МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1988

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С РАВНОПРОЧНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

Предлагается аналитический способ решения первой краевой задачи в некотором классе нагрузок для плоскости, перфорированной любым числом отверстий специальной формы.

1. Пусть упругая, тонкая бесконечная пластина, занимающая область S в плоскости комплексного переменного z, ослаблена системой l криволинейных отверстий с гладкой границей $\Gamma=U\Gamma_j$, $j=\overline{1, l}$, которая нагружена равномерным нормальным давлением: $\sigma_n=-p$, $\tau_{nt}=0$; здесь t — единичный вектор касательной, n — внешней нормали к границе в ее произвольной точке ζ. На бесконечности пластина растягивается усилиями P, Q вдоль осей X и Y соответственно.

Граница Γ называется равнопрочной [1] для данных значений $P=P_0$, $Q=Q_0$ и $p=p_0$, если на ней всюду выполняется условие отсутствия зон концентрации напряжений: $\sigma_t(\zeta)=\text{const}$. Установлено [2, 3], что такое элементарное распределение напряжений на границе оптимизирует состояние пластины в целом — при его соблюдении величина максимума в $(S+\Gamma)$ локального критерия Мизеса принимает наименьшее возможное значение. Оно достигается на Γ и равно $2B^2+3p_0^2$, где $B=P_0+Q_0+p_0$ — постоянная в правой части условия равнопрочности.

В ряде случаев удается найти форму равнопрочных отверстий [4, 5]. Оказалось, что они существуют при всяком l и любой близости отверстий между собой, если соблюдается условие

$$|m_0|\leqslant 1, \quad m_0=\frac{P_0+Q_0+2p_0}{Q_0-P_0}$$

Подобные результаты основаны на значительном упрощении дифференциальных уравнений равновесия и краевых условий в областях с равнопрочной границей. Так, в них относительное объемное расширение оказывается постоянным [6] или, что то же самое, бигармоническая функция напряжений — гармонической. В терминах комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [7] это значит, что $\varphi_0(z)$ обращается в $(S+\Gamma)$ в тождественный нуль [4], а $\psi_0(z)$ определяется из силового граничного условия

$$\varphi_0(\zeta)+\zeta\overline{\varphi_0'(\zeta)}+\overline{\psi_0(\zeta)}=(P_0-Q_0)\bar{\zeta}/2- \\ -(P_0+Q_0+2p_0)\zeta/2+d_j,\ \zeta\in\Gamma_j,\ j=\overline{1, l} \tag{1}$$

на равнопрочной границе сводящегося к соотношению

$$\psi_0(\zeta)=(P_0-Q_0)\zeta/2-(P_0+Q_0+2p_0)\bar{\zeta}/2 \tag{2}$$

где d_j — некоторые комплексные постоянные, которыми в (2) можно пренебречь [4].

Положим теперь, что на пластину с отверстиями, равнопрочными для фиксированных значений нагрузки, действуют усилия P, Q, p произвольной величины. И в этом, более общем случае соответствующее поле смещений и напряжений находится просто.

Обозначим S_- совокупность областей внутри контуров Γ_j, $j=\overline{1,l}$, которая дополняет S до полной плоскости. Интегрируя тождество (2) вдоль Γ с ядром Коши $d\ln(\xi-z)$, $\xi\in\Gamma$, $z\in S_-$, перейдем по формулам Сохоцкого к пределу $z\to\zeta\in\Gamma$. Как известно [8], такая операция аннулирует $\psi_0(\zeta)$ и не изменяет $(\zeta+d_j)$ — граничные значения функций $\psi_0(z)$ и $(z-d_j)$, голоморфных соответственно в областях S и S_-. В результате получается соотношение на Γ:

$$\zeta-\frac{m_0}{2}\bar{\zeta}=\frac{m_0}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\bar{\xi}}{\zeta-\xi}d\xi \tag{3}$$

Оно содержит только аффиксы точек равнопрочной границы и, следовательно, описывает ее определенные геометрические свойства. Для их выявления отделим в (3) действительные и мнимые части. Учитывая представление ядра Коши через логарифмические потенциалы двойного и простого слоя [8], после несложных преобразований получим

$$x=-\frac{m_0}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{\partial\ln 1/r}{\partial n}x'\,ds;\quad y=\frac{m_0}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{\partial\ln 1/r}{\partial n}y'\,ds \tag{4}$$

$$r=|\xi-z|,\ ds=|d\xi|,\ x+iy=\zeta,\ x'+iy'=\xi$$

Тождества (4) означают, что декартовы координаты точек равнопрочной границы являются собственными функциями оператора потенциала двойного слоя, отвечающими заданным собственным числам m_0 и $-m_0$. Этим устанавливается связь с обратной задачей теории логарифмического потенциала — об отыскании кривых, на которых для него соблюдаются спектральные соотношения (4). В [4, 5] даны нетривиальные примеры таких кривых для многосвязных областей.

Рассмотрим краевую задачу (1) для произвольных параметров P, Q, p. Заменяя во втором слагаемом левой части величину ζ ее выражением из формулы (2) через $\bar{\zeta}$ и $\psi_0(\zeta)$, имеем

$$\varphi(\zeta)+\overline{\chi(\zeta)}=(P-Q)\bar{\zeta}/2-(P+Q+2p)\zeta/2+d_j \tag{5}$$

$$\chi(z)=[(P_0+Q_0+2p_0)z+2\psi_0(z)]\psi(z)/(P_0-Q_0)+\psi(z)+A$$

— новая функция, также голоморфная в S. Действительная постоянная A выбирается из условия убывания $\chi(z)$ на бесконечности.

Преобразованное таким образом граничное условие (5) значительно проще исходного. С использованием соотношений (4) оно допускает определение $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ в аналитической форме. Для этого отделим в (5) действительные и мнимые части, получая в результате парную видоизмененную [8] задачу Дирихле

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}[\varphi(\zeta)+\chi(\zeta)]=(P+p)x+\operatorname{Re}d_j\\ \operatorname{Im}[\varphi(\zeta)-\chi(\zeta)]=(Q+p)y+\operatorname{Im}d_j\end{gathered} \tag{6}$$

Как известно, она имеет единственное решение за счет определенного выбора постоянных d_j. Его можно найти представляя искомые функции в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями [8]:

$$\varphi(z)+\chi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\mu(\xi)d\xi}{\xi-z},\quad i\chi(z)-i\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\nu(\xi)d\xi}{\xi-z} \tag{7}$$

Подстановка (7) в (6) дает относительно $\mu(\zeta)$ и $\nu(\zeta)$ интегральные уравнения с ядром в виде потенциала двойного слоя

$$\mu(\zeta)+\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma\mu(\xi)\frac{\partial\ln 1/r}{\partial n}ds=-(Q+p)x+\operatorname{Re}d_j \tag{8}$$

$$\nu(\zeta)+\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma\nu(\xi)\frac{\partial\ln 1/r}{\partial n}ds=-(P+p)y+\operatorname{Im}d_j$$

для которых справедлив метод последовательных приближений [9] с выбором свободных членов в качестве начального. Благодаря тому, что эти члены являются линейными функциями от x и y, каждое приближение на основе тождеств (4) находится явно и представляет собой функцию такого же вида. Суммируя полученные геометрические прогрессии, сходящиеся по условию $|m_0|^{-1}<1$, имеем с точностью до несущественных постоянных $\mu(\zeta)=-(Q+p)x/(1+m_0)$, $\nu(\zeta)=-(P+p)y/(1-m_0)$, $2x=(\zeta+\bar\zeta)$; $2y=(\zeta-\bar\zeta)$ и, следовательно

$$\varphi(z)=-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{(Q+p)(\xi+\bar\xi)/(1+m_0)+(P+p)(\xi-\bar\xi)/(1-m_0)}{z-\xi}d\xi$$

$$\chi(z)=-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{(Q+p)(\xi+\bar\xi)/(1+m_0)-(P+p)(\xi-\bar\xi)/(1-m_0)}{z-\xi}d\xi$$

Замена в полученных интегралах функции $\bar\xi$ ее выражением из (2) позволяет вычислить их явно. Как и при выводе формулы (3), здесь следует учесть голоморфность $\psi_0(z)$ в S и z в S_-:

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\left(\frac{Q+p}{1+m_0}-\frac{P+p}{1-m_0}\right)\frac{\psi_0(z)}{2(P_0+Q_0+2p_0)}\\ \chi(z)&=-\left(\frac{Q+p}{1+m_0}+\frac{P+p}{1-m_0}\right)\frac{\psi_0(z)}{2(P_0+Q_0+2p_0)}\end{aligned}\tag{9}$$

Этот результат справедлив для любого числа равнопрочных отверстий.

Значения $\varphi(z)$ на границе удобнее представить на основе тождества (2) в форме

$$\varphi(\zeta)=((Q+p)/(1+m_0)-(P+p)/(1-m_0))(\bar\xi+m_0\zeta)/2\tag{10}$$

Распределение напряжения σ_t на равнопрочной границе находится из формулы (10):

$$\begin{aligned}\sigma_t(\zeta)&=P+Q+4\operatorname{Re}\varphi'(\zeta)-\sigma_n=P+Q+p+\\ &+2((P+p)/(1-m_0)-(Q+p)/(1+m_0))\operatorname{Re}(m_0+d\bar\zeta/d\zeta)\end{aligned}\tag{11}$$

С учетом того что

$$\operatorname{Re}\frac{d\bar\zeta}{d\zeta}=\operatorname{Re}\frac{\partial x/\partial s-i\,\partial y/\partial s}{\partial x/\partial s+i\,\partial y/\partial s}=1+2\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2=1-2\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2$$

выражение (11) записывается в виде

$$\sigma_t(\zeta)=P+Q+p+2\left(\frac{P+p}{1-m_0}-\frac{Q+p}{1+m_0}\right)\left(1+m_0-2\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2\right)$$

Отсюда следует, что величина σ_t в любой точке равнопрочной границы не зависит от числа и расположения отверстий, а определяется только ориентацией нормали в ней, действующей нагрузкой и геометрическим параметром задачи m_0.

Экстремумы $\sigma_t(\zeta)$, равные

$$\begin{aligned}&P+Q+p+2((P+p)/(1-m_0)-(Q+p)/(1+m_0))(1+m_0)\\ &P+Q+p+2((P+p)/(1-m_0)-(Q+p)/(1+m_0))(m_0-1)\end{aligned}\tag{12}$$

достигаются в точках, где $\partial x/\partial n=\pm1$, или $\partial x/\partial n=0$, т. е. где нормали параллельны координатным осям. Какая из величин (13) отвечает максимуму и зависит от соотношений между P, Q, p и m_0. Так, при одноосном растяжении плоскости вдоль оси

$$\max_{\zeta\in\Gamma}\sigma_t(\zeta)=Q\left(1+2\frac{1+m_0}{1-m_0}\right),\quad \min_{\zeta\in\Gamma}\sigma_t(\zeta)=0\tag{13}$$

Здесь предполагается, что $m_0 \leqslant 0$. Формулы (13) хорошо известны для эллипса [7], который является оптимальным одиночным отверстием [1].

Полученные результаты показывают, что сравнительно с традиционными круговыми или эллиптическими равнопрочные отверстия значительно упрощают краевую задачу (1) для плоскости, особенно в многосвязном случае. Это происходит благодаря полной согласованности формы таких отверстий с характером возникающего поля напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей // Приложение теории функций в механике сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1965. С. 135–150.
2. *Баничук Н. В.* Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 920–925.
3. *Вигдергауз С. Б.* Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 902–908.
4. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963–979.
5. *Вигдергауз С. Б.* Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 966–969.
6. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 90–93.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
9. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат. 1953. 416 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 9.VI.1986