МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1988

УДК 531.43

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИИ ПРИ ПЛОСКОМ КОНТАКТЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

ИВАНОВ А. П.

Предлагается метод определения реакции шероховатой плоскости на движущееся по ней тело с плоским основанием. В основе метода лежит представление об одностороннем характере контакта между телом и плоскостью, которые считаются абсолютно жесткими.

1. Рассмотрим движение твердого тела с плоским основанием D по шероховатой плоскости под действием активных сил с главным вектором $\mathbf{Q}$ и главным моментом $\mathbf{M}$ относительно центра масс G. Свяжем с опорной плоскостью трехгранник $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, направив орт $\mathbf{e}_3$ перпендикулярно этой плоскости в область возможных движений тела; условием контакта является неравенство $Q_3<0$.

Уравнения движения имеют вид

$$m\mathbf{v}^{\cdot}=\mathbf{Q}+\mathbf{F},\quad (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})^{\cdot}=\mathbf{M}+\mathbf{M}_F,\quad v_3=\omega_1=\omega_2=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ — скорость точки G и угловая скорость тела, m и $\mathbf{J}$ — его масса и центральный тензор инерции, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}_F$ — главный вектор и главный момент реакции плоскости. Последняя группа равенств в (1.1) выражает кинематические связи, налагаемые на систему условиями контакта: вследствие этих связей она имеет три степени свободы.

Если трение локально удовлетворяет закону Амонтона — Кулона, то $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}_F$ определяются соотношениями ($\mathbf{r}\equiv\mathbf{r}(A)$ — радиус-вектор точки A относительно центра масс G)

$$\mathbf{F}=\int_D \mathbf{R}(A)\,ds,\qquad M_F=\int_D \mathbf{r}\times\mathbf{R}(A)\,ds \tag{1.2}$$

$$\mathbf{R}(A)=(-\mu v_1(A)/v(A),\,-\mu v_2(A)/v(A),\,1)N(A)\quad (A\in D)$$

где N — нормальное напряжение, μ — коэффициент кинематического трения.

Как известно [1], определить функцию $N(A)$ в условиях непрерывного контакта твердых тел невозможно. Поэтому обычно для решения этой задачи пользуются различными моделями теории упругости, однако преодолеть возникающие на этом пути трудности удается лишь в отдельных частных случаях [1—3]. Применяемый в данной работе подход связан с отказом от непрерывного характера фрикционного контакта при сохранении моделей абсолютно твердых тела и плоскости. Исследования [4—6] подтверждают важную роль микросоударений и связанных с ними нормальных перемещений тела в механизме трения.

Из представлений о дискретности фрикционного контакта следует, в частности, что реакция плоскости сводится к совокупности ударных импульсов, приложенных в случайных точках области D. Для среднего значения функции $\mathbf{R}(A)$ в (1.2) имеем выражение (суммирование по всем моментам микроударов в промежутке времени от t до $t+\tau$):

$$\tau^{-1}\int_t^{t+\tau}\mathbf{R}(A)\,dt=\tau^{-1}\Sigma\mathbf{X}_k(A)=\mathbf{X}^{\vee}(A)\varphi(A) \tag{1.3}$$

где $\mathbf{X}_k(A)$ — импульс при ударе в точке $A \in D$ в момент $t=t_k$, τ — промежуток осреднения, $\mathbf{X}^\vee(A)$ — среднее (арифметическое) значение $\mathbf{X}_k(A)$, $\varphi(A)$ — распределение общего числа микроударов за единицу времени в области D. Конкретный вид функции $\varphi(A)$ зависит от особенностей микрорельефа шероховатых поверхностей. Ввиду того что расположение микровыступов в различных точках области D равновероятно, будем считать, что $\varphi(A)=\varphi_0/s(D)$, где $s(D)$ — площадь области D, $\varphi_0=\mathrm{const}$.

Заметим, что данное допущение имеет упрощенный характер: в действительности функция φ_0 зависит от характера движения тела; например, при вращении круглого штампа эта функция на периферии больше, чем в центре (предлагаемый подход применим и в случае, когда φ_0 зависит от $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$).

Произведение $\mathbf{X}^*(A)=\mathbf{X}^\vee(A)\varphi_0$ имеет размерность силы; полагая в (1.2)

$$\mathbf{R}(A)=\mathbf{X}^*(A)/s(D) \tag{1.4}$$

получим уравнение (1.1), описывающее усредненное по статистическому ансамблю возможных реализаций микрорельефа движение тела [7].

Заметим также, что поскольку в промежутках между микроударами тело совершает пространственное движение, то третья группа равенств (1.1) нарушается. Если единицы измерения массы, длины и времени выбраны таким образом, что в рассматриваемом движении $m=1$, $|\mathbf{r}|\sim 1$, $A \in D$, $2T=mv^2+(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\sim 1$, то справедлива оценка $mv_3^2+(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})|_{\omega_3=0}\sim$ $\sim\varepsilon^2 \ll 1$, вследствие чего микродвижения между ударами имеют продолжительность порядка ε.

Проинтегрируем систему (1.1) на промежутке $[t, t+\varepsilon^{1/2}]$. Опуская члены, исчезающие с ε, получим, в частности, соотношения $((\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение):

$$Q_3+F_3=0, \quad (\mathbf{M}+\mathbf{M}_F, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{e}_i)=0 \quad (i=1, 2) \tag{1.5}$$

выражающие малость величин v_3, ω_1, ω_2.

Ввиду того что число микроударов на промежутке осреднения порядка $\varepsilon^{-1/2} \gg 1$, в (1.5) можно воспользоваться представлением (1.4). В результате получим

$$Q_3+s^{-1}(D)\int\limits_D X_3^*(A)\,ds=0 \tag{1.6}$$

$$\left(\mathbf{M}+s^{-1}(D)\int\limits_D \mathbf{r}\times\mathbf{X}^*(A)\,ds,\ \mathbf{J}^{-1}\mathbf{e}_i\right)=0 \quad (i=1, 2)$$

Для описания единичного удара воспользуемся уравнениями [8]:

$$m\Delta\mathbf{v}=\mathbf{X}, \quad \mathbf{J}\Delta\boldsymbol{\omega}=\mathbf{r}\times\mathbf{X} \tag{1.7}$$
$$m\Delta\mathbf{v}(A)=m\Delta(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\mathbf{X}+m\Delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

Окончание удара определяется на основании гипотезы Ньютона

$$\Delta v_3(A)=-(1+\varkappa)v_3^-(A), \quad v_3(A)=v_3-\omega_2x_1+\omega_1x_2, \quad (x_1, x_2, x_3)=\mathbf{r} \tag{1.8}$$

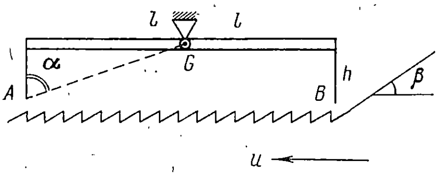
где минус вверху относится к началу удара, $\varkappa$ — коэффициент восстановления скорости. Связь между компонентами ударного импульса в общем случае определена в [9, 10]; в обсуждаемом случае $|v_3^-(A)| \ll 1$ и (исключая случай тангенциального удара [9]) можно приближенно считать, что

$$\mathbf{X}(A)=\mathbf{l}(A)X_3(A), \quad \mathbf{l}(A)=(-\mu v_1(A)/v_\tau(A), -\mu v_2(A)/v_\tau(A), 1) \tag{1.9}$$
$$v_1(A)=v_1-\omega_3x_2, \quad v_2(A)=v_2+\omega_3x_1, \quad v_\tau^2(A)=v_1^2(A)+v_2^2(A)$$

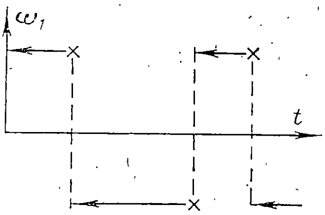
Выразим из формул (1.7), (1.8) величину X_3 через v_3^-:

$$X_3(A)=\Phi(A)(v_3^- - \omega_2^- x_1+\omega_1^- x_2) \tag{1.10}$$
$$\Phi(A)=-m(1+\varkappa)\{1+m(\mathbf{J}^{-1}[\mathbf{r}\times\mathbf{l}(A)], \mathbf{r}\times\mathbf{e}_3)\}^{-1}$$

Отсюда следует линейная зависимость $X_3(A)$ от v_3^-, $\omega_{1,2}^-$. Ввиду этого аналогичные соотношения связывают и средние значения $X_3^{-\vee}(A)$ с $v_3^{-\vee}$,



Фиг. 1



Фиг. 2

$\omega_{1,2}^{-\vee}$, а также $X_3^*(A)$ с v_3^*, $\omega_{1,2}^*$. Здесь $v_3^*=v_3^{-\vee}\varphi_0$, $\omega_{1,2}^*=\omega_{1,2}^{-\vee}\varphi_0$. Заметим, что в отличие от средних значений v_3, $\omega_{1,2}$, определенных на некотором интервале времени и являющихся малыми порядка ε, величины v_3^*, $\omega_{1,2}^*$ конечные, не зависящие от ε.

Что касается v_3^*, такой вывод следует из того, что $-v_3^{-\vee}\sim\varepsilon$, $\varphi_0\sim\varepsilon^{-1}$. Возможность отличия значений $\omega_{1,2}$ от нуля показывает следующий пример.

2. Рассмотрим коромысло, шарнирно закрепленное в своем центре инерции G над движущимся со скоростью u основанием, имеющим пилообразный профиль с углом подъема β (фиг. 1), шаг которого намного меньше плеча коромысла l.

Поскольку центр инерции коромысла неподвижен, в уравнениях (1.7) следует считать $\Delta\mathbf{v}=0$, а граничные условия (1.8) ввиду характера ударов связывать не с изменением вертикальной составляющей скорости, а с изменением ее составляющей, нормальной наклонному участку профиля. Тогда начальные и конечные значения угловой скорости при ударах в точках A и B будут удовлетворять соотношениям

$$l\omega_A^+\sin(\alpha+\beta)=-\varkappa[u\sin\beta+l\omega_A^-\sin(\alpha+\beta)] \qquad (2.1)$$
$$l\omega_B^+\sin(\alpha-\beta)=\varkappa[u\sin\beta-l\omega_B^-\sin(\alpha-\beta)] \quad (\operatorname{tg}\alpha=l/4)$$

Установившемуся виброударному режиму движения коромысла соответствует такое решение системы (2.1), для которого $\omega_A^+=\omega_B^-$, $\omega_B^+=\omega_A^-$. Отсюда получаем

$$\omega_A^-=\theta[\sin^{-1}(\alpha-\beta)+\varkappa\sin^{-1}(\alpha+\beta)] \qquad (2.2)$$
$$\omega_B^-=-\theta[\varkappa\sin^{-1}(\alpha-\beta)+\sin^{-1}(\alpha+\beta)],\quad \theta=\varkappa(1-\varkappa^2)^{-1}ul^{-1}\sin\beta$$

При $0<\varkappa<1$ и $\alpha>\beta$ будет $|\omega_A^-|>|\omega_B^-|$. Примерная зависимость ω от t изображена на фиг. 2. Так как коромысло не уходит далеко от своего среднего положения, то площади прямоугольников, лежащих выше и ниже оси $\omega=0$, примерно равны между собой; при этом $\omega^{-\vee}={}^1/_2(\omega_A^-+\omega_B^-)>$ >0 — среднее значение ω^-.

В обсуждаемом случае движения тела по плоскости ситуация качественно такая же, хотя получение оценок типа (2.2) здесь не представляется возможным: для этого потребовалось бы точное описание микрорельефа шероховатых поверхностей. Оказывается, однако, что в таких оценках нет необходимости — значения $\omega_{1,2}^*$, так же как и v_3^*, можно определить из системы уравнений (1.6).

Выражая в этих уравнениях $X_3^*(A)$ через v_3^*, $\omega_{1,2}^*$ по формулам, аналогичным (1.10), получим следующую систему для определения v_3^*, $\omega_{1,2}^*$:

$$Q_3 s(D)+v_3^*\int_D\Phi(A)\,ds-\omega_2^*\int_D x_1\Phi(A)\,ds+\omega_1^*\int_D x_2\Phi(A)\,ds=0 \qquad (2.3)$$

$$s(D)(\mathbf{M},s^{-1}\mathbf{e}_i)+v_3^*\int_D Z_i\,ds-\omega_2^*\int_D x_1 Z_i\,ds+\omega_1^*\int_D x_2 Z_i\,ds=0$$

$$Z_i=\Phi(A)(\mathbf{r}\times\mathbf{l},\mathbf{J}^{-1}\mathbf{e}_i)\quad(i=1,2)$$

Разрешая систему (2.3), окончательно найдем функцию $\mathbf{R}(A)$ из (1.4), что позволяет затем определить реакцию плоскости из (1.2).

Свойство описанного метода состоит в том, что распределение $\mathbf{R}(A)$ не зависит от характеристик микрогеометрии шероховатых поверхностей, а лишь от макроскопических величин — распределений скоростей и масс. Асимметрия нормальных контактных напряжений, благодаря которой тело в среднем совершает плоскопараллельное движение, обеспечивается отличием величин $\overset{*}{\omega}_{1,2}$ от нуля. Будем называть вектор $\boldsymbol{\omega}^*=(\omega_1^*, \omega_2^*, 0)'$ псевдокачением (в среднем по времени качения нет).

Рассмотрим некоторые примеры, в которых опорная плоскость горизонтальна, $\mathbf{Q}$ — вес тела, $\mathbf{M}=\mathbf{0}$.

Пусть тело обладает вертикальной плоскостью симметрии и в начальный момент времени скорости всех его точек параллельны этой плоскости, т. е. $x_2=v_2=\omega_3=0$. В формуле (1.9) будем иметь $\mathbf{l}=(-\mu \operatorname{sgn} v_1, 0, 1)$, и функции $\Phi(A)$, $Z_2(A)$ оказываются четными функциями x_2, а $Z_1(A)$ — нечетной. Ввиду этого из второго уравнения (2.3) получим $\omega_1^*=0$, вследствие чего по формуле (1.10) распределение $X_3^*(A)$ симметрично относительно плоскости $x_2=0$. Поэтому момент реакции плоскости относительно оси $G\mathbf{e}_3$ равен нулю и тело будет совершать плоскопараллельное движение (движение тела может сопровождаться его отклонениями от плоскости $x_2=0$, но соотношения $x_2=v_2=\omega_3=0$ справедливы в среднем при большом числе опытов).

Для кругового цилиндра, скользящего по плоскости с одновременным верчением вокруг своей оси, асимметрия контактных напряжений связана с наличием псевдокачения $\boldsymbol{\omega}^*$, а также с различием в ударных импульсах, вычисленных для разных точек A в отсутствие псевдокачения. Если бы такого различия не было, вектор $\boldsymbol{\omega}^*$ был бы ортогонален $\mathbf{v}$ и направлен так, чтобы тройка $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}^*$, $\mathbf{e}_3$ была правой. В целом асимметрия приводит к тем же эффектам в движении цилиндра, которые объясняются в [3] при помощи упругих деформаций. Предлагаемый метод позволяет получить не только качественные выводы, но и численные оценки по формулам (1.4), (1.10), (2.3).

Рассмотрим верчение несимметричного твердого тела вокруг вертикальной главной центральной оси инерции $G\mathbf{e}_3$, проходящей через центр основания эллиптической формы. Вследствие симметрии области D имеем $\int_D Z_{1,2} ds=0$, а так как по предположению и $\mathbf{M}=\mathbf{0}$, то из системы (2.3) следует, что $\overset{*}{\omega}_{1,2}=0$. Поэтому асимметрия функции $X_3(A)$ в (1.10) обусловлена лишь зависимостью $\Phi(A)$ от x_1, x_2. Направляя орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ параллельно горизонтальным осям инерции тела и учитывая, что $v_3^-(A)=v_3^-$, $v_1^-(A)=-x_2\omega_3$, $v_2^-(A)=x_1\omega_3$, получим для величины $\Phi(A)$ в (1.10) следующее выражение:

$$\begin{aligned}\Phi(A)=-m(1+\varkappa)\{1+m\,[J_{22}^{-1}x_1^2+J_{11}^{-1}x_2^2-\\ -\mu x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}(J_{22}^{-1}-J_{11}^{-1})\operatorname{sgn}\omega_3\}^{-1}\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Отсюда следует, что величина $\Phi(A)$ и, следовательно, $X_3(A)$, зависят от направления верчения. Для первого и третьего квадрантов $x_1x_2>0$ и величина X_3 больше при $(J_{11}-J_{22})\omega_3<0$, чем при $(J_{11}-J_{22})\omega_3>0$; для второго и четвертого квадрантов $x_1x_2<0$ и зависимость X_3 от направления верчения противоположная.

В общем случае оси эллипса не параллельны главным центральным осям инерции $G\mathbf{e}_1$, $G\mathbf{e}_2$. Если бо́льшая ось лежит в первом и третьем квадрантах, то при $(J_{11}-J_{22})\omega_3<0$ момент трения оказывается бо́льшим, чем при обратном направлении вращения. Вычисления, проведенные для области D в форме прямоугольника со сторонами, равными 1 и 2, при расположении оси $G\mathbf{e}_1$ параллельно его диагонали и отношении $J_{22}/J_{11}=2{,}4$, приводят к таким значениям отношения моментов трения для различных направлений верчения: для $\mu x_3=0$ это отношение равно единице, при $\mu x_3=-0{,}5$ и $\mu x_3=-1$ — соответственно 1, 11 и 1,24. Заметим, что направление устойчивого вращения кельтских камней [11] соответствует в рассматриваемой модели направлению меньшего трения.

Для иллюстрации зависимости трения от направления верчения изучим расположение линий постоянного нормального давления. В силу формулы (1.10) эти линии являются кривыми второго порядка, причем для достаточно малых значений произведения μx_3 (когда скорость при ударе не меняет направления и можно пользоваться формулой (1.9)) эти кривые — эллипсы. В последнем из рассмотренных примеров $\omega^*=0$ и центры этих эллипсов совпадают с центром области D, а их оси параллельны $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Если $\mu x_3<0$, то в силу (2.4) оси этого семейства изобар поворачиваются в направлении вращения тела. При $\omega_3<0$ область D попадает в область более высокого давления, чем при $\omega_3>0$ (с увеличением диаметра эллипса давление падает), что и объясняет бóльший момент трения.

Заметим, что в модели твердого тела на деформируемом основании изобары представляют собой прямые линии [1]. Из соображений симметрии для рассматриваемого примера давление в области D постоянно и трение не зависит от направления верчения тела. Следовательно, поведение кельтских камней подтверждает выводы, полученные с помощью предлагаемого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McMillan W. D.* Dynamics of rigid bodies. N. Y.— L.: MacGraw-Hill. 1936. 478 c.
2. *Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* О движении плоских тел при наличии трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 17—28.
3. *Самсонов В. А.* О трении при скольжении и верчении тела // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1981. № 2. С. 76—78.
4. *Толстой Д. М.* Собственные колебания ползуна, зависящие от контактной жесткости, и их влияние на трение // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 4. С. 820—823.
5. *Буданов Б. В., Кудинов В. А., Толстой Д. М.* Взаимосвязь трения и колебаний // Трение и износ. 1980. Т. 1. № 1. С. 79—89.
6. *Кориаули И. П., Ратнер С. Б.* Применение закономерностей трения при постоянном контактировании к прерывистому трению // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 5. С. 833—840.
7. *Власов А. А.* Статистические функции распределения. М.: Наука. 1966. 356 с.
8. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат. 1965. 448 с.
9. *Болотов Е. А.* Об ударе двух твердых тел при действии трения // Изв. Моск. инж. училища. 1908. Ч. 2. Вып. 2. С. 43—55.
10. *Keller J. B.* Impact with friction // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1986. V. 53. No. 1. P. 1—4.
11. *Magnus K. Kreisel.* Theorie and Anwendungen. B.: Springer. 1971. 493 p. // Теория и применения. М.: Мир. 1974. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1986