

УДК 539.3

К МЕТОДАМ РАСЧЕТА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ КОНТУРА

СЕРАЗУТДИНОВ М. Н.

Излагаются вариационный метод и результаты решения задачи определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций в виде упруго- или жесткозакрепленных пластин и пологих оболочек. Используется теория оболочек Тимошенко. Искомые функции представляются в виде ряда по координатным функциям, каждая из которых может не удовлетворять каким-либо заданным условиям закрепления конструкции.

Используются методы решения задач теории пластин и оболочек, основанные на применении полных функционалов и использовании уравнения контура области при построении аппроксимирующих функций. Аналогичные вопросы рассматривались в [1-5].

1. Постановка задачи и метод решения. Пусть требуется определить напряженно-деформированное состояние полой оболочки с многосвязной сложной формы областью Ω в плане. На линиях Γ_{1i} и в точках $M_k(x_k, y_k)$ оболочка упруго закреплена, а на линиях Γ_{2i} контура области Ω — закреплена жестко и здесь реализуются условия заделки или шарнирного опирания.

Деформирование упругой оболочки будем описывать на основе линейной теории оболочек типа Тимошенко в декартовой системе координат. Воздействие на оболочку упругих закрепляющих элементов заменим силами и моментами, которые будут реакциями опор. Решение задачи получим вариационным методом, используя условие стационарности функционала Лагранжа L . Добавляя к разности элементарной работы внешних сил и вариации потенциальной энергии деформации оболочки элементарную работу введенных реакций опор, получим условие стационарности

$$\begin{aligned} \delta L = & \delta'W + \delta\Pi + \sum_i \int_{\Gamma_{1i}} (N^s \delta u_n + T^s \delta v_n + Q^s \delta w + M_n^s \delta \psi_n + M_\tau^s \delta \psi_\tau) ds + \\ & + \sum_k [N_k \delta u(x_k, y_k) + T_k \delta v(x_k, y_k) + Q_k \delta w(x_k, y_k) + \\ & + M_{xk} \delta \psi_k(x_k, y_k) + M_{yk} \delta \psi_y(x_k, y_k)] = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_n = & u n_1 + v n_2, \quad v_n = v n_1 - u n_2, \quad \psi_n = \psi_x n_1 + \psi_y n_2, \quad \psi_\tau = \psi_y n_1 - \psi_x n_2, \\ n_1 = & \cos(n, x), \quad n_2 = \cos(n, y) \end{aligned}$$

Здесь $\delta'W$ — элементарная работа внешних сил; Π — потенциальная энергия деформации оболочки; $N^s, T^s, Q^s, M_n^s, M_\tau^s$ — распределенные на линиях Γ_{1i} силы и моменты, являющиеся реакциями закрепляющих оболочку упругих элементов; $N_k, T_k, Q_k, M_{xk}, M_{yk}$ — реакции локальных опор; n, τ — направления нормали и касательной к линиям Γ_{1i} . Направление реакций $N^s, T^s, Q^s, M_n^s, M_\tau^s$ и реакций локальных опор $N_k, T_k, Q_k, M_{xk}, M_{yk}$ совпадает с положительным направлением соответствующих перемещений и сдвигов, на вариациях которых совершается элементарная работа этих сил и моментов в (1.1). Можно показать, что из (1.1) следуют

уравнения равновесия оболочки, статические граничные условия и условия, которые должны выполняться в местах упругого закрепления.

Величины распределенных и локальных реакций, входящих в (1.1), неизвестны. Для их определения в каждой точке M_k и в точках линий Γ_{ii} упругие закрепляющие элементы будем моделировать стержневой системой, каждый элемент которой подвергается деформации растяжения — сжатия, изгиба и кручения. Реакции упругих опор зависят от перемещений и углов поворотов оболочки в местах крепления. Эти зависимости определяются выбранной моделью закрепляющего элемента. Так, если в точке контура Γ_{ii} закрепление моделируется прямолинейным стержнем единичной ширины, один конец которого зашпечлен, а продольная ось перпендикулярна к срединной поверхности оболочки, то в сечении стержня, где он соединяется с оболочкой, будут действовать продольная сила Q^s , поперечные силы N^s , T^s и изгибающие моменты M_n^s , M_τ^s . Полагая, что w , u_n , v_n — соответственно продольное и поперечные перемещения, а ψ_n , ψ_τ — углы поворота сечения стержня, взятые с обратным знаком, используя формулы сопротивления материалов и принцип независимости действия сил, получим

$$w = -\frac{lQ^s}{E^*b}, \quad u_n = -\frac{l^3N^s}{3E^*I_1} - \frac{l^2M_n^s}{2E^*I_1}, \quad v_n = -\frac{l^3T^s}{3E^*I_2} - \frac{l^2M_\tau^s}{2E^*I_2}$$

$$\psi_n = -\frac{l^2}{2E^*I_1}N^s - \frac{l}{E^*I_1}M_n^s, \quad \psi_\tau = -\frac{l^2T^s}{2E^*I_2} - \frac{lM_\tau^s}{E^*I_2}$$

здесь E^* , l , b , I_1 , I_2 — соответственно модуль упругости, длина, высота и осевые моменты инерции поперечного сечения стержня. Используя полученные соотношения, можно выразить усилия и моменты через перемещения и углы поворотов

$$N^s = k_{41}u_n + k_{42}\psi_n, \quad T^s = k_{21}v_n + k_{22}\psi_\tau, \quad Q^s = k_{31}w, \quad M_n^s = k_{41}u_n + k_{42}\psi_n,$$

$$M_\tau^s = k_{51}v_n + k_{52}\psi_\tau \quad (1.2)$$

Выражения для коэффициентов k_{ij} получить сравнительно просто, поэтому их конкретный вид здесь не приводится.

Если закрепляющий оболочку элемент можно смоделировать зашпечленным на одном конце стержнем единичной ширины, продольная ось которого совпадает с направлением нормали к Γ_{ii} , то для этого стержня N^s будет продольной силой, T^s , Q^s , M_n^s , M_τ^s — локальными поперечными силами и моментами. Следовательно, имеют место зависимости

$$w = -\frac{l^3Q^s}{3E^*I_1} - \frac{l^2M_n^s}{2E^*I_1}, \quad u_n = -\frac{lN^s}{E^*b}, \quad v_n = -\frac{l^3T^s}{3E^*I_2} - \frac{l^2M_\tau^s}{2E^*I_2}$$

$$\psi_\tau = -\frac{l^2T^s}{2E^*I_2} - \frac{lM_\tau^s}{E^*I_2}, \quad \psi_n = -\frac{l^2Q^s}{2E^*I_1} - \frac{lM_n^s}{E^*I_1}$$

Выражая усилия и моменты через перемещения и сдвиги, получим

$$N^s = k_{41}^*u_n, \quad T^s = k_{21}^*v_n + k_{22}^*\psi_\tau, \quad M_n^s = k_{31}^*w + k_{32}^*\psi_n$$

$$Q^s = k_{41}^*w + k_{42}^*\psi_n, \quad M_\tau^s = k_{51}^*w + k_{52}^*\psi_n \quad (1.3)$$

При использовании других моделей опорных элементов зависимости между N_k , T_k , Q_k , M_{xk} , M_{yk} и u , v , w , ψ_x , ψ_y получаются аналогичными (1.2), (1.3). Так, при опирании оболочки на стержни, оси которых перпендикулярны к ее срединной поверхности, по аналогии с (1.2) имеем

$$N_k = k_{11}^k u(x_k, y_k) + k_{12}^k \psi_x(x_k, y_k) \quad (1.4)$$

$$T_k = k_{21}^k v(x_k, y_k) + k_{22}^k \psi_y(x_k, y_k),$$

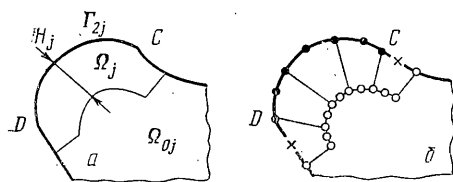
$$Q_k = k_{31}^k w(x_k, y_k)$$

$$M_{xk} = k_{41}^k u(x_k, y_k) + k_{42}^k \psi_x(x_k, y_k)$$

$$M_{yk} = k_{51}^k v(x_k, y_k) + k_{52}^k \psi_y(x_k, y_k)$$

Подставляя выражения вида (1.2)–(1.4) для реакций упругих опор в соотношение (1.1), получим условие стационарности функционала L , в котором уже не будет содержаться неизвестных реакций закрепляющих упругих элементов. Неизвестными в условии $\delta L=0$ будут компоненты перемещений и при решении задачи с использованием этого условия необходимо, чтобы компоненты перемещений удовлетворяли заданным геометрическим условиям на линиях жесткого закрепления оболочки. Если жестких закреплений нет, то функционал L будет полным. Действительно, в этом случае останутся только упругие опоры оболочки, на которых нельзя заранее, до решения задачи, определить величины перемещений и сдвигов. Следовательно, геометрические условия не задаются, а статические следуют из (1.1). Таким образом, задачу можно решить используя только условие стационарности функционала (1.1), без дополнительных условий на функции u, v, w, ψ_x, ψ_y . При аппроксимации искомых величин могут быть использованы координатные функции, каждая из которых не удовлетворяет каким-либо заранее заданным условиям в точках и на линиях закрепления оболочки.

При решении краевых задач определение функции, удовлетворяющей заданным условиям на линии сложной формы, представляет определенную трудность. Опишем способ построения функций, обращающихся в нуль на заданных линиях, использование которых позволяет решить изложенную задачу расчета оболочек со сложной формой в плане. Структура этих функций аналогична структуре решения регионально-структурного метода [4]. Основное отличие излагаемого здесь метода



Фиг. 1

строения функций от других известных методов заключается в том, что в области, прилегающей к линии, на которой сформулированы граничные условия, заданная функция доопределяется с использованием конечно-разностных соотношений, либо функций метода конечных элементов так, чтобы выполнялись граничные условия. При использовании конечно-разностных соотношений решение получается численно-аналитическим, а при использовании функций метода конечных элементов — аналитическим. Изложим методику построения решения и результаты расчетов напряженно-деформированного состояния оболочек при использовании обычных функций в сочетании с функциями метода конечных элементов.

Для простоты изложения рассмотрим частный случай и опишем способ построения функции, обращающейся в нуль на заданной непрерывной линии. Пусть требуется определить непрерывную функцию $f_j(x, y)$, положительную внутри области Ω и обращающуюся в нуль на линии Γ_{2j} между точками C и D (фиг. 1, а). Разделим область Ω на под-области Ω_j, Ω_{0j} так, чтобы линия Γ_{2j} была одной из границ Ω_j . Обозначим через Γ_j границу раздела подобластей Ω_j и Ω_{0j} . Определим $f_j(x, y)$ следующим образом:

$$f_j = 1 \quad ((x, y) \in \Omega_{0j}), \quad f_j = f_j^* \quad ((x, y) \in \Omega_j) \quad (1.5)$$

Здесь f_j^* — непрерывная функция, положительная внутри Ω_j и удовлетворяющая условиям (n — направление нормали к линии Γ_j):

$$f_j^* |_{\Gamma_{2j}} = 0, \quad f_j^* |_{\Gamma_j} = 1, \quad \partial^k f_j^* / \partial n^k |_{\Gamma_j} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (1.6)$$

Очевидно, что при выполнении (1.5), (1.6) $f_j(x, y)$ будет функцией класса C^n , удовлетворяющей заданным условиям. Покажем, как можно сравнительно просто построить f_j^* класса C^0 , используя функции метода конечных элементов. Пусть Γ_{2j} — линия второго порядка. Разобьем область Ω_j на элементы и введем узлы так, как показано на фиг. 1, б. На каждом из элементов функцию f_j^* будем определять с использованием

изопараметрических конечных элементов [6, 7] через ее узловые значения. Полагаем, что $f_j^* = 1$ в узлах, отмеченных светлыми кружками, $f_j^* = 0$ в узлах, отмеченных темными кружками, и $f_j^* = 0,5$ в узлах, отмеченных крестиком.

В соответствии со свойствами изопараметрических конечных элементов построенная таким образом функция f_j^* принадлежит классу C^0 и удовлетворяет первым двум условиям (1.6). Следовательно, f_j будет функцией класса C^0 . Подобным образом можно строить функции $f_j(x, y)$ и более высокой степени гладкости.

Аналогично может быть найдена функция $F_m(x, y)$, знакопостоянная внутри области Ω и равная нулю на нескольких, не обязательно непрерывных линиях Γ_{2j} ($j=1, m$). В случаях, когда области Ω_j , используемые при построении, не пересекаются, $\Gamma_m(x, y)$ можно представить таким образом:

$$F_m(x, y) = \prod_{j=1}^m f_j(x, y) \quad (1.7)$$

Для решения задачи компонентов перемещения оболочки представим в следующем виде (суммирование по i):

$$\begin{aligned} u &= F_0(x, y) F_{m_1}^1(x, y) \sum C_{1i} \varphi_i(x, y) \\ v &= F_0(x, y) F_{m_2}^2(x, y) \sum C_{2i} \varphi_i(x, y), \quad w = F_{m_3}^3 \sum C_{3i} \varphi_i(x, y) \\ \psi_x &= F_{m_4}^4 \sum C_{4i} \varphi_i(x, y), \quad \psi_y = F_{m_5}^5 \sum C_{5i} \varphi_i(x, y) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $\{\varphi_i\}$ — некоторая полная последовательность функций, $F_{m_j}^j$ — функции вида (1.7), обращающиеся в нуль на соответствующих линиях (например, $F_{m_1}^1$ обращается в нуль на линиях, где в соответствии с условиями закрепления оболочки $u=0$); $F_0(x, y)$ — знакопостоянная в Ω функция, у которой частные производные первого порядка не равны тождественно нулю.

Необходимость введения $F_0(x, y)$ в качестве множителя при разложении u и v в ряды обусловлена тем, что в случаях закрепления оболочки, когда отсутствуют граничные условия для u (или v), а в последовательности $\{\varphi_i\}$ имеется $\varphi_i = \text{const}$, коэффициент C_{1i} (или C_{2i}) нельзя определить из условия $\delta L = 0$, так как в функционал L будут входить только производные от функций u и v . При умножении рядов на $F_0(x, y)$ получаем $F_0 \varphi_i \neq \text{const}$.

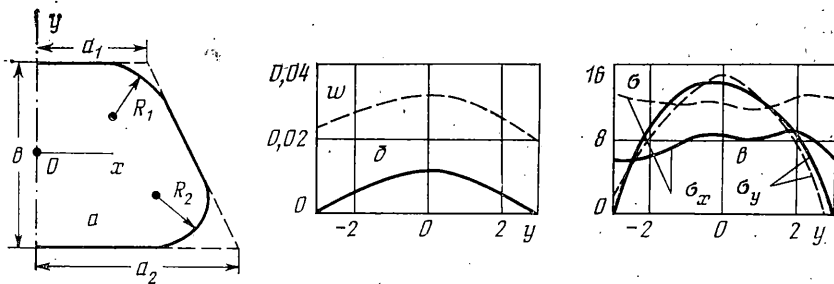
Функции (1.8) принадлежат классу C^0 и являются допустимыми [6] при использовании для решения функционала Лагранжа теории оболочек типа Тимошенко. В тех случаях, когда оболочка не имеет жестких закреплений, и следовательно, $F_{m_j}^j = 1$, компоненты перемещений в виде (1.8) будут непрерывны вместе со своими производными.

Подставляя (1.8) в условие (1.1) с учетом (1.2)–(1.4), получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_{ki} в рядах (1.8). После нахождения C_{ki} по известным формулам [8] можно определить напряжения и деформации в оболочке.

2. Результаты расчетов. На основе описанного алгоритма решен ряд задач изгиба упруго- или жесткозакрепленных пластин и оболочек различных конфигураций, нагруженных различного вида нагрузками. Проводилось сравнение расчетных данных с решениями, полученными другими методами [5, 9–11]. Во всех рассмотренных случаях имело место хорошее согласование сравниваемых результатов.

Для аппроксимации компонент перемещений в качестве функций $\varphi_i(x, y)$, входящих в (1.8), использовались степенные функции, составляющие полные полиномы степени S . Отметим, что при этом каждая из функций φ_i в общем случае не удовлетворяет граничным условиям, однако в данном методе они могут быть использованы, так как условия заделки или шарнирного закрепления удовлетворяются выбором функций $F_{m_j}^j(x, y)$, а условия упругого закрепления следуют из условия минимума функционала L .

Установлено, что скорость сходимости рядов (1.8) зависит от величины H_j (фиг. 1, а), характеризующей размер области Ω_j в направлении нормали к линии Γ_{2j} . Как показывают численные эксперименты, при расчете целесообразно выбирать $3a \cdot 10^{-3} \leq H_j \leq a \cdot 10^{-2}$, где a — характерный линейный размер оболочки в плане. При увеличении H_j скорость сходимости рядов (1.8) уменьшается. Представленные ниже



Фиг. 2

данные иллюстрируют сходимость рядов в задаче об изгибе жесткозаземленной по контуру квадратной в плане сферической панели:

S	4	6	8	10
N	18	34	55	81
w^*	0,86	1,09	1,09	1,01
σ^*	1,24	1,12	0,98	1,01

Здесь S — степень аппроксимирующего полинома, N — порядок решаемой системы алгебраических уравнений (с учетом симметрии задачи относительно центральных осей квадрата), $w^* = w/w_0$, $\sigma^* = \sigma_x/\sigma_0$, σ_x — нормальное напряжение в центре панели, w_0 , σ_0 — значения перемещения и напряжения, определенные методом конечных разностей [10]. Результаты получены в случае действия на оболочку равномерно распределенной нагрузки $q=1$ МПа, при $h=0,01$, $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu=0,3$, $k_x=k_y=-1$ м⁻¹, $a=1$ м, $H_3/a=0,005$ (h , k_x , k_y , a — соответственно толщина, кривизны, размер сторон плана оболочки).

Были проведены расчеты с целью исследования влияния упругих свойств закрепляющих элементов на напряженно-деформированное состояние оболочки, а также для определения значений параметров k_{ij} , k_{ij}^* , при которых моделируются условия шарнирного опирания или заделки. Оказалось, что напряженно-деформированное состояние оболочек и пластин существенно зависит от жесткостных характеристик упругих опор. Уменьшение жесткости закрепляющих элементов может приводить в одних случаях к уменьшению напряжений в конструкции, в других — к их увеличению. Отметим, что коэффициенты k_{ij} , k_{ij}^* выражаются через геометрические и механические характеристики стержней, моделирующих упругое закрепление оболочки. Следовательно, не проводя расчетов, на основе данных о нагружении оболочки, ее геометрии и свойств материала, из которого она изготовлена, можно выбрать значения k_{ij} , k_{ij}^* , при которых будут моделироваться условия жесткого закрепления.

Скорость сходимости рядов (1.8) в задачах расчета упругозакрепленных оболочек ($F_{m_j}^j=1$) примерно такая же, как и в случаях использования функций $F_{m_j}^j$ в качестве множителей для удовлетворения жесткого закрепления. Рассмотренную задачу изгиба сферической панели можно решить задавая в (1.2) сравнительно большие значения коэффициентов k_{ij} или некоторых из них.

Графики прогибов и напряжений (при $z=h/2$, $x=0$) в опертой оболочке ($k_{ij}=0$; $i=1, 2, 4, 5$; $j=1, 2$), имеющей план трапециевидальной формы с закругленными углами (фиг. 2, а), представлены на фиг. 2, б, в. Данные получены для $q=1$ МПа, $h=0,1$ м, $\nu=0,25$, $E=10^4$ МПа, $k_x=k_y=-0,5$ м⁻¹, $a_1=0,3$ м, $a_2=0,5$ м, $b=0,6$ м, $R_1=0,15$ м, $R_2=0,1$ м, $S=10$. Штриховые линии соответствуют $k_{31}=10^2$ МПа, сплошные — $k_{31}=10^4$ МПа. В последнем случае можно считать, что реализуется условие жесткого опирания оболочки по контуру.

Отметим, что по данному методу проводились расчеты оболочек средней толщины, а также тонкие с относительной толщиной порядка 10^{-2} – 10^{-3} , для которых справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява. При этом не наблюдалось явления «ложного сдвига», появляющегося в ряде случаев при расчетах тонких оболочек методом конечных элементов на основе теории оболочек типа Тимошенко. Данные, полученные изложенным методом для тонких оболочек, практически совпадали с результатами решения по теории тонких оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука. 1978. 287 с.
2. Паймушин В. Н. К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 273. № 5. С. 1083–1086.
3. Марчук Г. И., Агашюв В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. 1981. 416 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка. 1982. 551 с.

5. *Корнишин М. С., Файзуллина М. А.* Большие прогибы и устойчивость пластин и пологих оболочек неканонической формы в плане // 13-я Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин; Таллин. политехн. ин-т. 1983. Ч. 3. С. 78-83.
6. *Норри Д., Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир. 1981. 304 с.
7. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат. 1982. 447 с.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
9. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука. 1966. 635 с.
10. *Корнишин М. С., Петухов Н. П.* К расчету на изгиб гибких пластин и пологих панелей со сложным очертанием контура методом блочной итерации // Тр. семинара по теории оболочек. Казань; Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР. 1975. Вып. 6. С. 34-39.
11. *Толкачев В. М., Артюхин Ю. П., Грибов А. П.* Решение задач изгиба пластин сложного контура методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. 2-го Всесоюз. совещания-семинара молодых ученых. Казань; Казан. инж.-строит. ин-т. 1985. С. 218.

Набережные Челны

Поступила в редакцию
24.II.1986