1)$$

Тогда функции $K^\pm(p)$ регулярны и не имеют нулей при $\mp\operatorname{Re}p<1$, $K^\pm(p)=O(|p|^{\pm 1/2})$ при $|p|\to\infty$ и $\pm\operatorname{Re}p\geqslant 0$. Разделив (5) на $K^+(p)$, получим задачу о скачке

$$V^+(p)/K^+(p)=V^-(p)/K^-(p)+C(p)/K^+(p)\quad(p\in L) \tag{7}$$

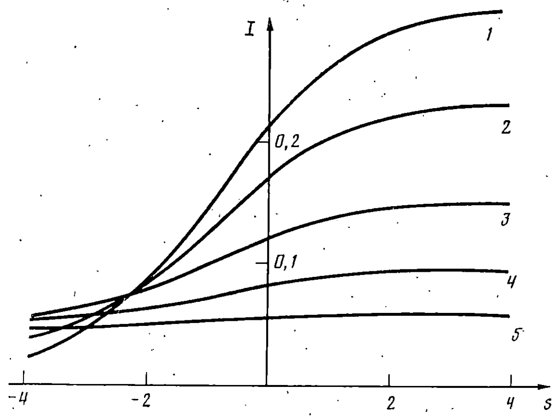
со свободным членом, удовлетворяющим на L условию Гёльдера. Решение этой задачи [8]:

$$V=\frac{K(p)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{C(t)\,dt}{K^+(t)(t-p)} \tag{8}$$

определяет коэффициент $A(p)=V^-(p)$ и, следовательно, функцию напряжений $u(\alpha,\beta)$.

Связь между крутящим моментом M и углом закручивания θ [5]:

$$M=2G\theta D,\qquad D=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\gamma-\pi}^{\gamma}h^2u(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta \tag{9}$$



Фиг. 2

можно несколько упростить. За счет вычисления квадратуры (9) от y^2 получим

$$D=\frac{\pi a^4}{4}\frac{4\sin^2\gamma-5}{\sin^2\gamma}+a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{\gamma-\pi}^{0}\frac{v_2\,d\beta}{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)^2}+\int\limits_{0}^{\gamma}\frac{v_1\,d\beta}{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)^2}\right]d\alpha$$

Асимптотика касательных напряжений $\tau_{\beta z}$ на продолжении надреза согласно (2) и оценкам трансформант [7] имеет вид

$$\tau_{\beta z}(\alpha,0)\sim N(\alpha-s)^{-1/2}\quad(\alpha\to s)$$

$$N=(G\theta/a)(1+\operatorname{ch}s)\lim_{p\to-\infty}\left[pV^-(p)\sqrt{-p}/\sqrt{\pi}\right]$$

где N — коэффициент интенсивности напряжений.

Переходя к пределу, с учетом (6) и (8) в общем случае имеем

$$N=iaG\theta\sqrt{\frac{\varkappa(1-\varkappa)}{2}}(1+\operatorname{ch}s)\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{t^2e^{st}\varkappa^{t\varkappa}(1-\varkappa)^{t(1-\varkappa)}\Gamma(1+t)\,dt}{\sin\pi\varkappa t\,\sin\pi(1-\varkappa)t\,\Gamma(1+t\varkappa)\,\Gamma[1+t(1+\varkappa)]}\tag{10}$$

При $\varkappa=1/2$ и $s=0$ интеграл (10) можно выразить в элементарных функциях, что приводит к простому результату: $N=-16\sqrt{2}(15\pi)^{-1}G\theta R$. Полученное значение N было найдено и другим путем — из решения краевой задачи в полярных координатах с полюсом в точке $x=0$, $y=0$ для круга с разрезом в виде радиуса. Оно послужило проверкой при вычислении N по формуле (10), преобразованной к виду

$$N=-\sqrt{2}\,aG\theta(1+\operatorname{ch}s)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{y^2\cos(\eta y+\psi)\,dy}{\sqrt{\pi y}\,\operatorname{sh}\pi y\,\operatorname{sh}\pi\varkappa y\,\operatorname{sh}\pi(1-\varkappa)y}$$

$$\eta=s+\varkappa\ln\varkappa+(1-\varkappa)\ln(1-\varkappa)$$

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\varkappa(1-\varkappa)}{(n/y)^3+(1-\varkappa+\varkappa^2)n/y}$$

удобному для численного анализа. Графики функции $I=-\sqrt{\pi}N(4G\theta R)^{-1}$ при $\varkappa=1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$ (соответственно кривые *1*—*5*) показаны на фиг. 2, где по оси абсцисс отложена координата $\alpha=s$ концевой точки надреза.

Изложенным методом можно решить в квадратурах различные задачи Сен-Венана об изгибе и кручении составных брусьев произвольного луночного сечения, ослабленного надрезом; достаточно, чтобы надрез, проходящий по границе раздела материалов или вне ее, совпадал с какой-либо координатной линией $\beta=\mathrm{const}$ — дугой окружности или отрезком прямой. При этом частное решение уравнения Пуассона (2) должно удовлетворять второму условию (3). В противном случае второе условие (4) становится неоднородным, экспоненциальная сходимость интеграла типа (10) утрачивается, существование этого интеграла ставится под вопрос из-за слабого убывания на L свободного члена задачи (7).

Метод применим также к смешанным бигармоническим задачам изгиба и плоской деформации упругих областей луночной формы [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз. 1963. 686 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Зильберглейт А. С., Суслова И. Б.* Кручение упругого стержня круглого сечения, ослабленного произвольным числом радиальных трещин, выходящих на поверхность // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 271. № 2. С. 319–323.
4. *Кулиев С. А.* О задаче кручения бруса, ослабленного прямолинейным разрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 70–75.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1967. 402 с.
6. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 279 с.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз. 1963. 639 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука. 1969. 343 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 24.VII.1986