МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1988

УДК 622.011.4

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РАЗРУШЕНИЮ ГОРНЫХ ПОРОД

ГЛУШКО А. И.

Поведение горных пород под действием сжимающих напряжений во многом отличается от поведения металлов и грунтов. Экспериментальные наблюдения показывают, что при увеличении сдвига интенсивность касательных напряжений изменяется немонотонно: при малых деформациях сдвига интенсивность касательных напряжений сначала увеличивается, достигая максимума, и затем при дальнейшем увеличении деформаций падает. Характерны также разрыхление (дилатансия) среды под действием сжимающих напряжений и изменение скоростей продольных и поперечных волн [1].

В [2–4] предложена модель упругопластического течения горных пород с «разупрочнением» [2–4]. Между тем очевидно, что при деформировании и разрушении в среде происходит накопление микротрещин и других разного рода дефектов. Естественно предположить, что процесс накопления дефектов оказывает существенное влияние на поведение горных пород при деформировании.

В настоящей работе излагаются основные представления и гипотезы кинематики деформирования сплошной среды с учетом накопления повреждений. Получены соотношения, связывающие скорости изменения компонент метрического тензора в деформированном и разгруженном состоянии и скорость изменения повреждаемости. Приведены соотношения, вытекающие из законов термодинамики, получены уравнения, связывающие напряжения с деформациями и повреждаемостью. Изложены физические представления о протекании процесса накопления микротрещин и предложены уравнения, определяющие скорость изменения повреждаемости как функции деформаций и повреждаемости. Приведена система дифференциальных уравнений, моделирующая деформирование и разрушение горных пород.

1. Ограничимся рассмотрением кратковременных интенсивных нагрузок. Будем считать, что разрыхление (дилатансия) и изменение эффективных модулей среды характерны как для квазистатических процессов, так и для быстропротекающих динамических процессов.

Разрушение горных пород под действием сжимающих напряжений связано с образованием и накоплением в среде разного рода микродефектов, прежде всего микротрещин. Известно, что эти трещины малы, а их плотность может быть очень большой. В этих условиях естественно интересоваться осредненными характеристиками среды и не рассматривать движение каждой трещины, т. е. принять при описании среды гипотезу сплошности.

Будем рассматривать движение сплошной среды относительно эйлеровой системы координат $x=(x^1, x^2, x^3)$. Пусть $\xi=(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — лагранжевы координаты, $t$ — время. Примем, что разрушение, т. е. накопление в среде микротрещин, характеризуется одним параметром $D=D(\xi, t)$. Назовем $D$ повреждаемостью. Очевидно, что $\partial D/\partial t\geqslant 0$. Ясно, что по мере накопления дефектов механические свойства среды изменяются. Чтобы сформулировать более точно это предположение, следует обратиться к кинематике, а также термодинамике деформируемой сплошной среды.

В механике сплошной среды считается, что в некоторой окрестности $U$ каждой точки $\xi_0$ среда может быть обратимо разгружена. Это означает, что в окрестности $\xi_0\in U$ существует вектор-функция $r^\circ=r^\circ(\xi, t)$ $(\xi\in U)$, определяющая положение материальной частицы в разгруженном состоянии (он определен с точностью до поворотов). Обозначим $r=r(\xi, t)$ радиус-вектор частицы в деформированном состоянии и примем, что при $t=0$ среда не нагружена. Тогда, следуя [5], для любого $t>0$ можно ввести три базиса

$$r_i=\frac{\partial r}{\partial \xi_i}(\xi,0),\qquad R_i=\frac{\partial r}{\partial \xi_i}(\xi,t),\qquad r_i^\circ=\frac{\partial r^\circ}{\partial \xi_i}(\xi,t)\quad (i=1,2,3)$$

Базис $r_i$ соответствует ненагруженному состоянию, $R_i$ — деформированному состоянию, $r_i^\circ$ — разгруженному состоянию.

Обозначим $I=R_{ij}R^i\otimes R^j=r_{ij}r^i\otimes r^j=r_{ij}^\circ r^{\circ i}\otimes r^{\circ j}$ метрический тензор, компоненты которого в базисах $R^i$, $r^i$, $r^{\circ i}$ равны соответственно $R_{ij}=(R_i, R_j)$, $r_{ij}=(r_i, r_j)$, $r_{ij}^\circ=(r_i^\circ, r_j^\circ)$ $(i, j=1, 2, 3)$. Определим тензор-градиент $F$, тензор упругих деформаций $\varepsilon$ и тензор остаточных деформаций $\varepsilon^\circ$ по формулам ($F^t$ — тензор, сопряженный к $F$):

$$F=a_i^jr^i\otimes r^j,\quad R_i=a_i^jr_j,\quad \varepsilon={}^1/_2(R_{ij}-r_{ij}^\circ)R^i\otimes R^j$$
$$\varepsilon^\circ=r_{ij}^\circ r^i\otimes r^j=F^t(I-2\varepsilon)F \tag{1.1}$$

Отметим, что главные значения $\varepsilon_i$ тензора $\varepsilon$ связаны с коэффициентами упругих удлинений $g_i=(ds_i^\circ/dS_i)^2$ $(i=1, 2, 3)$ равенствами

$$g_i=1-2\varepsilon_i \tag{1.2}$$

Здесь $dS_i$ — расстояние между двумя «бесконечно» близкими материальными точками, лежащими на координатной оси $x^i$ главной системы координат тензора $\varepsilon$; $ds_i^\circ$ — расстояние между этими точками в разгруженном состоянии.

Главные значения $\varepsilon_i^\circ$ тензора $\varepsilon$ равны коэффициентам удлинений $g_i^\circ=$ $=(ds_i^\circ/ds_i)^2$ $(i=1, 2, 3)$. Здесь $ds_i$ — расстояние между двумя бесконечно близкими материальными точками в начальном состоянии, лежащими на координатной оси главной системы координат тензора $\varepsilon^\circ$; $ds_i^\circ$ — расстояние между этими точками в разгруженном состоянии. Такая связь между $\varepsilon$, $\varepsilon^\circ$ и $g_i$, $g_i^\circ$ указывает на то, что тензоры $\varepsilon$, $\varepsilon^\circ$ должны быть включены в число определяющих параметров модели.

Сформулируем одно из основных предположений. Примем, что для каждой материальной частицы $\xi=\xi_0$ разгруженное состояние зависит от степени разрушения. Это означает, что радиус-вектор $r^\circ$, определяющий положение частицы в разгруженном состоянии, зависит явно от поврежденности $D$: $r^\circ=r^\circ(\xi, t, D(\xi_0, t))$ $(\xi\in U)$, где $U$ — некоторая окрестность точки $\xi=\xi_0$. Тогда компоненты $r_{ij}$ будут зависеть также от поврежденности: $r_{ij}^\circ=r_{ij}^\circ(\xi, t, D(\xi, t))$. Дифференцируя обе части этого равенства по времени как сложную функцию $t$, получим

$$e_{ij}^p=\lim_{t\to t_0}\frac{[r_{ij}^\circ(\xi,t,D(\xi,t))-r_{ij}^\circ(\xi,t_0,D(\xi,t_0))]}{t-t_0}$$
$$e_{ij}^p=\partial r_{ij}^\circ/\partial t+\partial r_{ij}^\circ/\partial D\cdot D^\bullet\equiv e_{ij}'+e_{ij}''D^\bullet$$
$$D^\bullet=\partial D/\partial t,\quad e_{ij}'=\partial r_{ij}^\circ/\partial t,\quad e_{ij}''=\partial r_{ij}^\circ/\partial D$$

Отсюда следует, что производная тензора упругих деформаций по времени $t$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^\bullet=-e'-e''D^\bullet+e-\varepsilon\cdot\nabla v-(\nabla v)^t\cdot\varepsilon \tag{1.3}$$
$$e'=e_{ij}'R^i\otimes R^j,\quad e''=e_{ij}''R^i\otimes R^j$$
$$e={}^1/_2(\nabla_iv_j+\nabla_jv_i)R^i\otimes R^j,\quad \nabla v=\nabla_iv_jR^i\otimes R^j$$

где $v_i$ — компоненты вектора скорости $v$ $(v=v_iR^i)$. Таким образом, гипотеза о зависимости разгруженного состояния от поврежденности приводит к тому, что в правой части (1.3) имеется слагаемое, пропорциональное $D^\bullet$.

При феноменологическом описании тензоры $e'$, $e''$ должны быть определены, опираясь на опытные данные, как функции величин $\varepsilon$, $\varepsilon^\circ$, $D$ и, может быть, других термодинамических параметров. Важно подчеркнуть, что эти функции не могут быть произвольными, так как должны выполняться равенства (условия совместности)

$$\partial e_{ij}'/\partial D=\partial^2r_{ij}^\circ/\partial D\partial t=\partial^2 r_{ij}^\circ/\partial t\partial D=\partial e_{ij}''/\partial t \tag{1.4}$$

Заметим, что в сформулированной выше гипотезе несущественно, что параметр $D$ по физическому смыслу является мерой накопления в среде дефектов. Очевидно, эту гипотезу можно обобщить и на тот случай, когда состояние материальной частицы зависит от некоторого числа параметров иной физической природы — так называемых внутренних степеней свободы. Например, для описания термоупругих напряжений следует включить в их число и температуру. Для описания откольных явлений в металлах в качестве $D$ следует взять удельный объем микропор для вязких материалов или тензор повреждаемости для хрупких материалов.

2. Первый закон термодинамики можно записать в виде

$$\rho\partial E/\partial t=\sigma\cdot\cdot e+q \tag{2.1}$$

где $\rho$ — плотность, $E$ — удельная внутренняя энергия, $s$ — удельная энтропия (на единицу массы), $T$ — температура, $\sigma$ — тензор напряжений, $q$ — внешний приток тепла.

Второй закон термодинамики утверждает, что при всех возможных движениях сплошной среды должно выполняться неравенство

$$\rho T\partial s/\partial t-q\geqslant 0 \tag{2.2}$$

Здесь равенство имеет место только для обратимых процессов. Очевидно, что разрушение — необратимый процесс и в (2.2) при разрушении должно быть строгое неравенство.

Из опытных данных и физических представлений о деформировании и разрушении горных пород можно заключить, что состояние любой материальной частицы среды однозначно определяется значениями энтропии $s$, повреждаемости $D$, упругих $\varepsilon$ и остаточных $\varepsilon^\circ$ деформаций. Примем, что материал изотропен, а внутренняя энергия $E$ зависит от энтропии, повреждаемости, упругих удлинений и не зависит от истории деформирования. В этом случае $E=E(s, D, \varepsilon)=E(s, D, J_1, J_2, J_3)$, где $J_1=I_1(\varepsilon)=\varepsilon_\alpha{}^\alpha$, $J_2=I_1(\varepsilon\cdot\varepsilon)$, $J_3=I_1(\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon)$.

Введем обозначения

$$\varepsilon^\bullet=\partial\varepsilon/\partial t,\ s^\bullet=\partial s/\partial t,\ v^\bullet=\partial v/\partial t$$

$$E_D=\frac{\partial E}{\partial D},\quad E_\varepsilon=\sum_{k=1}^{3}k\varepsilon^{k-1}E_k,\qquad E_k=\frac{\partial E}{\partial J_k},\quad (k=1,2,3)$$

Здесь тензор $\varepsilon^k$ определяется по рекуррентной формуле $\varepsilon^\circ=I$, $\varepsilon^k=\varepsilon^{k-1}\cdot\varepsilon$. Продифференцируем $E$ по времени как сложную функцию и подставим в (2.2), учитывая (1.3) и равенство $I^\bullet(\varepsilon)=I(\varepsilon^\bullet)$, $\sigma\cdot\cdot e=I_1(\sigma\cdot e)$. Получим

$$\begin{aligned}0\leqslant\rho Ts^\bullet-q=I_1[(\sigma-\rho E_\varepsilon(I-2\varepsilon))\cdot e+\rho E_\varepsilon\cdot e']+\\+[I_1(\rho E_\varepsilon\cdot e'-\rho E_D)]D^\bullet\end{aligned} \tag{2.3}$$

Это неравенство должно выполняться при всех движениях сплошной среды.

Опираясь на физические представления о деформировании и разрушении горных пород и неравенство (2.3), сформулируем основные гипотезы модели среды.

Очевидно, что при деформировании и разрушении горных пород механическая энергия среды расходуется на образование новых дефектов, на преодоление сил трения между берегами трещин и на необратимое деформирование материала. Скорости диссипации в каждом из этих процессов независимы, и поэтому диссипация механической энергии равна сумме трех неотрицательных слагаемых. Учитывая это обстоятельство, отождествим следующие неравенства с диссипацией энергии, связанной соответственно с силами сухого трения ($s_1$), необратимым деформированием материала ($s_2$) и разрушением материала (накоплением дефектов) ($s_3$):

$$s_1\equiv(\sigma-\rho E_\varepsilon(I-2\varepsilon))\cdot\cdot e\geqslant 0 \tag{2.4}$$

$$s_2\equiv\rho E_\varepsilon\cdot e'\geqslant 0 \tag{2.5}$$

$$s_3\equiv\rho[I_1(E_\varepsilon\cdot e')-E_D]D^\bullet\geqslant 0 \tag{2.6}$$

Очевидно, если неравенства (2.4)—(2.6) выполняются при всех возможных движениях сплошной среды, то будет выполнено и неравенство

(2.3). Для выполнения (2.6) необходимо и достаточно, чтобы

$$I_1(E_\varepsilon \cdot e'') - E_D \geqslant 0 \qquad (2.7)$$

так как $D^\bullet \geqslant 0$. Дальнейшая конкретизация модели требует привлечения дополнительных данных о процессе деформирования и разрушения.

3. Будем считать, что при деформировании и разрушении горных пород диапазон изменения температуры невелик, так что напряженное состояние слабо зависит от температуры. В этом случае можно считать, что внутренняя энергия среды равна сумме двух слагаемых: $E = E_0(\varepsilon, D) + E_1(s, D)$, $E_0(0, D) = 0$, $E_1(s, 0) \neq 0$. Пусть $p = \rho E_\varepsilon (I - 2\varepsilon)$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - p$. Как указывалось выше, тензор $\boldsymbol{\tau}$ обусловлен силами трения между берегами трещин. Будем считать, что при $I_1(p) < 0$ тензоры $\boldsymbol{\tau}$ и $e$ коаксиальны, а главные значения $\tau_i$ тензора $\boldsymbol{\tau}$ вычисляются по формуле

$$\tau_i = -{}^1/_3 \alpha(D) I_1(p) \operatorname{sign}(e_i) \qquad (3.1)$$

где $e_i$ — главные значения тензора $e$. При $I_1(p) \geqslant 0$ полагаем $\boldsymbol{\tau} = 0$. Очевидно, что при $I_1(p) < 0$ будет выполнено неравенство

$$S_1 = I_1(\boldsymbol{\tau} \cdot e) = -{}^1/_3 \alpha(D) I_1(p) \sum_{k=1}^{3} |e_k| \geqslant 0$$

Тензор напряжений определяется теперь по формуле $\sigma = p + \tau$.

Из уравнений (1.4) следует, что тензор $e'$ не может зависеть от $D$, а тензор $e''$ не может зависеть от $\boldsymbol{\varepsilon}$: $e' = e'(\varepsilon, \varepsilon^\circ)$, $e'' = e''(D)$. Из опытных данных следует, что при интенсивных кратковременных нагрузках в среде проявляются релаксационные свойства [6, 7]. Поэтому естественно принять, что тензор $e'$ связан с $\boldsymbol{\varepsilon}$ так же, как в [8]. Примем, что тензоры $e'$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ коаксиальны, а главные значения $e_i'$ тензора $e'$ вычисляются по формуле

$$e_i' = g_i/\tau_\varepsilon \ln\left[g_i (g_1 g_2 g_3)^{-1/3}\right] \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (3.2)$$

Здесь $g_i$ вычисляются по формуле (1.2), $\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon(\varepsilon)$ — эмпирически определяемая функция (время релаксации). Как показано в [8], при таком определении тензора $e'$ модель будет отражать релаксационные свойства среды, а для выполнения (2.5) достаточно, чтобы ($\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ — любые векторы):

$$E_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \geqslant 0, \quad E_{\varepsilon\varepsilon} = \| \partial^2 E / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \| \qquad (3.3)$$

Тензор $e''$ определим так, чтобы при разрушении ($D^\bullet > 0$) происходило разрыхление среды. Для этого достаточно положить, чтобы

$$e'' = \Lambda(D) \qquad (3.4)$$

где $\Lambda = \Lambda(D)$ — симметричная положительно-определенная матрица $I(\Lambda) > 0$. Покажем, что в этом случае происходит разрыхление среды.

Из уравнения неразрывности и (1.3) следует, что удельный объем $V = 1/\rho$ удовлетворяет уравнению $V^\bullet / V = I_1(\varepsilon^\circ + e') + D^\bullet I_1(\Lambda)$, $\varepsilon^\circ = \varepsilon^\bullet + (\nabla v)^t \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \nabla v$. Первое слагаемое в правой части обусловлено макроскопическим движением частиц среды и необратимым деформированием материала, второе — обусловлено накоплением в среде дефектов, т. е. разрушением. Так как тензор $\Lambda = \Lambda(D)$ симметричен и положительно определен, то второе слагаемое положительно при $D^\bullet > 0$.

Тензор $\Lambda = \Lambda(D)$ не может быть произвольным, так как должно выполняться неравенство (2.7). Перепишем его в виде $E_D \leqslant I_1(E_\varepsilon \cdot e')$. В главных осях тензора $E_\varepsilon$ (тензоры $E_\varepsilon$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соосны) имеем равенства $p_i = \rho(1 - 2\varepsilon_i) E_i$, где $E_i$ — главные значения тензора $E_\varepsilon$. Поскольку $p_i < 0$, $1 - 2\varepsilon_i > 0$, то $E_i < 0$. Учитывая, что диагональные элементы тензора $\Lambda = \Lambda(D)$ положительны в любой системе координат, получим $I_1(E_\varepsilon \cdot e') = I_1(E_i \cdot \Lambda_{ii}) \leqslant 0$, откуда $E_D \leqslant 0$. Это неравенство вытекает из предположения, что при разрушении среда разрыхляется; если среда уплотняется, то оно может не выполняться.

Рассмотрим простой пример. Пусть

$$E={}^1/_2\lambda(D)I_1^2(\varepsilon)+\mu(D)I_1(\varepsilon\cdot\varepsilon),\quad E_D={}^1/_2\lambda'(D)I_1^2(\varepsilon)+\mu'(D)I_1(\varepsilon\cdot\varepsilon) \tag{3.5}$$

Из неравенства $E_D<0$ следует, что $\mu'(D)<0$, $(\lambda+2\mu)'(D)\leqslant 0$, т. е. при разрыхлении скорости продольных и поперечных волн должны уменьшаться. С другой стороны, можно предположить, что тензор $e'$ удовлетворяет уравнениям модели вязкоупругопластического тела [9] ($\nu$ – время релаксации):

$$e'=(p-p')/\nu,\qquad p=pE_\varepsilon(I-2\varepsilon) \tag{3.6}$$

где $p'$ — проекция в пространстве напряжений точки $p$ на замкнутое выпуклое множество $K=\{p:\varphi(p)\leqslant 0,\ \varphi(0)<0\}$ (функция $\varphi$ определяет условие пластичности). Точка $p'$ определяется из соотношения

$$(p-p')\cdot\cdot(p-p')=\inf_{s\in K}(p-s)\cdot\cdot(p-s)$$

Из равенства (1.4) следует, что правая часть первого выражения (3.6) не должна зависеть от $D$, т. е. $p-p'=f(\varepsilon)\nu(D)$, где $f=f(\varepsilon)$ – произвольная функция деформаций. Указать общее решение этого нелинейного уравнения, за исключением редких случаев, невозможно. Так как приемлемыми с физической точки зрения могут быть только те решения, которые удовлетворяют условиям $E(\varepsilon,0)\neq 0$, $E(0,D)=0$, то вопрос о внутренней непротиворечивости модели может быть решен только при конкретном задании условия пластичности $\varphi=\varphi(p)$ и функции $\nu=\nu(D)$.

Рассмотрим вопрос о накоплении в среде микротрещин. Из физических представлений ясно, что при интенсивных нагрузках в среде образуются микротрещины, а также другие разного рода микродефекты. Очевидно, что образование микротрещин представляет собой случайный процесс. Экспериментальных исследований этого процесса при сжимающих напряжениях пока нет. Однако по аналогии с откольными явлениями можно считать, что скорость зарождения новых микротрещин экспоненциально зависит от действующих в среде напряжений [10] и скорость роста трещин зависит от их размеров. Опираясь на эти соображения, можно положить, что повреждаемость должна удовлетворять уравнению

$$\partial D/\partial t=a(\varepsilon)+b(\varepsilon)D \tag{3.7}$$

Здесь первое слагаемое обусловлено зарождением новых трещин ($a\geqslant 0$), второе — ростом имеющихся в среде трещин ($b\geqslant 0$).

Рассмотрм частный случай. Будем считать, что внутренняя энергия является квадратичной функцией тензора упругих деформаций, а параметры Ламе зависят от повреждаемости:

$$E=E(\varepsilon,\ D)={}^1/_2\lambda(D)I_1^2(\varepsilon)+\mu(D)I_1(\varepsilon\cdot\varepsilon)$$

Предположим, что модуль сдвига $\mu$ монотонно уменьшается с увеличением $D$ (для некоторых материалов это предположение представляется достаточно правдоподобным). Тогда, учитывая (3.7), получим

$$\partial\mu/\partial t=\partial\mu/\partial D\cdot\partial D/\partial t=\mu'(D)\,[a(\varepsilon)+b(\varepsilon)D]=h(\mu)\,[a(\varepsilon)+b(\varepsilon)D]$$

Здесь $D=D(\mu)$ – функция, обратная к $\mu=\mu(D)$, $h(\mu)=\mu'(D(\mu))$, $\mu'$ – производная функции $\mu=\mu(D)$. В это уравнение повреждаемость явно не входит, поэтому его можно использовать для экспериментального и теоретического изучения деформирования и разрушения горных пород. Принимая ряд упрощающих предположений, можно постулировать вид функций, которыми следует аппроксимировать зависимости $h=h(\mu)$, $a=a(\varepsilon)$, $b=b(\varepsilon)$ [11].

4. Гипотезы и предположения, принятые выше, позволяют получить систему дифференциальных уравнений относительно величин $v$, $\varepsilon$, $\rho$, $D$, $s$:

$$\begin{gathered}\rho v^{\cdot}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}=-e'-e''D^{\cdot}+e-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\nabla v-(\nabla v)^t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\\ \rho^{\cdot}=-\rho\nabla\cdot v,\quad D^{\cdot}=a(\varepsilon)+b(\varepsilon)D\\ \rho Ts^{\cdot}=I_1(\boldsymbol{\tau}\cdot e-E_\varepsilon\cdot e'\rho)+\rho I_1(E_\varepsilon\cdot e''-E_D)D^{\cdot}\end{gathered} \tag{4.1}$$

Так как выше предполагалось, что $E=E_0(\varepsilon,\ D)+E_1(s,\ D)$, то энтропия входит только в последнее уравнение системы (4.1); поэтому в тех задачах, когда распределение температур не представляет интереса, это уравнение можно опустить.

Тензоры $\sigma$, $\tau$, $e'$, $e''$ вычисляются по формулам (3.1), (3.2), (3.4). Уравнения (4.1) могут быть записаны через компоненты тензоров, если воспользоваться формулами для компонент производной $\varepsilon^{\bullet}$ в любой криволинейной системе координат.

Тензор $\tau$ есть нелинейная функция тензора скоростей деформаций $e$ и тензора $\varepsilon$, так как $\tau$ можно представить в виде $\tau = c_0 I + c_1 e + c_2 e \cdot e$, где $c_k$ определяются из системы

$$\tau_i = \sum_k e_i^k c_k \qquad (\det\|e_i^k\| \neq 0) \qquad (k=0,1,2)$$

$e_i$ — главные значения тензора $e$. Поэтому правые части системы содержат вторые производные от компонент вектора скорости. Если коэффициент трения $\alpha = \alpha(D)$ равен нулю, то все слагаемые, содержащие вторые производные, обращаются в нуль. Используя результаты [8], можно показать, что получающаяся система уравнений первого порядка будет гиперболической, если выполняется уже приводившееся выше неравенство $E_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \xi \cdot \eta \cdot \cdot \xi \cdot \eta \geqslant 0$.

Система уравнений (4.1) получена в предположении, что в среде действуют сжимающие напряжения $I_1(p) < 0$. Остановимся на случае, когда в среде действуют растягивающие напряжения. Выше было принято, что при растяжении $\tau = 0$. Примем также, что $e' = 0$. Разрушение материала при этом нужно описывать некоторым другим параметром $\omega$. В качестве простейшего предположения можно положить, что разрушение как при сжатии, так и при растяжении может быть описано одним параметром $D$, удовлетворяющим уравнению (3.7), где коэффициенты $a = a(\varepsilon)$, $b = b(\varepsilon)$ – различные функции при растяжении и сжатии.

Принятые выше предположения могут быть ослаблены. Например, можно считать, что повреждаемость характеризуется не скалярным параметром $D$, а тензором повреждаемости $D$; можно учесть зависимость внутренней энергии от остаточных деформаций $\varepsilon^0$ и считать материал анизотропным. В этом случае требуется принять дополнительные гипотезы о процессе релаксации напряжений и процессе накопления повреждений. Нужно будет ввести значительно большее число эмпирически определяемых функций и наложить на них дополнительные ограничения. Ясно, что такая задача существенно более сложная и ее решение зависит в значительной степени от уровня экспериментальных исследований в этой области механики горных пород.

Автор благодарит Н. В. Зволинского, А. Н. Ковшова, И. И. Нещеретова за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Gupta I. N.* Seismic velocities in rock subjected to axial loading up to shear fracture // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. No. 29. P. 6936–6942.
2. *Коротков П. Ф.* О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращение их в пористые сыпучие среды // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1357–1360.
3. *Капустянский С. М., Николаевский В. Н.* Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 113–123.
4. *Капустянский С. М.* Упругопластическая дилатансионная модель анизотропных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 8. С. 50–59.
5. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз. 1962. 284 с.
6. *Sato K., Kawakita M., Kinoshita S.* The dynamic fracture properties of rocks under confining pressure // Mem. Fac. Eng. Hokkaido Univ. Japan. 1981. V. 15. No. 4. P. 467–478.
7. *Green S. J., Leasia J. D., Perkins R. D., Jones A. H.* Triaxial stress behaveaur of solenhofer limestone and westerly granite at high strain rates // J. Geophys. Res. 1972. V. 77. No. 20. P. 3711–3724.
8. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука. 1978. 303 с.
9. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука. 1980. 383 с.
10. *Керрен Д., Шоки Д., Симен Л., Остин М.* Механизмы и модели кратерообразования в природных средах // Удар, взрыв, разрушение. М.: Мир. 1980. С. 81–130.
11. *Глушко А. И., Нещеретов И. И.* О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 140–146.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1986