

УДК 539.3

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ  
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ КОНТУРА КОНТАКТА  
И ФОРМУЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ  
С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

КЕРЧМАН В. И.

При решении задач нормального контакта для упругого тела обычно исходят из постановки экстремальной задачи для квадратичного функционала энергетического типа на выпуклом множестве функций, удовлетворяющих заданным односторонним ограничениям в области, содержащей неизвестную линию раздела граничных условий — границу контакта [1—6]. Предлагается подход, основанный на экстремальных свойствах границ контакта [5, 7—9]. В настоящей работе строятся выражения для первой и второй вариаций линейных функционалов от решений смешанных задач пространственной теории упругости для трещин и штампов при изменении их формы в плане. Предложена градиентная процедура отыскания неизвестной границы, и проводится анализ чувствительности границы контакта относительно изменений осадки и профиля штампа, раскрывающих трещину нагрузок и других факторов.

1. Рассмотрим задачу об определении области раскрытия щели между прижатыми друг к другу полупространствами или об отыскании подобласти налегания без трения берегов уплощенной полости  $|z| \leq H(\mathbf{r})$  в упругом пространстве под действием ортогональных и симметричных относительно плоскости  $S(z=0)$  нагрузок. Здесь  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$  — точка плоскости  $S$ . В этой задаче Синьорини [1, 10] с заранее неизвестной областью нарушения контакта  $G^0$  нормальные давления на составляющие тело с разрезом  $G^0$  полупространства  $p(\mathbf{r}) = -\sigma_{zz}|_S$  и перемещения точек поверхности  $w(\mathbf{r})$  полупространства  $z \geq 0$  должны удовлетворять условиям в виде альтернативных равенств и неравенств [5, 6, 8]:

$$p(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \in G^0), \quad w(\mathbf{r}) + H(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in S \setminus G^0) \quad (1.1a)$$

$$p(\mathbf{r}) > Q(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \in \Omega \setminus G^0), \quad w(\mathbf{r}) + H(\mathbf{r}) > 0 \quad (\mathbf{r} \in G^0) \quad (1.1b)$$

Здесь  $G^0 \subset \Omega$ , где  $\Omega$  — заданная область возможного разрыва, контур которой будем рассматривать как ограничение на допустимые границы контакта. Будем считать также, что в условиях (1.1)  $H(\mathbf{r}) = 0$  с соответственно измененными нагрузками  $Q(\mathbf{r})$  [5]. Для задачи (1.1a) с линией раздела граничных условий  $\Gamma = \partial G$  можно построить псевдодифференциальный оператор  $\Lambda_G$ , связывающий перемещения и нормальные давления на плоскости  $S$  в теле с разрезом  $G \subset S: p(\mathbf{r}) = \Lambda_G w$  [11, 12], так что условия (1.1) можно переписать в виде

$$\Lambda_G w(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}), \quad w(\mathbf{r}) > 0 \quad (\mathbf{r} \in G^0) \quad (1.2)$$

$$\Lambda_G w(\mathbf{r}) \geq Q(\mathbf{r}), \quad w(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in \Omega \setminus G^0)$$

В [5, 8, 9] показано, что из всех допустимых областей нарушения контакта  $G \subset \Omega$  ( $\Gamma$  — их границы) истинному контуру  $\Gamma^0$  возникающей по плоскости  $S$  щели отвечает максимальный объем образовавшейся полости

$$V[\Gamma] = 2 \int_G w(\mathbf{r}, G) ds \quad (1.3)$$

где  $w(\mathbf{r}, G)$  — нормальные перемещения берегов разреза  $G$  при заданных нормальных нагрузках  $Q(\mathbf{r})$ .

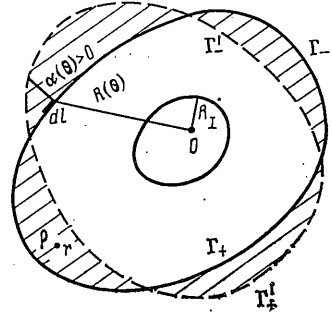
Получим явные выражения для вариаций функционала (1.3) при изменении области  $G$ . Формулы первой вариации решения для расширяющейся трещины, полученные на основе инкрементального анализа поля перемещений, рассмотрены в [13, 14]. Здесь предлагается общий подход, причем можно оценить условия применимости выражений для первой и второй вариаций. Для простоты рассматриваются области (фигура) ( $r=|\mathbf{r}|$ ):

$$G = \{(r, \theta) : R_1(\theta) \leq r \leq R(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (1.4)$$

В [8] получено выражение для разности объемов трещин, имеющих в плане форму  $G'$  и  $G$  соответственно, при действии одного и того же поля нагрузок  $Q(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} V[\Gamma'] - V[\Gamma] = & 2 \iint_{G' \setminus G} w(\mathbf{r}, G') [1 - t_1(\mathbf{r}; \Gamma)] ds + \\ & + 2 \iint_{G \setminus G'} [p(\mathbf{r}, G') - Q(\mathbf{r})] v_1(\mathbf{r}; \Gamma) ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $w(\mathbf{r}, G')$  и  $p(\mathbf{r}, G')$  — нормальные перемещения и давления по решению задачи для разреза  $G'$  при действии нагрузки  $Q(\mathbf{r})$ ;  $v_1(\mathbf{r}; \Gamma)$  и  $t_1(\mathbf{r}; \Gamma)$  — перемещения и давления для невозмущенной трещины  $G$  при действии равномерной «единичной» нагрузки.



Пусть контур  $\Gamma'$  близок к контуру  $\Gamma$ , так что  $R(\theta) \rightarrow R(\theta) + \delta R(\theta)$ , и функции, описывающие вариацию граничного контура, малы в норме  $C^2(0, 2\pi)$ . Приведем формулы только для вклада вариации внешней контурной кривой  $\delta R(\theta)$  ( $\varepsilon = \|\delta R/R\|_{C^2} \ll 1$ ). Отметим, что входящие в (1.5) функции имеют следующие асимптотические выражения в «узкой» заштрихованной области [14, 15]:

в подобласти  $G' \setminus G$  с границей  $\Gamma_+ \cup \Gamma'_+$  (при  $\delta R > 0$ ):

$$t_1(\mathbf{r}; \Gamma) = -N_1[\theta; R(\cdot)] [1 + O(\rho)] [\rho(\mathbf{r}, \Gamma)]^{-1/2} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}, G') = & (2/D) \{N_q[\theta; R(\cdot)] + \delta N_q[\theta; R(\cdot), \delta R(\cdot)] + o(\varepsilon)\} \times \\ & \times [\rho(\mathbf{r}, \Gamma')]^{1/2} [1 + O(\rho')] \end{aligned} \quad (1.7)$$

в подобласти  $G \setminus G'$  с границей  $\Gamma_- \cup \Gamma'_-$  (при  $\delta R < 0$ ):

$$v_1(\mathbf{r}; \Gamma) = (2/D) N_1[\theta; R(\cdot)] [\rho(\mathbf{r}, \Gamma)]^{1/2} [1 + O(\rho)] \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, G') = & -\{N_q[\theta; R(\cdot)] + \delta N_q[\theta; R(\cdot), \delta R(\cdot)] + o(\varepsilon)\} \times \\ & \times [\rho(\mathbf{r}, \Gamma')]^{-1/2} [1 + O(\rho')] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $N_q[\theta; R(\cdot)]$  и  $N_1[\theta; R(\cdot)]$  — коэффициенты интенсивности нормальных напряжений вдоль контура  $\Gamma$  плоского разреза  $G$  при действии нагрузок  $Q(\mathbf{r})$  и  $q=1$  соответственно;  $\delta N_q[\theta; R(\cdot), \delta R(\cdot)]$  — вариация коэффициента интенсивности при вариации области, задаваемой функцией  $\delta R(\theta)$  ( $\delta N_q = O(\varepsilon)$ );  $D = E[2(1-\nu^2)]^{-1}$  — константа упругости;  $\rho = \rho(\mathbf{r}, \Gamma)$  — расстояние от точки  $\mathbf{r}$  по нормали до соответствующей точки контура  $\Gamma$ ;  $\rho' = \rho(\mathbf{r}, \Gamma')$  — расстояние до контура  $\Gamma'$ . Обозначим  $\alpha(\theta)$  расстояние по нормали от контура  $\Gamma$  до контура  $\Gamma'$ , взятое со знаком: положительным для вариаций  $\Gamma'$  за пределами области  $G$  и отрицательным в точках, где  $\Gamma'$  остается внутри «базового» разреза  $G$ ; для этой нормальной вариации контура употребляется также обозначение  $\delta\Gamma$ . В локальных координатах  $(l(\theta), \rho)$ , где  $dl$  — элемент длины дуги вдоль  $\Gamma$ , главные члены интегралов в (1.5) принимают вид ( $\rho' = (|\alpha| - \rho) [1 + O(\varepsilon)]$ ):

$$\delta' V = \frac{4}{D} \int_{\Gamma_+}^{\alpha(\theta)} \left\{ \int_0^{\alpha(\theta) - \rho} N_q[\theta; \Gamma] \sqrt{\alpha(\theta) - \rho} \left( 1 + \frac{N_1[\theta; \Gamma]}{\sqrt{\rho}} \right) d\rho \right\} dl(\theta) +$$

(1.10)

$$+ \frac{4}{D} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{|\alpha(\theta)|} \left[ -\frac{N_Q[\theta; \Gamma]}{V|\alpha(\theta)|-\rho} - Q(r) \right] N_1[\theta; \Gamma] \sqrt{\rho} d\rho \right\} dl(\theta)$$

Если нагрузка  $Q(r)$  ограничена в окрестности контура  $\Gamma$ , то с точностью до малых порядка  $\varepsilon^2$  из (1.10) получим

$$\delta'V = \frac{2\pi}{D} \int_{\Gamma} \{N_Q[\theta; \Gamma]N_1[\theta; \Gamma]\alpha(\theta) + O(|\alpha|^{3/2})\} dl(\theta) \quad (1.11)$$

Таким образом, первую вариацию функционала объема (1.3) можно записать в виде

$$\delta V[\Gamma; \delta\Gamma] = \frac{2\pi}{D} \int_{\Gamma} N_Q[l; \Gamma]N_1[l; \Gamma]\delta\Gamma dl \quad (1.12)$$

Для параметрического представления границы в полярных координатах выразим аналогично [16]  $\alpha(\theta)$  и  $dl(\theta)$  через функции, задающие контур  $\Gamma$  и его вариацию (точка означает производную по  $\theta$ )

$$\alpha(\theta) = R(\theta)\delta R(\theta)(R^2 + R'^2)^{-1/2}, \quad dl(\theta) = (R^2 + R'^2)^{1/2}d\theta \quad (1.13)$$

Подставляя эти выражения в (1.1), приведем формулу для вариации к виду

$$\delta V[\Gamma; \delta R(\cdot)] = \frac{2\pi}{D} \int_0^{2\pi} N_Q[\theta; \Gamma]N_1[\theta; \Gamma]R(\theta)\delta R(\theta)d\theta \quad (1.14)$$

При варьировании внутренней границы  $\{R_I(\cdot)\}$  вклад в первую вариацию  $\delta V[\Gamma; \delta R(\cdot)]$  имеет аналогичный (1.14) вид относительно  $\delta R_I(\theta)$ , но с противоположным знаком.

Для истинной границы контакта  $\Gamma^0 : \{R^0(\cdot)\}$  в задаче с односторонними ограничениями (1.2) первая вариация (1.14) при допустимых двусторонних вариациях  $\delta R(\theta)$  обращается в нуль, и потому на участках контура  $\Gamma^0$ , лежащих строго внутри области  $\Omega$ , выполняется условие конечности напряжений:  $N_Q[\theta; R^0(\cdot)] = 0$ . Для участков  $\gamma$  границы контакта, выходящих на контур  $L$  допустимой области  $\Omega$ , возможные вариации должны удовлетворять условию  $\delta\Gamma \leq 0$ , так что из условия экстремума  $\delta V \leq 0$  вытекает  $N_Q|_{\gamma} \geq 0$ .

Для контуров  $\Gamma'$ , близких к экстремальному  $\Gamma^0$ , коэффициенты интенсивности напряжений на возмущенном контуре  $N_Q[\theta; \Gamma']$  совпадают с точностью до малых высшего порядка с вариациями стационарного коэффициента интенсивности (далее пренебрегаем неварьируемыми участками  $\gamma$ ). Принимая теперь для областей  $G'$ , близких к  $G^0$ , более точные асимптотические выражения (1.6) и (1.8) с использованием в качестве коэффициентов интенсивности вариаций  $\delta N_Q[\Gamma^0; \delta\Gamma]$ , из (1.5) и (1.10) получим формулу для второй вариации функционала объема

$$\delta^2 V[\Gamma^0; \delta\Gamma] = \frac{2\pi}{D} \int_{\Gamma^0} \delta N_Q[l; \Gamma^0; \delta\Gamma]N_1[l; \Gamma^0]\delta\Gamma(l) dl \quad (1.15)$$

Поскольку в окрестности экстремального контура  $\Gamma^0$  должно выполняться условие  $\delta^2 V[\Gamma^0; \delta\Gamma] \leq 0$ , из (1.15) видно, что вариации коэффициента интенсивности должны удовлетворять неравенству  $\delta N_Q \cdot \delta\Gamma \leq 0$ . Таким образом, на участках контура, где вариации  $\Gamma'$  остаются внутри области  $G^0$ , будет  $\delta N_Q[\Gamma^0; \delta\Gamma] \geq 0$  (концентрация растягивающих напряжений) и, наоборот, для вариаций  $\Gamma'$  за пределами экстремальной области  $G^0$  — там, где  $\delta\Gamma > 0$ , получается концентрация сжимающих напряжений ( $N_Q[\theta; \Gamma'] \leq 0$ ), которой отвечает физически недопустимый формальный «перехлест» берегов трещины  $G'$ .

Выражение для первой вариации (1.14) можно применить для отыскания неизвестного контура трещины  $\Gamma^0$ , реализующего максимум функ-

ционала (1.3), с помощью процедуры градиентного типа [16, 17]. Для односвязной области имеем

$$R^{h+1}(\theta) = R^h(\theta) \{1 + \lambda N_Q[\theta; R^h(\cdot)] N_1[\theta; R^h(\cdot)]\} \quad (1.16)$$

где параметр  $\lambda$  на каждом шаге находится из решения одномерной экстремальной задачи.

Формулы (1.14)–(1.16) удобно интерпретировать с точки зрения «направления» изменения границы контакта в задачах с односторонними ограничениями при последовательном нагружении, т. е. как формулы чувствительности неизвестного контура трещины к изменению нагрузки. Пусть контур  $\Gamma^Q = \{R^Q(\cdot)\}$  экстремальный при действии нагрузки  $Q(\mathbf{r})$ , а  $\delta Q(\mathbf{r})$  — малое приращение нагрузки. Приближенная форма контура  $\Gamma^{Q+\delta Q} = \{R^{Q+\delta Q}(\cdot)\}$ , отвечающего состоянию догрузки  $Q + \delta Q$ , может быть построена по формуле градиентного варьирования

$$R^{Q+\delta Q}(\theta) = R^Q(\theta) \{1 + \lambda N_{Q+\delta Q}[\theta; R^Q(\cdot)] N_1[\theta; R^Q(\cdot)]\} \quad (1.17)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу отыскания неизвестного контура трещины, близкой к круговой, при действии нагрузки

$$Q(\mathbf{r}; \varepsilon) = q_0 [1 - 3(r/a)^2 (1 - \varepsilon \cos^2 \theta)] \quad (1.18)$$

Для круглой трещины радиуса  $b$

$$w_1(\mathbf{r}; b) = 2(b^2 - r^2)^{1/2} / (\pi D), \quad N_1(\theta; b) = (2b)^{1/2} / \pi$$

При  $\varepsilon = 0$  объем трещины равен [8]:

$$V(b; 0) = 2 \int \int_{|r| \leq b} Q(\mathbf{r}; 0) w_1(\mathbf{r}; b) ds = \frac{8q_0}{D} \left( \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5a^2} \right)$$

Контур  $\{R = b_0\}$ , для которого удовлетворяются односторонние ограничения (1.2), определяется из условия  $\partial V / \partial b = 0$ , откуда  $b_0 = a$ . Для неосесимметричной нагрузки (1.18) на контуре исходной круговой трещины имеем

$$N_Q|_{r=b_0} = q_0 (2b_0)^{1/2} [1 - b_0^2/a^2 + 1/2 \varepsilon b_0^2 (1 + 1/5 \cos 2\theta) / a^2] / \pi$$

и при  $b_0 = a$  по (1.17) получаем градиентную вариацию границы контакта

$$\delta R(\theta) = \lambda a \varepsilon (1 + 1/5 \cos 2\theta) \quad (1.19)$$

Рассмотрим случай свободно распространяющейся трещины, т. е. при возможности продвижения в зонах, где  $N_Q > 0$ . Контур возмущенной трещины при любом знаке  $\varepsilon$  близок к эллиптическому  $\Gamma_\lambda$  с полуосями  $A = a(1 + 9\lambda\varepsilon/5)$ ,  $B = a(1 + \lambda\varepsilon/5)$ . Объем трещин для семейства варьируемых контуров  $\Gamma_\lambda$  вычисляется [8] с помощью известного «единичного» решения для эллиптического разреза [11] (интегрирование по площади эллипса  $X^2/A^2 + Y^2/B^2 \leq 1$ ):

$$V(\lambda) = \left\{ \frac{B}{A} \right\} \cdot \frac{2\pi AB q_0}{5DE(e)} \left[ \frac{10}{3} - \frac{A^2}{a^2} (1 - \varepsilon) - \frac{B^2}{a^2} \right] \quad (1.20)$$

$$(\lambda \varepsilon \geq 0, e^2 = 1 - B^2/A^2; \lambda \varepsilon < 0, e^2 = 1 - A^2/B^2)$$

С точностью до малых порядка  $(\lambda\varepsilon)^3$  при любом знаке  $\varepsilon$  из (1.20) получим  $V(\lambda; \varepsilon) = 1/5 a^3 q_0 D^{-1} [1/3 + \varepsilon + 33/5 \lambda \varepsilon^2 - \lambda^2 \varepsilon^2 (66/5 - 78/5 \varepsilon)]$  и из условия максимума находим  $\lambda = 33 / (132 - 156\varepsilon) \approx 1/4 - 13\varepsilon/44$ .

Сопоставим получающуюся форму неизвестной границы с точным решением, которое находится из требования максимальности (1.20) как функции двух переменных. Для определенности рассмотрим случай  $\varepsilon > 0$  и выразим объем трещины через большую полуось  $A$  и эксцентриситет  $e$ . Из условий экстремума  $\partial V / \partial A = \partial V / \partial e = 0$  получим систему

$$A^2(2 - \varepsilon - e^2) - 2a^2 = 0 \quad (1.21)$$

$$[8/5 - 4(1 - e^2)(2 - \varepsilon - e^2)^{-1}] e^2 E(e) - 1/3(1 - e^2) [K(e) - E(e)] = 0$$

Главные члены асимптотики решения этой системы при малых  $\varepsilon$  имеют вид  $e^2 = \frac{4}{5}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ,  $A = a[1 + \frac{9}{20}\varepsilon + O(\varepsilon^2)]$ , что соответствует первому приближению, полученному выше по формуле чувствительности. Так, при  $a=1$ ,  $\varepsilon=0,05$  величины полюсов, найденные решением точных уравнений (1.21),  $A^s=1,0234$ ,  $B^s=1,0024$ , а их значения по (1.19)  $A_1=1,0238$ ,  $B_1=1,0026$ ; при  $\varepsilon=0,12$  соответственно точные значения  $A^s=1,0585$ ,  $B^s=1,0081$ , а приближенные  $A_1=1,063$ ,  $B_1=1,007$ .

2. Рассмотрим пространственную задачу о вдавливании гладкого штампа в плоскую грань  $S_0$  упругого тела ( $S_0$  — часть плоскости  $z=0$ ). Пусть положение точек штампа относительно  $S_0$  задается функцией  $z=F(\mathbf{r}) = -h + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 - f(\mathbf{r})$ , где  $f(\mathbf{r})$  описывает форму штампа при нулевом внедрении,  $h$  — внедрение (осадка) штампа,  $\beta_1, \beta_2$  — коэффициенты наклона. Действительной площадке контакта  $G^\circ$ , для которой удовлетворяются условия в виде альтернативных равенств и неравенств [1—3, 7]

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}) &= F(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r}) \geq 0 \quad (\mathbf{r} \in G^\circ) \\ w(\mathbf{r}) &> F(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{r} \in S_0 \setminus G^\circ) \end{aligned} \quad (2.1)$$

отвечает максимальное значение вдавливающей силы как функционала от неизвестной области контакта  $G$  с границей  $\Gamma$ :

$$P[\Gamma; F(\cdot)] = \iint_G p_F(\mathbf{r}, G) d\mathbf{r} \quad (2.2)$$

среди всех допустимых подобластей  $G \subset S_0$  [7, 9].

Здесь  $w(\mathbf{r}) = u_z|_{s_0}$ ,  $p(\mathbf{r}) = -\sigma_{zz}|_{s_0}$  — нормальные перемещения и давления на  $s_0$ , обычно связанные интегральным соотношением

$$w(\mathbf{r}) = k_{s_0} p = \iint_{s_0} k(\mathbf{r}, \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2)) \quad (2.3)$$

Рассматривая эту задачу с односторонними ограничениями как проблему управления границей контакта  $\Gamma$ , получим вначале выражения для вариаций функционала (2.2) и более общих функционалов вида

$$J_T[G] = \iint_G T(\mathbf{x}) p_F(\mathbf{x}, G) d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

Пусть  $p_F(\mathbf{x}, G')$ ,  $w_F(\mathbf{x}, G')$  — контактные давления и перемещения поверхности по решению задачи  $k_{G'} p = F(\mathbf{r})$  для области контакта  $G'$ , а  $p_T(\mathbf{x}, G)$ ,  $w_T(\mathbf{x}, G)$  отвечают формальному решению уравнения  $k_G p = T(\mathbf{r})$  для области  $G$ , т. е. для штампа, «профиль» которого описывается функцией  $T(\mathbf{r})$  (для негладких  $T(\mathbf{r})$  такие решения следует понимать в обобщенном смысле). Аналогично [9] разность значений функционала (2.4) для двух штампов, положение точек которых задается одной и той же функцией  $F(\mathbf{r})$ , но различной формы в плане  $G'$  и  $G$  соответственно, получается в виде

$$\begin{aligned} J_T[G'] - J_T[G] &= \iint_{G' \setminus G} p_F(\mathbf{x}, G') [T(\mathbf{x}) - w_T(\mathbf{x}, G)] d\mathbf{x} + \\ &+ \iint_{G \setminus G'} p_T(\mathbf{x}, G) [w_F(\mathbf{x}, G') - F(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для определенности будем, как и в п. 1, рассматривать близкие связанные области  $G$  и  $G'$  без угловых точек. Асимптотическое поведение входящих в (2.5) при неособых в окрестности контура  $\Gamma$  функций  $F(\mathbf{x})$  и  $T(\mathbf{x})$  также удобно описывать в терминах коэффициентов интенсивности напряжений [18], которые будем обозначать  $M_F[l; \Gamma]$ . В локальных координатах  $(l, \rho)$  имеем

в подобласти  $G' \setminus G$  с границей  $\Gamma_+ \cup \Gamma_+'$ :

$$w_T(\mathbf{x}, G) = T(l(\mathbf{x}), 0) - (2/D) \{M_T[l; \Gamma] \rho^{1/2} + O(\rho^{3/2})\} \quad (2.6)$$

$$p_F(\mathbf{x}, G') = \{M_F[l; \Gamma] + \delta M_F[l; \Gamma, \delta\Gamma] + o(\varepsilon)\} (\rho')^{-1/2} + O((\rho')^{1/2}) \quad (2.7)$$

в подобласти  $G \setminus G'$ :

$$p_T(\mathbf{x}, G) = M_T[l; \Gamma] \rho^{-1/2} + O(\rho^{1/2}) \quad (2.8)$$

$$w_F(\mathbf{x}, G') = F(l(\mathbf{x}), |\alpha(l)|) - (2/D) \{M_F[l; \Gamma] + \delta M_F[l; \Gamma, \delta\Gamma] + o(\varepsilon)\} (\rho')^{1/2} + O((\rho')^{3/2}) \quad (2.9)$$

Здесь  $(l(\mathbf{x}), 0)$  — ближайшая к  $\mathbf{x}$  отсчетная точка контура  $\Gamma$ ,  $(l(\mathbf{x}), |\alpha(l)|)$  — соответствующая точка контура  $\Gamma'$ ;  $\delta M_F[l; \Gamma, \delta\Gamma]$  — первая вариация коэффициента интенсивности  $M_F$ . Главные члены интегралов в (2.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \delta' J_T = & \frac{2}{D} \int_{\Gamma_+} \left[ \int_0^{\alpha(l)} M_T[l; \Gamma] [\alpha(l) - \rho]^{-1/2} \left\{ M_T[l; \Gamma] \rho^{1/2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{D}{2} [T(l, \rho) - T(l, 0)] \right\} d\rho \right] dl + \frac{2}{D} \int_{\Gamma_+} \left[ \int_0^{|\alpha(l)|} M_T[l; \Gamma] \rho^{-1/2} \times \right. \\ & \left. \times \left\{ -M_F[l; \Gamma] [-\alpha(l) - \rho]^{1/2} + \frac{D}{2} [F(l, |\alpha(l)|) - F(l, \rho)] \right\} d\rho \right] dl \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если функции  $F(\mathbf{x})$  и  $T(\mathbf{x})$  гладкие в окрестности контура  $\Gamma$ , то

$$\begin{aligned} T(l, \rho) - T(l, 0) &= \rho \cdot \partial T / \partial \rho |_{\Gamma_+} + o(\varepsilon) \\ F(l, |\alpha(l)|) - F(l, \rho) &= [|\alpha(l)| - \rho] \cdot \partial F / \partial \rho |_{\Gamma_+} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

и после интегрирования по  $\rho$  выражение для первой вариации функционала (2.4) получается в виде

$$\delta J_T[\Gamma, \delta\Gamma] = \frac{\pi}{D} \int_{\Gamma} M_T[l; \Gamma] M_F[l; \Gamma] \delta\Gamma(l) dl \quad (2.11)$$

Если в окрестности контура  $\Gamma$  функции  $F(\mathbf{x})$  и  $T(\mathbf{x})$  изменяются достаточно плавно, то, учитывая более точно асимптотические выражения (2.6) — (2.9), получим формулу для второй вариации функционала (2.4)

$$\begin{aligned} \delta^2 J_T[\Gamma, \delta\Gamma] = & \frac{\pi}{D} \int_{\Gamma} \{M_T[l; \Gamma] \delta M_F[l; \Gamma, \delta\Gamma] + \\ & + M_F[l; \Gamma] \delta M_T[l; \Gamma, \delta\Gamma]\} \delta\Gamma(l) dl \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим также свойство двойственности для вариаций функционалов вида (2.4) с различными весовыми функциями

$$\delta J_T[\Gamma, \delta\Gamma; F(\cdot)] = \delta J_F[\Gamma, \delta\Gamma; T(\cdot)] \quad (2.13)$$

где последний функциональный аргумент означает правую часть соответствующего уравнения.

В частном случае  $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$  значение функционала  $J_F = W[G]$  — это энергия деформации упругого тела и (2.11) превращается в аналог формулы Ирвина (для расширяющейся площадки контакта рассматривался в работах [19, 20]).

Пусть граничные контуры областей контакта  $G$  представлены параметрически в декартовых координатах:  $\Gamma = \{X(\varphi), Y(\varphi)\}$ . Выражение для первой вариации функционала в давливающей силы (2.2) принимает форму

$$\delta P[\Gamma, \delta\Gamma] = \frac{\pi}{D} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_1[\varphi; \Gamma] M_F[\varphi; \Gamma] [Y \delta X - X \delta Y] d\varphi \quad (2.14)$$

Для экстремального контура заранее неизвестной площадки контакта в задаче (2.1) на участках, где допускаются двусторонние вариации границы (т. е. вне острой кромки  $\partial S_0$ ), должно выполняться необходимое условие отсутствия концентрации напряжений  $M_F[l; \Gamma^\circ] = 0$ . В окрестности этой истинной границы контакта выражение для второй вариации функционала (2.2) относительно допустимых вариаций свободной границы  $\Gamma^\circ \setminus \partial S_0$ :

$$\delta^2 P[\Gamma^\circ, \delta\Gamma] = \frac{\pi}{D} \int_{\Gamma^\circ} \delta M_F[l; \Gamma^\circ, \delta\Gamma] M_1[l; \Gamma^\circ] \delta\Gamma(l) dl \quad (2.15)$$

должно быть неположительным. С учетом положительности контактных давлений для плоских штампов ( $M_1[l; \Gamma] > 0$ ) из (2.15) вытекает, что на участках, где возмущенная область контакта  $G$  лежит внутри  $G^\circ$ , контактные давления положительны ( $M_F \approx \delta M_F > 0$ ), а при варьировании  $\Gamma$  за пределами фактической площадки контакта получаются отрицательные контактные давления.

Для отыскания свободной границы площадки контакта можно применить градиентное варьирование. Соответствующие соотношения чувствительности для параметрического представления контура имеют вид

$$\delta X(\varphi) = \lambda Y'(\varphi) M_F[\varphi; \Gamma] M_1[\varphi; \Gamma], \quad \delta Y(\varphi) = \lambda X'(\varphi) M_F[\varphi; \Gamma] M_1[\varphi; \Gamma] \quad (2.16)$$

Рассмотрим приложение формул (2.16) к оценке изменения площадки контакта в задаче о наклонном эллиптическом штампе с плоской подошвой. Профиль внедренного штампа задается функцией  $F(x) = h - \beta x$ ,  $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\} = S_0$ .

Распределение контактных напряжений по решению уравнения  $k_{s_0} p = -F$  для однородного полупространства имеет вид [21]

$$p_F(x, y) = \frac{D}{a(1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{h}{K(e)} - \frac{\beta x e^2}{K(e) - E(e)} \right\} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{-1/2} \quad (2.17)$$

При наклоне штампа  $\beta \leq \beta_0 = h[K(e) - E(e)] [ae^2 K(e)]^{-1}$  контактные давления во всех точках положительные и контакт по  $S_0$  полный. Пусть наклон  $\beta = \beta_0 + \varepsilon$ , тогда при малых  $\varepsilon > 0$  в окрестности точки  $(a, 0)$  формальное решение (2.17) становится отрицательным и площадка контакта уменьшается. Для естественной параметризации эллипса  $\{X = a \cos \varphi, Y = a(1-e^2)^{1/2} \sin \varphi\}$  коэффициент интенсивности напряжений вдоль кромки наклонного штампа получается в виде

$$M_F[\varphi; \partial S_0] = \frac{D}{(2a)^{3/2} (1-e^2)^{3/4}} \left[ \frac{h}{K(e)} - \frac{\beta a e^2 \cos \varphi}{K(e) - E(e)} \right] (1-e^2 \cos^2 \varphi)^{-1/4}$$

В соответствии с соотношениями чувствительности (2.16) отрыв кромки происходит по дуге  $|\varphi| < \psi$ , где  $\psi = \arccos(\beta_0/\beta)$ , а градиентное смещение границы контакта задается выражениями

$$\begin{aligned} \delta X &= -\lambda a (1-e^2)^{1/2} \cos \varphi (1-e^2 \cos^2 \varphi)^{-1/2} (\cos \varphi / \cos \psi - 1) \\ \delta Y &= -\lambda a \sin \varphi (1-e^2 \cos^2 \varphi)^{-1/2} (\cos \varphi / \cos \psi - 1) \end{aligned}$$

3. Полученные выше выражения для вариаций функционалов объема трещины и вдавливающей штамп силы соответствуют переходу к сопряженной задаче при использовании множителей Лагранжа для учета ограничений (1.1а) или (2.1). Покажем это на примере родственной задачи для функционала объема, заключенного между мембраной, натянутой на контур  $\Gamma = \partial G$  и деформированной нормальной нагрузкой  $q(r)$ , и плоскостью этого контура

$$V[\Gamma] = \int_G u(r, G) ds \quad (3.1)$$

Прогиб мембраны  $u(r, G)$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -q(r), \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим полную вариацию функционала с множителем Лагранжа

$$\iint_G \{u + \Psi[\Delta u + q]\} ds \quad (3.3)$$

при варьировании как области  $G$ , так и функции  $u$ , удовлетворяющей нулевым граничным условиям. Выражение для полной вариации (3.3) можно с помощью формул [22] привести к виду

$$\begin{aligned} & \delta \iint_G [u - (\text{grad } \Psi, \text{grad } u) + \Psi q] ds + \delta \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial u}{\partial n} dl = \\ & = \iint_G (1 + \Delta \Psi) \delta_0[u(\mathbf{r})] ds + \int_{\Gamma} [u - (\text{grad } \Psi, \text{grad } u) + \Psi q] \alpha dl - \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \delta_0[u(\mathbf{r}_r)] dl + \int_{\Gamma} \Psi \delta_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\mathbf{r}_r} dl + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) \alpha dl \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\alpha(l)$  — введенная в п. 1 нормальная вариация границы  $\Gamma$ , а  $\delta_0[u(\mathbf{r})]$  — вариация функции  $u$  в неподвижной точке.

Пусть  $\Psi$  — решение задачи (обычно называемой сопряженной [16]):

$$\Delta \Psi = -1 \text{ в } G, \Psi|_{\Gamma} = 0 \quad (3.5)$$

Учитывая, что полная вариация функции  $u$  на подвижном контуре  $\delta_0[u(\mathbf{r}_r)] + \text{grad } u(\mathbf{r}_r) \cdot \delta \mathbf{r}_r = \delta(u|_{\Gamma}) = 0$  можно выразить точечную вариацию на границе через нормальную производную решения задачи (3.2):  $\delta_0[u(\mathbf{r}_r)] = -\alpha(l) du/dn$ . Тогда из (3.4) получим в обозначениях п. 1 формулу для вариации функционала (3.1) при изменении границы

$$\delta V[\Gamma, \delta \Gamma] = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \delta \Gamma dl = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial n} R(\theta) \delta R(\theta) d\theta \quad (3.6)$$

Построенное выражение по структуре аналогично формулам (1.12) и (2.14), причем «единичное» решение соответствует сопряженной задаче (3.5). В частности, для задачи с односторонними ограничениями о мембране, частично прижатой к опорной плоскости [1], т. е. при дополнительном условии  $u \geq 0$  в области  $\Omega$ , ограниченной контуром  $s$ , из (3.6) видно, что условие плавного смыкания мембраны с плоскостью на заранее неизвестной свободной границе  $\partial u / \partial n|_{\Gamma^c \setminus s} = 0$  эквивалентно требованию стационарности функционала (3.1) при вариациях границы контакта  $\Gamma$  (см. также [9]).

Отметим, что для свободной границы контакта  $\Gamma^o$  выполняется условие стационарности всех функционалов вида

$$I_H[G] = \iint_G H(\mathbf{x}) w_0(\mathbf{x}, G) dx \quad (3.7)$$

в задаче о трещине или (2.4) для задачи о штампе относительно допустимых двусторонних вариаций контура контакта  $\delta \Gamma$ . Действительно, в силу необходимых условий конечности напряжений  $M_F|_{\Gamma^c} = 0$  и  $N_0|_{\Gamma^c} = 0$  из (2.11) и аналогичной формулы для вариации (3.1) вытекает  $\delta J_T[\Gamma^o, \delta \Gamma] = 0$  и  $\delta I_H[\Gamma^o, \delta \Gamma] = 0$ . В частности, стационарность имеет место для величин моментов, действующих на штамп

$$m_1[G] = \iint_G x_2 p_F(\mathbf{x}; G) dx, \quad m_2[G] = \iint_G x_1 p_F(\mathbf{x}; G) dx$$

Однако ввиду закононеопределенности вторых вариаций использование этих функционалов для определения неизвестной границы менее удобно. Важный частный случай функционалов (3.7) и (2.4) составляют энер-



тетические функционалы. Для вариации энергии деформации пространства с трещиной нормального отрыва  $W[G]=I_G[G]$  получается формула Ирвина

$$\delta W[\Gamma, \delta\Gamma] = \frac{\pi}{D} \int_{\Gamma} N_G^2[l; \Gamma, \delta\Gamma(l)] dl$$

Аналогично в задаче о штампе энергия деформации и ее вариация при изменении области контакта равны

$$W[G] = \frac{1}{2} J_F[G], \quad \delta W[\Gamma, \delta\Gamma] = \frac{\pi}{2D} \int_{\Gamma} M_F^2[l; \Gamma, \delta\Gamma(l)] dl$$

Соответствующие свободным границам стационарные значения энергии [23] максимальны среди таких допустимых областей  $G'$ , для которых выполняется условие непроникания  $w(r, G') \geq 0$  (в задаче о трещине) или положительности контактных давлений (в задаче о штампе) [9]. Как показывает анализ пп. 1, 2, такие области лежат внутри экстремальной  $G^\circ$ . Обращаются в нуль и вторые вариации энергии при изменении границы относительно  $G^\circ$ . Для вариаций области  $G$  за пределами  $G^\circ$  происходит дальнейшее возрастание энергии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Glowinski R., Lions J.-L., Tremoliers R. Analyse numérique des inequations variationnelles. P.: Dunod. 1976. V. 1. 268 p.; V. 2. 290 p.—Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремолье Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979. 574 с.
2. Kalker J. J., van Raden J. A minimum principle for frictionless contact with application to non-Hertzian half-space contact problems // J. Engng Math. 1979. V. 6. № 2. P. 193–206.
3. Bogomolnii A., Eskin G. I., Zuchowizkii S. Numerical solution of the stamp problem / Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engng. 1978. V. 15. No. 2. P. 149–159.
4. Кравчук А. В. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 2. С. 308–310.
5. Керчман В. И. Экстремальные свойства границы контакта в задаче Синьборини для полупространства // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259. № 5. С. 1064–1068.
6. Goldstein R. V., Zazovskii A. F. A numerical method for solving three-dimensional elasticity problems for bodies with flat cracks and flattened cavities with due to respect of contact of their surfaces // Theor. and Appl. Fract. Mech. 1984. V. 1. No. 3. P. 203–216.
7. Керчман В. И. Вариационные задачи определения площадки контакта упругих тел // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 6. С. 1326–1329.
8. Керчман В. И. Вариационный метод отыскания контура трещины для пространственной задачи с односторонними ограничениями // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 38. № 5. С. 903–912.
9. Керчман В. И. Экстремальные свойства упругой энергии и новые вариационные принципы в односторонних задачах для штампов и трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 68–77.
10. Fichera G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints // Handbuch der Physik. В.: Springer. 1972. В. 6a/2. S. 391–424.—Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир. 1974. 159 с.
11. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1968. 246 с.
12. Шляпоберский Я. В. Асимптотическое решение пространственной задачи о равновесии упругого тела с разрезом // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 532–539.
13. Rice J. R. First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // Trans. ASME. J. Appl Mech. 1985. V. 52. No. 3. P. 574–579.
14. Захаревич И. С. О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961–968.
15. Fracture / Ed. H. Liebowitz. V. 2. N. Y.: Acad. Press. 1968. 759 p.—Разрушение. Т. 2. М.: Мир. 1975. 764 с.
16. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
17. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978. 487 с.
18. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука. 1980. 255 с.
19. Моссаковский В. И., Моссаковская Л. Р. Прочность упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к круговой // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-е ДГУ. 1977. Вып. 22. С. 56–74.

20. *Mastrojannis E. N., Keer L. M., Mura T.* Stress intensity factor for a plane crack under normal pressure // Intern. J. Fract. 1979. V. 15. No. 3. P. 247–258.
21. *Solomon L., Zamfirescu I.* Some approximate formulae and solutions in the contact problem for punches with a plane bounden non-elliptical basis // Приложения теории функций в механике сплошной среды. М.: Наука. 1969. Т. 1. С. 400–409.
22. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука. 1976. 493 с.
23. *Barquins M., Maugis D.* Adhesive contact of axisymmetric punches of an elastic half-space: The modified Hertz–Hubert's stress tensor for contacting spheres // J. Méс. Theor. et Appl. 1982. V. 1. No. 2. P. 334–357.
24. *Бородачев Н. М.* Применение принципа минимума дополнительной работы к контактным задачам теории упругости // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 9. С. 116–120.
25. *Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка. 1985. 175 с.
26. *Куранг Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехтеоретиздат. 1951. 476 с.
27. *Баренблатт Г. И.* Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 316–323.

Кишинев

Поступила в редакцию  
8.VII.1986.