

УДК 539.3

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

КУЗНЕЦОВ В. В., СОЙНИКОВ Ю. В.

Для определения напряженно-деформированного состояния подкрепленных оболочек методом конечных элементов разработан ряд различных подходов. В [1, 2] основное внимание уделено описанию конструктивных особенностей оболочек в рамках линейной постановки задачи, в [3, 4] — описанию нелинейного деформирования оболочек канонической геометрии. В настоящей работе подход, предложенный в [5], обобщается на случай нелинейного деформирования подкрепленных оболочек произвольной формы.

1. Основная концепция метода конечных элементов, характеризуемая делением поверхности на подобласти или конечные элементы, дает возможность локального описания геометрии элемента. Рассмотрение небольшого элемента поверхности позволяет однозначно определить его геометрию по отношению к некоторому простому геометрическому объекту, например плоскости. В качестве геометрических характеристик исходной и деформированной поверхности оболочки примем радиус-вектор точек срединной поверхности и положение единичного орта нормали в этих точках.

Представим векторное уравнение срединной поверхности оболочки в окрестности некоторой точки O в виде (здесь и всюду далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам, если не оговорено противное): $\mathbf{r} = \mathbf{r}^p + \zeta \mathbf{e}_3$, $\mathbf{r}^p = \mathbf{r}^0 + \alpha_i \mathbf{e}_i$ ($i=1, 2$), где \mathbf{r}^p — радиус-вектор плоскости, касательной к поверхности в точке O ; α_i — декартовы координаты на плоскости; $\zeta = \zeta(\alpha_1, \alpha_2)$ — функция, задающая форму поверхности в окрестности точки O ; \mathbf{r}^0 — радиус-вектор начала координат α_i ; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты касательной плоскости и нормаль в точке O соответственно.

Будем считать, что деформирование оболочки следует гипотезам Кирхгофа — Лява [6] и характеризуется малыми деформациями срединной поверхности; на перемещения и углы поворота элемента оболочки ограничения не накладываются.

В результате деформирования оболочки точка O переходит в точку O_1 , орты касательной плоскости \mathbf{e}_i — в орты \mathbf{e}_i^\sim . Радиус-вектор деформированной поверхности примет вид $\mathbf{r}^\sim = \mathbf{r}^{\sim p} + \zeta^\sim \mathbf{e}_3^\sim$, $\zeta^\sim = \zeta + w$, где $\mathbf{r}^{\sim p}$ — вектор на касательной плоскости к деформированной оболочке; w — прогиб.

Компоненты тензора деформаций на расстоянии z от срединной поверхности имеют вид $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + z \kappa_{ij}$. С учетом разложения функций $\zeta(\alpha_1, \alpha_2)$ и $w(\alpha_1, \alpha_2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки O с точностью до величин порядка $O(\alpha^2)$ общие выражения для деформаций и искривлений [7] примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= 1/2 (\mathbf{r}_{,i}^\sim \mathbf{r}_{,j}^\sim - \delta_{ij}), \\ \kappa_{ij} &= 1/2 (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Индексы после запятой означают дифференцирование по координатам на плоскости; δ_{ij} — символ Кронекера. Изменения косинусов углов наклона θ_i вектора нормали к касательной плоскости вычисляются по формуле

$$\theta_i = \mathbf{n}^\sim \mathbf{r}_{,i}^\sim - n_i \mathbf{r}_{,i}^p \quad (i=1, 2) \quad (1.2)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{n})$ — единичный орт нормали к деформированной (недеформированной) поверхности.

Меры деформаций и искривлений (1.1), определяющие деформирование оболочки произвольной формы, являются приближенными. Их точность определяется величиной области изменения параметров α_i . Для получения более точного решения требуется более частое разбиение поверхности оболочки на элементы. Это требование соответствует одному из основных критериев сходимости метода конечных элементов [8].

Другой важный критерий [8], касающийся отсутствия напряжений в конструкции при перемещениях как твердого тела, удовлетворяется точно при произвольных значениях $\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{n}}$. В этом частном случае имеем $\tilde{\mathbf{r}}_i^p = \mathbf{e}_i$, $\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_i = n_i$. Таким образом, соотношения (1.1), (1.2) обеспечивают конечные перемещения элемента поверхности оболочки как твердого целого в определенное положение в пространстве и его малые деформации относительно этого положения. Использование радиуса-вектора и вектора нормали для описания геометрии оболочки отличает данный подход от известных методов параметрического задания геометрии произвольной поверхности.

Формулы (1.1), (1.2) справедливы не только относительно касательной плоскости, но также относительно любой другой координатной плоскости, достаточно близкой к касательной. При построении конечноэлементных моделей оболочек на основе треугольных элементов удобно в качестве координатной плоскости использовать секущую плоскость, которую легко построить зная радиусы-векторы $\tilde{\mathbf{r}}_i$ трех узлов элемента до и после деформации. Тогда, используя L -координаты [8], радиус-вектор точки на плоскости до и после деформации можно выразить следующим образом: $\mathbf{r}^p = \tilde{\mathbf{r}}_i L_i$, $\tilde{\mathbf{r}}^p = \tilde{\mathbf{r}}_i \tilde{L}_i$ ($i=1, 2, 3$). Вычисляя компоненты тензора деформаций ϵ_{ij} , с помощью этих соотношений можно определить, что они принимают постоянные значения в пределах одного элемента. Искривления κ_{ij} запишем в виде $\kappa_{ij} = 1/2(N_{km,ij} + N_{km,ji})\theta_{km}$ ($i, j, k=1, 2, 3$), где N_{km} — функции формы; θ_{km} — узловые значения изменений косинусов углов наклона нормали (первый индекс соответствует номеру косинуса, второй — номеру узла):

$$\theta_{km} = \tilde{\mathbf{n}}_m \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{k,h}^p - \mathbf{n}_m \mathbf{r}_{k,h}^p$$

Здесь $\tilde{\mathbf{n}}_m(\mathbf{n}_m)$ — значения вектора нормали в каждом узле. В качестве функций формы, описывающих изменения кривизны элемента, берутся кубические полиномы, записанные в L -координатах. В работе [9] с использованием вариационного метода определено преобразование полиномов к виду, обеспечивающему наилучшее согласование по углам поворота на границах элементов.

Потенциальную энергию конечного элемента оболочки запишем в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_F (T_{ij} \epsilon_{ij} + M_{ij} \kappa_{ij}) dF \quad (1.3)$$

$$T_{ij} = B[(1-\nu)\epsilon_{ij} + \nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})\delta_{ij}]$$

$$M_{ij} = D[(1-\nu)\kappa_{ij} + \nu(\kappa_{11} + \kappa_{22})\delta_{ij}]$$

$$B = Eh/(1-\nu^2), \quad D = Bh^2/12$$

где h — толщина оболочки, E, ν — упругие постоянные, δ_{ij} — символ Кронекера. Используя линейное преобразование переменных (ν^*, B^*, D^* — обобщенные жесткостные характеристики):

$$\tau_{ij} = B^*[(1-\nu^*)\epsilon_{ij} + \nu^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})\delta_{ij}]$$

$$\mu_{ij} = D^*[(1-\nu^*)\kappa_{ij} + \nu^*(\kappa_{11} + \kappa_{22})\delta_{ij}]$$

$$\nu^* = \nu/(1+(1-\nu^2)^{1/2})$$

$$B^* = [B/(1+\nu^2)]^{1/2}, \quad D^* = [D/(1+\nu^2)]^{1/2}$$

получим из (1.3) каноническую форму [10] потенциальной энергии оболочечного элемента

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_F (\tau_{ij}^2 + \mu_{ij}^2) dF$$

Для удобства алгоритмизации введем 9-компонентный вектор обобщенных упругих перемещений ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$; знак T означает транспонирование): $\mathbf{u}^T = [\dots, \varepsilon_{ij}, \dots, \theta_{km}, \dots]$ ($i, j, k = 1, 2; m = 1, 2, 3$), с помощью которого энергия деформации приводится к виду

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad \mathbf{K} = \iint_F [\boldsymbol{\tau}_{ij}' \boldsymbol{\tau}_{ij}'^T + \boldsymbol{\mu}_{ij}' \boldsymbol{\mu}_{ij}'^T] dF \quad (1.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_{ij}'$, $\boldsymbol{\mu}_{ij}'$ — векторы, составленные из производных $\partial \tau_{ij} / \partial u_k$, $\partial \mu_{ij} / \partial u_k$, \mathbf{K} — матрица жесткости треугольного элемента оболочки.

2. В качестве подкрепляющего элемента оболочки используется эксцентрично расположенный тонкий криволинейный стержень, работающий на растяжение, изгиб и кручение.

Определим геометрию кривой, расположенной на срединной поверхности оболочки, радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^p + \eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}^p = \mathbf{r}^0 + \alpha \mathbf{e}_1 \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{r}^p — радиус-вектор прямой линии, касательной к кривой в точке O ; α — координата, отсчитываемая по касательной к кривой в точке O ; $\eta(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$ — функции, задающие форму кривой в окрестности точки O ; \mathbf{r}^0 — радиус-вектор начала координаты α ; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — правая тройка ортогональных единичных ортов. При движении по кривой касательной орт \mathbf{e}_1 переходит в $\boldsymbol{\tau}$, нормальной \mathbf{e}_3 — в \mathbf{n} и орт \mathbf{e}_2 — в \mathbf{t} . Функции η, ζ в окрестности точки O имеют разложение

$$\eta = 1/2 g \alpha^2, \quad \zeta = 1/2 k \alpha^2 \quad (2.2)$$

где g, k — геодезическая и нормальная кривизны кривой.

Радиус-вектор центральной оси подкрепляющего элемента \mathbf{r}^s представим в виде $\mathbf{r}^s = \mathbf{r} + e \mathbf{n}$, где e — эксцентриситет подкрепления. Тогда выражение для радиуса-вектора произвольной точки сечения стержня будет (y, z — координаты в сечении стержня):

$$\mathbf{r}^s = \mathbf{r} + (e+z) \mathbf{n} + y \mathbf{t} \quad (2.3)$$

При деформировании стержня векторы $\mathbf{r}, \mathbf{r}^s, \mathbf{n}, \mathbf{t}$ переходят в $\check{\mathbf{r}}, \check{\mathbf{r}}^s, \check{\mathbf{n}}, \check{\mathbf{t}}$, формулы (2.1), (2.2), (2.3) записываются в виде

$$\check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}^p + \check{\eta} \check{\mathbf{e}}_2 + \check{\zeta} \check{\mathbf{e}}_3, \quad \check{\eta} = 1/2 g \check{\alpha}^2 \\ \check{\zeta} = 1/2 k \check{\alpha}^2, \quad \check{\mathbf{r}}^s = \check{\mathbf{r}} + (e+z) \check{\mathbf{n}} + y \check{\mathbf{t}}$$

Вычисляя удлинение продольных волокон в формуле [7]: $\varepsilon^s = 1/2 \times [(\check{\mathbf{r}}_{,\alpha}^s)^2 - (\mathbf{r}_{,\alpha}^s)^2] (\mathbf{r}_{,\alpha}^s)^{-2}$ и пренебрегая величинами порядка $k(e+z)$ по сравнению с единицей, получим следующие деформационные соотношения для подкрепляющего элемента стержня:

$$\varepsilon^s = \varepsilon + (z+e) \kappa + y \kappa_g, \quad \varepsilon = 1/2 (\mathbf{r}_{,\alpha} \check{\mathbf{r}}_{,\alpha}^p - 1) \\ \kappa = \mathbf{n}_{,\alpha} \check{\mathbf{r}}_{,\alpha}^p - \mathbf{n}_{,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha}^p, \quad \kappa_g = \mathbf{t}_{,\alpha} \check{\mathbf{r}}_{,\alpha}^p - \mathbf{t}_{,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha}^p \quad (2.4)$$

Здесь ε — удлинение волокон на срединной поверхности оболочки, κ, κ_g — изменение нормальной и геодезической кривизны кривой на поверхности оболочки. Выражение для нормальной кривизны подкрепления κ (2.4) удобно записать в виде $\kappa = \theta_{,\alpha}$, $\theta = \mathbf{n} \check{\mathbf{r}}_{,\alpha}^p - \mathbf{n} \mathbf{r}_{,\alpha}^p$, где θ — изменение косинуса угла наклона вектора нормали к координатной линии.

Из геометрии известно, что при чистом изгибании элемента поверхности геодезическая кривизна кривых на поверхности остается неизменной. Считая, что в силу конструктивных особенностей тонкостенных оболочек, подкрепленных тонкими стержневыми элементами, их деформированное состояние близко к изгибанию, можно положить $\kappa_g \approx 0$.

В общем случае деформирования подкрепляющего элемента с обшивкой происходит относительное кручение поперечных сечений в результате действия крутящего момента. Из теории кручения стержней [11]

известно, что крутящий момент M_k связан с относительным углом закручивания или кручением зависимостью $M_k = C_s \chi$, $C_s = G J_k$, где C_s — жесткость при кручении; G — модуль сдвига; J_k — момент инерции сечения при кручении. Характеристика сечения J_k устанавливается методами теории упругости или экспериментально.

Кручение χ определяется относительным поворотом двух нормальных сечений стержня, отстоящих друг от друга на расстояние $d\alpha$. Положение плоскости нормального сечения зададим системой ортогональных векторов \mathbf{n} и $\mathbf{t} = \mathbf{r}_{,\alpha} \times \mathbf{n}$. Тогда с учетом начального кручения подкрепляющего элемента выражение для изменения относительного угла закручивания будет иметь вид $\chi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\alpha} \mathbf{r}_{,\alpha}$, где использовано известное обозначение для смешанного произведения векторов. Используя полученное соотношение и (2.4), запишем выражение потенциальной энергии подкрепляющего криволинейного элемента, согласованного по степеням свободы с треугольным оболочечным элементом

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\alpha} [B_s(\varepsilon + e\chi)^2 + D_s \kappa^2 + C_s \chi^2] d\alpha \quad (2.5)$$

где B_s , D_s , C_s — жесткостные характеристики растяжения — сжатия, изгиба и кручения.

Используя четырехкомпонентный вектор \mathbf{u} с обобщенными неизвестными θ_1 , θ_2 , ε , χ , приведем потенциальную энергию (2.5) к виду

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = [\theta_1, \theta_2, \varepsilon, \chi]^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{B_s(\varepsilon' + e\chi')(\varepsilon' + e\chi')^T + D_s \kappa' \kappa'^T + C_s \chi' \chi'^T\} d\alpha$$

Здесь штрихом обозначены производные от соответствующих величин по вектору \mathbf{u} ; \mathbf{K} — матрица жесткости; θ_1 , θ_2 — косинусы углов наклона нормали к оси α в первом и втором узлах подкрепляющего элемента.

Ввиду условий совместности деформаций функции формы для подкрепляющего элемента определяются функциями N_{km} для элемента оболочки. Интегрирование в матрице \mathbf{K} осуществляется по кубатурным формулам Гаусса второго порядка для треугольного оболочечного элемента и точно для подкрепляющего элемента.

Одним из эффективных методов решения нелинейных уравнений равновесия является метод Ньютона, основанный на вычислении первой и второй вариаций потенциальной энергии при варьировании по обобщенным координатам δq_i . В качестве обобщенных координат в узле элемента примем приращения декартовых координат δx_{ij} и компоненты первой вариаций вектора нормали $\delta \varphi_{ij}$ (j — номер узла элемента). $\delta \mathbf{q}_j = [\delta x_{1j}, \delta x_{2j}, \delta x_{3j}, \delta \varphi_{1j}, \delta \varphi_{2j}]^T$.

Вследствие однотипности выражений (1.4) и (2.6) вычисление первой и второй вариаций потенциальной энергии конечных элементов осуществляется по общим формулам $\delta \Pi = (\mathbf{g}^{\Pi})^T \delta \mathbf{q}$; $\delta^2 \Pi = (\delta \mathbf{q})^T \mathbf{H}^{\Pi} \delta \mathbf{q}$, где \mathbf{g}^{Π} — вектор градиента; \mathbf{H}^{Π} — матрица Гесса; $\delta \mathbf{q}$ — вектор приращений обобщенных координат, характеризуемый вектором $\delta \mathbf{q} = [\delta q_j^T]$, где $j=1, 2$ соответствует стержневому элементу; $j=1, 2, 3$ — оболочечному элементу.

Используя представление (1.4), (2.6), получим для \mathbf{g}^{Π} , \mathbf{H}^{Π} следующие выражения: $\mathbf{g}^{\Pi} = \mathbf{u}' \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{u}$, $\mathbf{H}^{\Pi} = \mathbf{u}' \mathbf{K} (\mathbf{u}')^T + \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i''$ ($i=1, \dots, l$), где l — размерность вектора \mathbf{u} ; \mathbf{u}' , \mathbf{u}_i'' — матрицы первых и вторых производных от обобщенных упругих перемещений по обобщенным координатам, компоненты которых определяются по формулам

$$\begin{aligned} \delta u_i &= \partial u_i / \partial q_k \delta q_k \\ \delta^2 u_i &= \partial^2 u_i / \partial q_m \partial q_k \delta q_m \delta q_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

Нахождение $\partial u_i / \partial x_{kj}$ не вызывает затруднений. При вычислении $\partial u_i / \partial \varphi_{kj}$ нужно иметь в виду, что по φ_{kj} варьируются косинусы λ_{kj} век-

тора нормали \tilde{n}_j (по j не суммировать):

$$\partial \tilde{\lambda}^n / \partial \varphi_{ij} \tilde{\sim} = \tilde{\lambda}_{ikj}, \quad \partial \tilde{\lambda}_{ikj} / \partial \varphi_{mj} \tilde{\sim} = -\delta_{im} \tilde{\lambda}_{kj}^n \quad (i, m=1, 2) \quad (2.8)$$

Здесь $\tilde{\lambda}_{ikj}$ — направляющие косинусы двух вспомогательных векторов в узле j , образующих с \tilde{n}_j взаимно ортогональную тройку.

Для оболочечного элемента операции дифференцирования вектора обобщенных перемещений производятся с помощью (2.7), (2.8). В этом случае ненулевые компоненты матрицы u' имеют следующие выражения (по j не суммировать):

$$\partial \varepsilon_{ij} / \partial x_{km} \tilde{\sim} = 1/2 (b_{mi} x_{h,j}^{\tilde{p}} + b_{mj} x_{h,i}^{\tilde{p}})$$

$$\partial \theta_{ij} / \partial x_{km} \tilde{\sim} = b_{mi} \tilde{\lambda}_{kj}^n, \quad \partial \theta_{ij} / \partial \varphi_{kj} \tilde{\sim} = \tilde{\lambda}_{kmj} x_{m,i}^{\tilde{p}}$$

Соответствующие формулы для вычисления компонентов матриц u_i'' ($i=1, \dots, 9$) имеют вид (по k и j не суммировать):

$$\partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial x_{km} \tilde{\sim} \partial x_{hs} \tilde{\sim} = 1/2 (b_{mi} b_{sj} + b_{mj} b_{si})$$

$$\partial^2 \theta_{ij} / \partial x_{km} \tilde{\sim} \partial \varphi_{sj} \tilde{\sim} = b_{mi} \tilde{\lambda}_{skj}$$

$$\partial^2 \theta_{ij} / \partial \varphi_{kj} \tilde{\sim}^2 = -\tilde{\lambda}_{mj}^n x_{m,i}^{\tilde{p}}$$

Ненулевые компоненты матрицы u' для подкрепляющего элемента имеют следующие выражения (по j не суммировать):

$$\partial \varepsilon / \partial x_{ij} \tilde{\sim} = b_j x_{i,\alpha}^{\tilde{p}}, \quad \partial \theta_h / \partial x_{ij} \tilde{\sim} = b_j \tilde{\lambda}_{ih}^n$$

$$\partial \theta_j / \partial \varphi_{hj} \tilde{\sim} = \tilde{\lambda}_{hmj} x_{m,\alpha}^{\tilde{p}}, \quad \partial \chi / \partial x_{ij} \tilde{\sim} = b_j l^{-1} a_i^{3132}$$

$$\partial \chi / \partial \varphi_{k1} \tilde{\sim} = l^{-1} a_i^{h132} x_{i,\alpha}^{\tilde{p}}, \quad \partial \chi / \partial \varphi_{h2} \tilde{\sim} = l^{-1} a_i^{31h2} x_{i,\alpha}^{\tilde{p}}$$

Здесь через a_p^{ijkm} обозначена проекция на ось x_p векторного произведения ($e_{ij} \tilde{\sim} \times e_{km} \tilde{\sim}$), причем принято, что $e_{sj} \tilde{\sim} = \tilde{n}_j$. Аналогично вычисляются матрицы u_i'' ($i=1, \dots, 4$), ненулевые компоненты которых имеют вид (в первых четырех формулах по i и j не суммировать):

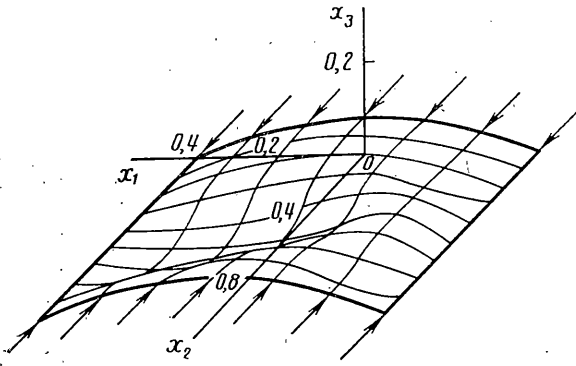
$$\partial^2 \varepsilon / \partial x_{ij} \tilde{\sim} \partial x_{ik} \tilde{\sim} = b_j b_k, \quad \partial^2 \theta_j / \partial x_{km} \tilde{\sim} \partial \varphi_{si} \tilde{\sim} = b_m \tilde{\lambda}_{shj}$$

$$\partial^2 \theta_j / \partial \varphi_{kj} \tilde{\sim}^2 = -\tilde{\lambda}_{mj}^n x_{m,\alpha}^{\tilde{p}}, \quad \partial^2 \chi / \partial x_{ij} \tilde{\sim} \partial \varphi_{h1} \tilde{\sim} = b_j l^{-1} a_i^{h132}$$

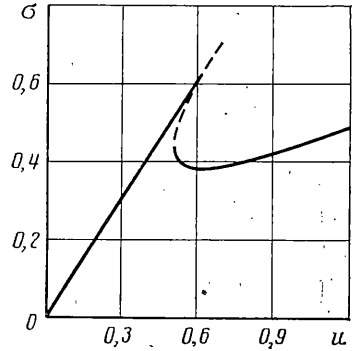
$$\partial^2 \chi / \partial x_{ij} \tilde{\sim} \partial \varphi_{h2} \tilde{\sim} = b_j l^{-1} a_i^{31h2}, \quad \partial^2 \chi / \partial \varphi_{k1} \tilde{\sim} \partial \varphi_{j2} \tilde{\sim} = l^{-1} a_i^{h1j2} x_{i,\alpha}^{\tilde{p}}$$

$$\partial^2 \chi / \partial \varphi_{k1} \tilde{\sim}^2 = -l^{-1} a_i^{3132} x_{i,\alpha}^{\tilde{p}}, \quad \partial^2 \chi / \partial \varphi_{h2} \tilde{\sim}^2 = -l^{-1} a_i^{31h2} x_{i,\alpha}^{\tilde{p}}$$

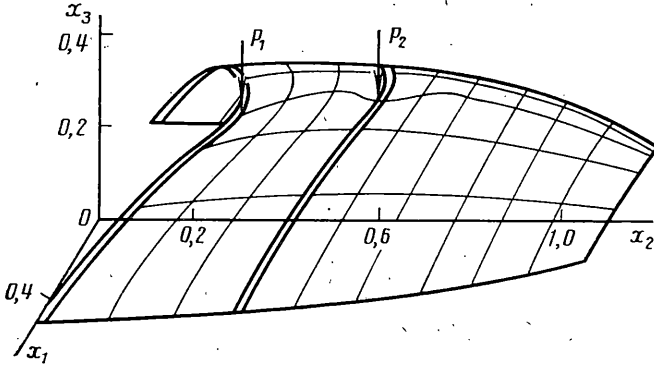
Формирование градиента и гессiana для ансамбля конечных элементов производится с помощью матриц индексов согласно схеме соединения оболочечных и стержневых элементов. Вектор δq находится из системы уравнений для ансамбля элементов $H \delta q + g = 0$, где g ; H — градиент и гессian полной потенциальной энергии. После каждой итерации метода Ньютона новое значение r^* , n^* определяется по формулам $r^* = r + \delta r$, $n^* = n \cos \delta n + \delta n \sin \delta n / \delta n$, где δn — вариация вектора нормали [12]. Процесс повторяется до получения решения $g=0$ с заданной степенью точности. Устойчивость найденного решения определяется проверкой матрицы H на положительную определенность. Смена знака угловых миноров матрицы Гесса, согласно критерию Сильвестра, является признаком прохождения точки ветвления форм равновесия или предельной точки. Для продолжения решения после критической точки эффективным является метод, основанный на вычислении собственного вектора матрицы H (формы потери устойчивости). Форма потери устойчивости, используемая в качестве начального приближения, обеспечивает сходи-



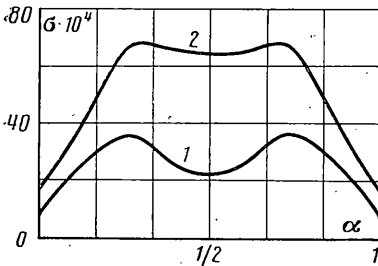
Фиг. 1



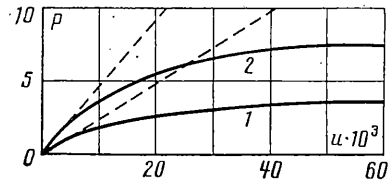
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

мость метода Ньютона к новым устойчивым закритическим формам равновесия.

3. Расчет подкрепленных оболочек произвольной формы предложенным выше методом, основан на задании первичной геометрической информации об объекте. В качестве такой информации берутся значения радиусов-векторов узлов элементов и положения в этих узлах единичных ортов нормали к поверхности. Различия в геометрии исследуемых оболочек несущественны с точки зрения алгоритмизации вычислений, так как для расчета нужна одна и та же поузловая информация. Универсальный подход позволяет охватить широкий класс задач расчета подкрепленных оболочек произвольной формы, работающих в области больших перемещений.

Рассмотрим задачу сжатия цилиндрической панели прямоугольной формы в плане. Решение этой задачи в линейной и нелинейной постановках содержится для некоторого варианта граничных условий в [13, 14]. В них анализируются верхнее и нижнее значения критических параметров и приводятся решения для ограниченной области изменения перемещений. В настоящей работе рассматривается применение разра-

ботанного варианта метода конечных элементов, позволяющего решить эту задачу при произвольных упругих перемещениях.

Геометрия панели определяется следующими величинами: $l/R=1$; $R/h=100$; $b/l=0,875$; где R , h — радиус и толщина панели; l , b — длины прямолинейной и криволинейной кромок. Криволинейные кромки панели свободно смещаются в направлении действия нагрузки и не имеют перемещений в перпендикулярных направлениях. Распределенные сжимающие усилия, приложенные к криволинейным кромкам, характеризуются безразмерным параметром $\sigma=PR/(Eh)$, где P — среднее напряжение, E — модуль упругости. На фиг. 1 показана форма деформированной панели (размеры даны в м), рассчитанная при $\sigma=0,69$. Из полученных результатов следует, что закритическое деформирование происходит к центру кривизны панели и носит характер асимметричного коробления. На фиг. 2 приведен график зависимости среднего напряжения σ от безразмерного смещения $u=vR/(lh)$, где v — действительное смещение торцов панели. Сплошными линиями показаны кривые устойчивых состояний, пунктирными — неустойчивых. Анализ диаграммы равновесных состояний позволяет определить верхнее σ_0 и нижнее σ_H критические значения параметра нагрузки, величина которых в данном случае составляет $\sigma_0 \approx 0,58$ и $\sigma_H \approx 0,38$. Значение критического параметра K_c [13] достаточно близко к аналогичной величине для цилиндрических оболочек.

Рассмотрим нелинейное деформирование подкрепленной оболочки неканонической формы, нагруженной двумя сосредоточенными силами P_1 , P_2 , приложенными к подкреплениям. Форма деформированной оболочки, рассчитанная при $P_1=3,7$ Н; $P_2=7,4$ Н, показана на фиг. 3. Положительное направление сил изображено стрелками. В расчетах принимались следующие значения параметров подкрепленной оболочки: $E=0,12$ МПа; $h=0,01$ м (толщина оболочки); $h/a=0,2$; $h/b=0,1$; a , b — размеры подкреплений; $e=0$.

На фиг. 4 приведено распределение безразмерных напряжений σ по центральной линии подкреплений, где $\sigma=P/E$. Кривые 1 и 2 соответствуют распределению напряжений в торцевом и промежуточном подкреплении, параметр α равен относительной длине дуги подкреплений и изменяется в интервале $0 \leq \alpha \leq 1$. На фиг. 5 приведены зависимости P_i от u для точек приложения сил P_1 , P_2 (кривые 1, 2 соответственно), где u — перемещение под сосредоточенной силой. Штриховыми линиями показано линейное решение, сплошными — с учетом геометрической нелинейности. Анализ диаграммы равновесных состояний показывает, что в процессе нагружения жесткость оболочки уменьшается и при $u=0,05$ м отличие от линейного решения составляет 69%.

Расчетные схемы в рассмотренных задачах содержали 195 и 70 узлов соответственно. Число итераций на одном шаге нагружения равнялось 3–4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк. 1985. 392 с.
2. Бурман Э. И., Аксенов О. М., Лукашенко В. И., Тимофеев М. Т. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек. М.: Машиностроение. 1982. 256 с.
3. Han K. J., Gould P. L. Line node and transitional shell element for rotational shells // Intern. J. Numer. Meth ods in Eng. 1982. V. 18. No. 6. P. 879–895.
4. Wempner G., Talaslidis D., Hwang C. A simple and efficient approximation of shells via finite quadrilateral elements // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. No. 1. P. 115–120.
5. Кузнецов В. В., Соиников Ю. В. Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 131–138.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
7. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат. 1948. 241 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир. 1975. 544 с.
9. Бадрузин Ю. И., Кузнецов В. В., Соиников Ю. В. К вопросу о построении согласованных изгибных конечных элементов // Численные методы решения задач

- теории упругости и пластичности. Тр. 7-й Всесоюз. конф. Миасс: Изд-е Ин-та прикл. механики СО АН СССР. 1982. С. 256—264.
10. Кузнецов В. В. Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ. 1987. № 5. С. 144—146.
 11. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз. 1963. 686 с.
 12. Кузнецов В. В. К определению вращений в трехмерном пространстве на основе понятия вариации вектора // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 58—60.
 13. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука. 1978. 359 с.
 14. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука. 1966. 296 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
29.X.1986