МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1988

УДК 539.3

КОСОЕ СОУДАРЕНИЕ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ УПРУГИХ ПОЛОС В ДОЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

САЖИН В. В.

Рассматривается задача об установившемся движении упругих полос при несимметричном соударении под малым углом. В пространстве изображений задача сводится к обобщенной задаче Римана и решается методом факторизации. Численно исследованы действительные корни дисперсионного уравнения, определяющие (для малых скоростей) структуру однородных волн в составной упругой полосе, на границе раздела которой выполнено условие контакта с проскальзыванием без трения. Дозвуковой диапазон скоростей движения точки контакта разбивается, вообще говоря, на пять интервалов: в каждом из них решение имеет свою структуру. Выявлено асимптотическое поведение нормального напряжения и скоростей обеих полос вблизи точки контакта и на бесконечности. В некоторых интервалах скоростей напряжения осциллируют, и тогда решение может быть использовано для оценки величин растягивающих напряжений и определения положения точки возможного отрыва.

1. Постановка задачи. Две упругие полосы из разных материалов ($0 \leqslant y \leqslant 1$ — среда 1, $-h_2 \leqslant y \leqslant 0$ — среда 2, $|x|<\infty$) соударяются под малым углом так, что скорость точки контакта c дозвуковая. При $x<0$, $y=0$ поставим условие контакта с проскальзыванием (трение отсутствует); при $x>0$, $y=0$ и $y=1$, $-h_2$, $|x|<\infty$ полосы не нагружены; при $x\to\infty$ задана скорость взаимного сближения упругих полос v_0. Движение в декартовой системе координат xOy, связанной с краем области контакта, предполагаем установившимся, а относительную касательную скорость — малой (дальше в уравнениях ею пренебрегаем по сравнению с волновыми скоростями). Уравнения для продольных $\varphi^{(j)}$ и поперечных $\psi^{(j)}$ потенциалов скоростей ($j=1, 2$) имеют вид ($j=1, 2$ — суммирование по j отсутствует)

$$r_j^2\varphi_{xx}^{(j)}+\varphi_{yy}^{(j)}=0, \qquad s_j^2\psi_{xx}^{(j)}+\psi_{yy}^{(j)}=0 \tag{1.1}$$

$$r_j=\sqrt{1-c^2/c_{lj}^2},\quad s_j=\sqrt{1-c^2/c_{sj}^2}$$

За единицы измерения выбраны параметры среды 1: толщина полосы h_1^0, ее плотность ρ_1^0, скорость поперечных волн c_{s1}^0 и $2\mu_1^0$, где μ_1^0 — модуль сдвига первой среды; c_{lj} и c_{sj}, $j=1, 2$ — безразмерные скорости продольных и поперечных волн ($c_{s1}=1$). Для касательных (u_j) и нормальных (v_j) скоростей, а также для нормальных ($\sigma^{(x)}$, σ) и касательной (τ) компонент тензора напряжений имеем формулы

$$u_j=\varphi_x^{(j)}+\psi_y^{(j)}, \qquad v_j=\varphi_y^{(j)}-\psi_x^{(j)} \tag{1.2}$$

$$c\sigma_x^{(x)}=\gamma_j(\varphi_{yy}^{(j)}-\psi_{xy}^{(j)})-{}^1/_2\rho_jc_{lj}^2\Delta\varphi^{(j)}$$

$$c\tau_x=\gamma_j[{}^1/_2(\psi_{xx}^{(j)}-\psi_{yy}^{(j)})-\varphi_{xy}^{(j)}]$$

$$c\sigma_x=\gamma_j(\varphi_{xx}^{(j)}+\psi_{xy}^{(j)})-{}^1/_2\rho_jc_{lj}^2\Delta\varphi^{(j)}$$

$$\gamma_j=\mu_j/\mu_1 \quad (j=1, 2), \quad \rho_1=1$$

Задача будет рассматриваться для диапазона скоростей $0<c<c^*$, где $c^*=\min(c_{s1}, c_{s2})$. Краевые условия задачи имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma=\tau=0 \quad (y=1, -h_2;\ |x|<\infty)\\ \tau=0 \quad (y=0, |x|<\infty)\\ \sigma=0 \quad (y=0, x>0), \quad v=0 \quad (y=0, x<0)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь v — скачок нормальной скорости на границе раздела двух сред. Кроме указанных условий выпишем условие, выделяющее постоянную составляющую скачка скорости при $x\to\infty$

$$v_\infty = \lim_{x_1,x_2,x_2/x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x,0)}{x_2-x_1}\,dx=-v_0 \tag{1.4}$$

В (1.4) учтена возможность существования в решении ограниченных осциллирующих функций на бесконечности [1]. В точках $x=y=0$ и $x=\pm\infty$ следует поставить условие излучения для обеспечения единственности решения: $0\leqslant w_0<\infty$, w_0 — поток энергии в точку контакта и энергетический принцип излучения Мандельштама [2], конкретизированный далее в терминах групповых и фазовых скоростей.

2. Построение решения. Совершим преобразование Фурье всех функций по x с параметром k. Обозначим

$$\Sigma^-(k)=\int_{-\infty}^{0} \sigma(x,0)e^{ikx}\,dx, \qquad V^+(k)=\int_{0}^{\infty} v(x,0)e^{ikx}\,dx$$

Функция $\Sigma^-(\xi)$ аналитична в нижней полуплоскости $\xi=k+i\varkappa$, а $V^+(\xi)$ — в верхней полуплоскости ξ [3]. Решив преобразованные по Фурье уравнения (1.1) с учетом (1.3) и преобразованных уравнений (1.2), получим выражения для фурье-изображений потенциалов скоростей через функцию $\Sigma^-(k)$:

$$\begin{gathered}\Phi^{(j)}={}^1/_4ic\Sigma^-(k)(\gamma_j\beta_jk)^{-1}T_j^{-1}\{\operatorname{sh}(\lambda_{2j}h_j)\operatorname{sh}[\lambda_{1j}(h_j+(-1)^jy)]-\\ -(R_j+1)[\operatorname{ch}(\lambda_{2j}h_j)\operatorname{ch}[\lambda_{1j}(h_j+(-1)^jy)]-\operatorname{ch}(\lambda_{1j}y)]\}\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\Psi^{(j)}={}^1/_4cr_j\Sigma^-(k)\gamma_j^{-1}\beta_j^{-2}k^{-1}(-1)^{j+1}T_j^{-1}\{\operatorname{ch}(\lambda_{1j}h_j)\operatorname{sh}[\lambda_{2j}(h_j+(-1)^jy)]-\\ -(R_j+1)\operatorname{sh}(\lambda_{1j}h_j)\operatorname{ch}[\lambda_{2j}(h_j+(-1)^jy)]-(-1)^j\operatorname{sh}(\lambda_{2j}y)\}\end{gathered}$$

$$T_j=\prod_{i=1}^{2}\operatorname{ch}^2({}^1/_2\lambda_{ij}h_j)\Delta_{ij}(k), \qquad \lambda_{1j}=kr_j$$

$$\lambda_{2j}=ks_j, \quad \beta_j={}^1/_2(1+s_j^2), \quad R_j=r_js_j\beta_j^{-2}-1$$

$$\Delta_{ij}(k)=(R_j+1)\operatorname{th}({}^1/_2\lambda_{ij}h_j)-\operatorname{th}({}^1/_2\lambda_{P_ij}h_j)$$

$$P_i=i+(-1)^{i-1} \quad (i, j=1, 2), \quad h_1=1$$

где R_1 и R_2 — функции Релея для сред 1 и 2 соответственно. Используя связь потенциалов со скоростями (1.2) и краевое условие для скачка v из (1.3), приходим к следующей задаче Римана — Гильберта:

$$V^+(k)=H(k)\Sigma^-(k), \qquad H(k)=-{}^1/_8ic^3\gamma_2^{-1}c_{s2}^{-2}F(k)\Big/\left(\prod_{i=1}^{2}T_i\right) \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}F(k)=r_1\gamma_2c_{s2}^{2}\beta_2^2\operatorname{ch}^2({}^1/_2\lambda_{12}h_2)\operatorname{ch}^2({}^1/_2\lambda_{22}h_2)\operatorname{ch}(\lambda_{11})\times\\ \times\operatorname{ch}(\lambda_{21})\Delta_{31}(k)\Delta_{12}(k)\Delta_{22}(k)+r_2\beta_1^2\operatorname{ch}^2({}^1/_2\lambda_{11})\operatorname{ch}^2({}^1/_2\lambda_{21})\times\\ \times\operatorname{ch}(\lambda_{12}h_2)\operatorname{ch}(\lambda_{22}h_2)\Delta_{11}(k)\Delta_{21}(k)\Delta_{32}(k)\end{gathered}$$

$$\Delta_{3j}(k)=(R_j+1)\operatorname{th}(\lambda_{1j}h_j)-\operatorname{th}(\lambda_{2j}h_j) \quad (j=1, 2)$$

$$H(k)\sim 2ic^{-1}k^{-1}(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})\qquad (k\to 0)$$

$$H(k)\sim \pm ic^3S/8\gamma_2\beta_1^2\beta_2^2R_1R_2\quad (k\to\pm\infty)$$

$$S=-4c_{s2}^{-2}(\gamma_2c_{s2}^2r_1\beta_2^2R_2+r_2\beta_1^2R_1)$$

где S — функция типа Стоунли для случая контакта двух полупространств с проскальзыванием [4]. Для решения задачи (2.2) следует выделить особенности коэффициента $H(k)$ [3, 5].

Ненулевые действительные решения уравнений $\Delta_{ij}(k)=0$, $(i, j=1, 2)$ — полюса функции $H(k)$, которые определяют дисперсионные соотношения $(k=k(c))$ задачи о свободных колебаниях упругих полос. Это известные дисперсионные уравнения [6]: при $c<c_{Rj}$, где c_{Rj} — единственный положительный корень уравнения Релея, уравнение $\Delta_{2j}(k)=0$ имеет два действительных, симметричных относительно нуля корня $k=\pm k_{2j}$, отвечающих собственной волне с групповой скоростью $c_g>c$, а уравнение $\Delta_{1j}(k)=0$ не имеет ненулевых действительных корней при $c<c_{Rj}$. При $c>c_{Rj}$ уравнение $\Delta_{1j}(k)=0$ имеет два действительных симметричных корня $k=\pm k_{1j}$, соответствующих собственной волне с $c_g<c$, а уравнение $\Delta_{2j}(k)=0$ ненулевых действительных корней не имеет $(j=1, 2)$. Нули функции $H(k)$ или, что то же самое, функции $F(k)$ определяют дисперсионные соотношения задачи о совместных колебаниях двух упругих полос, контактирующих с проскальзыванием. Для определенности будем принимать, что $c_{R1}<c_{R2}$. Асимптотическое исследование корней уравнения $F(k)=0$ затруднительно из-за громоздкости выражения для $F(k)$, поэтому корни находились численно. Для определенности были рассмотрены пять пар металлов: Al – Fe, Mg – Al, Fe – Ti, W – Ti, Cu – Al и для них были рассчитаны дисперсионные кривые при различных значениях h_2. Для первых трех пар $c^*\notin[c_{R1}, c_{R2}]$, следовательно, вещественный положительный корень уравнения типа Стоунли существует и лежит в интервале $[c_{R1}, c_{R2}]$ [4]. Для двух последних пар металлов $c^*\in[c_{R1}, c_{R2}]$ и вопрос о существовании вещественного корня уравнения $S=0$ сводится к определению знака $S(c^*)$. Если $S(c^*)\geqslant 0$, как и получается для обеих пар, то действительный корень существует и лежит в интервале $[c_{R1}, c^*]$. Исследование корней ограничено случаем, когда существует вещественный корень уравнения типа Стоунли. Этот случай для задачи Римана как раз является наиболее общим. Дозвуковой диапазон скоростей разбивается на максимальное число интервалов — четыре ($0<c<c_{R1}$, $c_{R1}<c<c_S$, $c_S<c<c_{R2}$, $c_{R2}<c<c^*$, где c_S — единственный положительный корень уравнения $S=0$), в каждом из которых решение имеет свою структуру. Если же вещественный корень c_S отсутствует, то интервалов будет на один меньше, причем в оставшихся структура решения не изменится: поэтому для общности будем рассматривать максимальное число интервалов. Приведем результаты исследования числа действительных решений уравнения $F(k)=0$.

1. $0<c<c_{R1}$. В этом интервале число нулей функции $F(k)$ от толщины h_2 не зависит. Единственным условием, налагаемым на толщину во всех интервалах, является условие $h_2\sim O(1)$, которое подчеркивает, что речь идет именно о соударении полос, а не полосы с полупространством. В численных расчетах это условие реализовывалось следующим ограничением на толщину: $0{,}1\leqslant h_2\leqslant 10$. Функция $F(k)$ имеет два действительных симметричных корня $k=\pm k_{F1}$, соответствующих собственной волне с $c_g>c$. Численный расчет функции $F(k)$ производился до выхода на асимптотики при $k\to\infty$ и $k\to 0$, где знак $F(k)$ уже фиксирован

$$F(k)\sim {}^1\!/_4c_{s2}^2(-R_1R_2S)\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}\operatorname{ch}(\lambda_{ij}h_j)\qquad (k\to\infty)$$

$$F(k)\sim -{}^1\!/_{16}k^3h_2c^4(1+\rho_2h_2)\prod_{j=1}^{2}[(R_j+1)r_j-s_j]r_j\qquad (k\to 0)$$

Видно, что $\operatorname{sgn}F(k)=\operatorname{sgn}(-R_1R_2S)$ при $k\to\infty$ и $\operatorname{sgn}F(k)=-1$ при $k\to 0$. Эти оценки справедливы для любых интервалов скоростей.

2. $c_{R1}<c<c_S$. Этот интервал является наиболее интересным. При малых толщинах h_2 функция $F(k)$ во всем интервале имеет два положительных корня $k=k_{F2}$, $k=k_{F3}$, соответствующих двум собственным волнам, причем первая волна, отвечающая корню $k=k_{F2}$, имеет групповую скорость меньше фазовой: другая же собственная волна ($k=k_{F3}$) имеет $c_g>c$. По мере роста h_2 в начале интервала $c_{R1}<c<c_S$ возникает область отсутствия корней $c_{R1}<c<c^0$, а в области $c^0<c<c_S$ по-прежнему существуют два корня, отвечающие двум разбегающимся собственным волнам. При дальнейшем увеличении h_2 величина $c^0\to c_S$ и достигает ее, т. е. во всем интервале функция $F(k)<0$ не имеет корней. Увеличивая h_2 до предельных значений, получим, что величина c^0 уменьшается ($c_{R1}<c^0<c_S$), т. е. при больших h_2 опять имеются две области: без корней и с двумя корнями, как и следует ожидать, поскольку поведение при малых и больших h_2 (толстая полоса падает на более тонкую или тонкая — на более толстую) не должно отличаться.

3. $c_S<c<c_{R2}$. Количество нулей функции $F(k)$ не зависит от толщины. Функция имеет два корня $k=\pm k_{F4}$, отвечающие собственной волне с $c_g<c$.

4. $c_{R2}<c<c^*$. И в этом интервале число нулей функции $F(k)$ не зависит от изменения толщины h_2. Функция $F(k)$ имеет два корня $k=k_{F5}>0$, $k=k_{F6}>0$, которые соответствуют двум собственным волнам при выполнении неравенства $c_g<c$. Таким образом, решение следует искать в пяти интервалах, на которые разбивается дозвуковая область: $0<c<c_{R1}$, $c_{R1}<c<c^0$, $c^0<c<c_S$, $c_S<c<c_{R2}$, $c_{R2}<c<c^*$, причем в отличие от скоростей c_{R1}, c_S, c_{R2} скорость c^0 не является характерной, отвечающей распространению какого-либо вида поверхностных волн: это граница, отделяющая в интервале $c_{R1}<c<c_S$ область отсутствия корней от области существования двух корней. В зависимости от толщины h_2 величина скорости $c^0=c^0(h_2)$ может принимать любые значения из этого интервала, в том числе и граничные.

Полученные неравенства для групповых и фазовых скоростей будут использоваться для проверки выполнения энергетического принципа излучения: в решении оставляем волны, для которых

$$c_g>c\,(x\to\infty),\quad c_g<c\,(x\to-\infty) \tag{2.3}$$

Для выделения особенностей коэффициента задачи (2.2) положим $H(k)=H_0(k)G(k)$. Функцию $H_0(k)$ выбираем таким образом, чтобы в точках $k=0$, $\pm\infty$ она асимптотически совпадала с $H(k)$, в точках $k=\pm k_{ij}$, $i, j=1$, 2 имела бы простые полюса, а в точках $k=\pm k_{Fn}$, $n=1\ldots6$ обращалась бы в нуль

$$H_0(k)=A(k^2-k_{F1}^2)\sqrt{k^6+a^6}\,p_{2122}^{-1},\quad 0<c<c_{R1} \tag{2.4}$$

$$H_0(k)=A\sqrt{k^{10}+b^{10}}\,p_{1122}^{-1},\quad c_{R1}<c<c^0$$

$$H_0(k)=A(k^2-k_{F2}^2)(k^2-k_{F3}^2)\sqrt{k^2+q^2}\,p_{1122}^{-1},\quad c^0<c<c_S$$

$$H_0(k)=A(k^2-k_{F4}^2)\sqrt{k^6+d^2}\,p_{1122},\quad c_S<c<c_{R2}$$

$$H_0(k)=A(k^2-k_{F5}^2)(k^2-k_{F6}^2)\sqrt{k^2+f^2}\,p_{1122}^{-1},\quad c_{R2}<c<c^*$$

$$p_{ijmn}=k(k^2-k_{ij}^2)(k^2-k_{mn}^2)\quad (i, j, m, n=1, 2)$$

$$A=\frac{ic^3S}{8\gamma_2\beta_1^2\beta_2^2R_1R_2},\quad a^3=-a_0\frac{k_{21}^2k_{22}^2}{k_{F1}^2}$$

$$b^5=a_0k_{11}^2k_{22}^2,\quad q=a_0\frac{k_{11}^2k_{22}^2}{k_{F2}^2k_{F3}^2},\quad d^3=-a_0\frac{k_{11}^2k_{22}^2}{k_{F4}^2}$$

$$f=a_0\frac{k_{11}^2k_{12}^2}{k_{F5}^2k_{F6}^2},\quad a_0=\frac{2i(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})}{Ac}$$

При таком выборе $H_0(k)$ функция $G(k)$ факторизуется стандартным путем [5]:

$$G(k)=G^+(k)/G^-(k),\quad G^\pm(\xi)=\exp\Gamma(\xi),\quad G(0,\pm\infty)=1$$

$$\Gamma(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\ln G(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \tag{2.5}$$

$$G^\pm(k)=G^{\pm 1/2}\exp\Gamma_0(k),\quad \Gamma_0(k)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\ln G(\tau)}{\tau-k}\,d\tau$$

Особые интегралы понимаются в смысле главного значения. Факторизуем радикалы в (2.4)

$$Q^\pm=[(\xi\pm a\exp(^1/_6 i\pi))(\xi\pm a\exp(^5/_6 i\pi))(\xi\pm a\exp(^1/_2 i\pi))]^{1/2},\quad 0<c<c_{R1} \tag{2.6}$$

$$Q^\pm=[(\xi\pm b\exp(^1/_{10} i\pi))(\xi\pm b\exp(^3/_{10} i\pi))(\xi\pm b\exp(^1/_2 i\pi))\times$$
$$\times(\xi\pm b\exp(^7/_{10} i\pi))(\xi\pm b\exp(^9/_{10} i\pi))]^{1/2},\quad c_{R1}<c<c^0$$

$$Q^\pm=(\xi\pm iq)^{1/2},\quad c^0<c<c_S$$

$$Q^\pm=[(\xi\pm d\exp(^1/_6 i\pi))(\xi\pm d\exp(^1/_2 i\pi))(\xi\pm d\exp(^5/_6 i\pi))]^{1/2},\quad c_S<c<c_{R2}$$

$$Q^\pm=(\xi\pm if)^{1/2},\quad c_{R2}<c<c^*$$

Проводим разрезы из точек ветвления в бесконечность по лучам так, что их продолжение проходит через точку $\xi=0$, а ветви фиксируем условием $\sqrt{1}=1$. Учитывая (2.3)—(2.6), приведем (2.2) к виду

$$\frac{V^+k(k^2-k_{21}^2)(k^2-k_{22}^2)}{AQ^+(k^2-k_{F1}^2)G^+}=\frac{Q^-\Sigma^-}{G^-}=C_1+C_2k,\quad 0<c<c_{R1} \tag{2.7}$$

$$\frac{V^+k(k^2-k_{22}^2)}{AQ^+G^+}=\frac{Q^-\Sigma^-}{(k^2-k_{11}^2)G^-}=C_3,\quad c_{R1}<c<c^0$$

$$\frac{V^+k(k^2-k_{22}^2)}{AQ^+G^+(k^2-k_{F3}^2)}=\frac{Q^-\Sigma^-(k^2-k_{F2}^2)}{(k^2-k_{11}^2)G^-}=C_4,\quad c^0<c<c_S$$

$$\frac{V^+k(k^2-k_{22}^2)}{AQ^+G^+}=\frac{Q^-\Sigma^-(k^2-k_{F4}^2)}{(k^2-k_{11}^2)G^-}=C_5+C_6k,\quad c_S<c<c_{R2}$$

$$\frac{V^+k}{AQ^+G^+}=\frac{Q^-\Sigma^-(k^2-k_{F5}^2)(k^2-k_{F6}^2)}{(k^2-k_{11}^2)(k^2-k_{12}^2)G^-}=C_7,\quad c_{R2}<c<c^*$$

Левые и правые части равенств (2.7) являются целыми функциями. Из ограниченности потока энергии следует, что $V^+(\xi)$ и $\Sigma^-(\xi)$ должны убывать при $\xi\to\infty$ не медленнее, чем $\xi^{-1/2}$ [7]. Отсюда можно сделать вывод, что каждая часть второго, третьего и пятого равенства есть постоянная, а первого и четвертого — полином первой степени.

3. Исследование решения. При $\xi\to\infty$:

$$V^+(\xi)\sim AC_n\xi^{-1/2},\quad \Sigma^-(\xi)\sim C_n\xi^{-1/2}\quad (n=2,3,4,6,7).$$

Тогда скачок скорости и нормальное напряжение вблизи точки $x=y=0$ [8]:

$$v(x,0)\sim AC_n\exp(-{}^1/_4 i\pi)(\pi x)^{-1/2}\quad (x\to+0) \tag{3.1}$$

$$\sigma(x,0)\sim C_n\exp({}^1/_4 i\pi)(-\pi x)^{-1/2}\quad (x\to-0)$$

Отсюда можно определить поток энергии w_0 [9], нормированный на $\mu_1^0h_1^0c_{s1}^0$:

$$w_0=c^3SK_n^2/8\gamma_2\beta_1^2\beta_2^2R_1R_2,\quad K_n=C_n\exp({}^1/_4 i\pi)\quad (n=2,3,4,6,7)$$

Условие неотрицательности потока позволяет заключить, что $C_2=C_6=0$. Переходя к вычислению оригиналов, перепишем выражения (2.7)

$$V^+(\xi)=\frac{AC_1Q^+(\xi)(\xi^2-k_{F1}^2)G^+(\xi)}{\xi(\xi^2-k_{21}^2)(\xi^2-k_{22}^2)},\quad \Sigma^-(\xi)=\frac{C_1G^-(\xi)}{Q^-(\xi)},\quad 0<c<c_{R1}$$

$$V^+(\xi)=\frac{AC_3Q^+(\xi)G^+(\xi)}{\xi(\xi^2-k_{22}^2)},\quad \Sigma^-(\xi)=\frac{C_3G^-(\xi)(\xi^2-k_{11}^2)}{Q^-(\xi)}\quad c_R<c<c^0$$

$$V^+(\xi)=\frac{AC_4Q^+(\xi)G^+(\xi)(\xi^2-k_{F3}^2)}{\xi(\xi^2-k_{22}^2)},\quad \Sigma^-(\xi)=\frac{C_4G^-(\xi)(\xi^2-k_{11}^2)}{Q^-(\xi)(\xi^2-k_{F2}^2)},\quad c^0<c<c_S$$

$$V^+(\xi)=\frac{AC_5Q^+(\xi)G^+(\xi)}{\xi(\xi^2-k_{22}^2)},\quad \Sigma^-(\xi)=\frac{C_5G^-(\xi)(\xi^2-k_{11}^2)}{Q^-(\xi)(\xi^2-k_{F4}^2)},\quad c_S<c<c_{R2}$$

$$V^+(\xi)=\frac{AC_7Q^+(\xi)G^+(\xi)}{\xi},\quad \Sigma^-(\xi)=\frac{C_7G^-(\xi)(\xi^2-k_{11}^2)(\xi^2-k_{12}^2)}{Q^-(\xi)(\xi^2-k_{F5}^2)(\xi^2-k_{F6}^2)},\quad c_{R2}<c<c^*$$

Обратное интегрирование производится по контуру L, совпадающему с действительной осью всюду, за исключением окрестностей полюсов, обход которых осуществляется так: полюса $\xi=0$, $\pm k_{21}$, $\pm k_{22}$ обходятся сверху, а полюса $\xi=\pm k_{Fn}$, $n=2, 4, 5, 6$ — снизу. При таком обходе полюсов функций $V^+(\xi)$ и $\Sigma^-(\xi)$ собственные волны — вычеты в точках $\xi_n\neq0$ ($\xi=\xi_n$ — полюса) — удовлетворяют принципу излучения (2.3), а условие (1.4) позволяет выделить из решения относительную скорость нормального соударения при $x\to\infty$ — вычет в точке $\xi=0$. Особенности функций

$V^+(\xi)$ и $\Sigma^-(\xi)$ определяют структуру оригиналов $v(x, 0)$ и $\sigma(x, 0)$. Рассмотрим поведение этих функций по интервалам.

$0<c<c_{R1}$. Функцию $v(x, 0)$ можно представить в виде суммы постоянного слагаемого (вычет в точке $\xi=0$), двух собственных волн (сумма вычетов в точках $\xi=\pm k_{21}$ и $\xi=\pm k_{22}$), а также локального возмущения – экспоненциально исчезающей на бесконечности функции (сумма вкладов комплексных особых точек). Функция $\sigma(x, 0)$ есть локальное возмущение, т. е. исчезает при $x\to-\infty$. Для определения коэффициента C_1 в этом интервале (и остальных коэффициентов в последующих интервалах) используется условие (1.4):

$$C_1=k_{21}k_{22}k_{F1}^{-1}D(-R_1R_2/S)^{1/2}\exp({}^1/_4 i\pi)$$

$$D=2v_0\beta_1\beta_2c^{-1}[\gamma_2/(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})]^{1/2}$$

Расходуемая кинетическая мощность на единицу длины $K={}^1/_2cv_0^2/$ $/(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})$, поток энергии $w_0=0$, следовательно, вся кинетическая энергия соударения превращается в энергию собственных волн и уносится в бесконечность. Асимптотическое поведение оригиналов вблизи точки $x=$ $=y=0$ таково:

$$v(x, 0)\sim-{}^1/_2v_0c^2\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}k_{21}k_{22}k_{F1}^{-1}[-Sx/(\pi R_1R_2)]^{1/2}\times$$
$$\times[1/\gamma_2(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})]^{1/2}\quad (x\to+0)$$

$$\sigma(x, 0)\sim-2k_{21}k_{22}k_{F1}^{-1}D(R_1R_2x/\pi S)^{1/2}\quad (x\to-0)$$

$c_{R1}<c<c^0$. Функция $v(x, 0)$ разбивается на сумму постоянного слагаемого, собственной волны и локального возмущения, функция $\sigma(x, 0)$ – локальное возмущение. Асимптотики обеих функций в нуле описываются формулами (3.1), где $C_3=k_{22}k_{11}^{-1}D(R_1R_2/S)^{1/2}\exp(-{}^1/_4 i\pi)$.

Поток энергии $w_0=Kk_{22}^2k_{11}^{-2}<K$, т. е. энергия соударения частично локализуется в окрестности точки $x=y=0$, а оставшаяся часть переходит в энергию собственных волн и со скоростью уносится в бесконечность.

$c^0<c<c_S$. В решении для функции $\sigma(x, 0)$ в данном интервале присутствует собственная волна (сумма вычетов в точках $\xi=\pm k_{F2}$), которую можно выделить устремив $x\to-\infty$:

$$\sigma(x, 0)\approx k_{22}(k_{F2}-k_{11}^2)k_{11}^{-1}k_{F3}^{-1}D(R_1R_2/S)^{1/2}\times$$
$$\times\mathrm{Im}\{G^-(k_{F2})\exp[-i(k_{F2}x+{}^1/_4\pi)]/Q^-(k_{F2})\}\quad (x\to-\infty)$$

Из формулы видно, что нормальное напряжение на границе раздела при больших значениях $|x|$ есть осциллирующая функция: появляются растягивающие напряжения и, следовательно, возможно образование областей отрыва. Учесть отскок в рамках аналитического подхода затруднительно; однако полученное решение, во-первых, устанавливает этот факт, во-вторых, может служить для оценки интенсивности отрицательных контактных давлений и размеров истинной зоны контакта. Отмеченный дефект решения выявлен в асимптотике при $x\to-\infty$, вблизи нуля условие $\sigma\leqslant0$ асимптотически выполнено. Структура же функции $v(x, 0)$ такая же, как и в предыдущем интервале. Асимптотическое поведение оригиналов вблизи нуля определено формулами (3.1), а коэффициент C_4 и поток энергии даются формулами

$$C_4=-k_{F2}k_{22}k_{11}^{-1}k_{F3}^{-1}D(R_1R_2/S)^{1/2}\exp({}^1/_4 i\pi)$$

$$w_0=Kk_{F2}^2k_{22}^2k_{11}^{-2}k_{F3}^{-2}<K$$

$c_S<c<c_{R2}$. Функция $\sigma(x, 0)$ включает в себя только локальное возмущение и собственную волну. Выделяя ее как в предыдущем интервале, получим формулу

$$\sigma(x, 0)\sim-k_{22}(k_{F4}^2-k_{11}^2)k_{11}^{-1}D(-R_1R_2/S)^{1/2}\times$$
$$\times\mathrm{Im}\{G^-(k_{F4})\exp[-i(k_{F4}x-{}^1/_4\pi)]/Q^-(k_{F4})\}\quad (x\to-\infty)$$

Функция $v(x, 0)$ разбивается на сумму постоянного слагаемого, локального возмущения и собственной волны, $w_0=0$:

$$C_5=k_{22}k_{F4}k_{11}^{-1}D(-R_1R_2/S)^{1/2}\exp(^1/_4 i\pi)$$

Асимптотическое поведение скачка скорости и нормального напряжения таково, что они не испытывают разрыва при переходе через точку $x=y=0$:

$$v(x,0)\sim-\frac{v_0c^2}{2\beta_1\beta_2}\left[-\frac{Sx}{\pi R_1R_2\gamma_2(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})}\right]^{1/2}\frac{k_{22}k_{F4}}{k_{11}}\qquad(x\to+0)$$

$$\sigma(x,0)\sim-2k_{22}k_{F4}k_{F1}^{-1}D[R_1R_2x/(\pi S)]^{1/2}\qquad(x\to-0)$$

$c_{R2}<c<c^*$. Этот интервал является единственным, в котором функция $v(x, 0)$ не включает в себя собственную волну, а разбивается на сумму локального возмущения и постоянного слагаемого. Взяв вычет в точке $\xi=0$, получим выражение для коэффициента C_7 и затем потока энергии w_0

$$C_7=-k_{F5}k_{F6}k_{11}^{-1}k_{12}^{-1}D(R_1R_2/S)^{1/2}\exp(^1/_4 i\pi)$$

$$w_0=Kk_{F5}^2k_{F6}^2k_{11}^{-2}k_{12}^{-2}<K$$

Функция $\sigma(x, 0)$ также в этом интервале ведет себя необычно: кроме обязательного локального возмущения в нее в качестве слагаемых входят две собственные волны. Выделяя их, получим, что на больших расстояниях от точки контакта $(x\to-\infty)$ нормальное напряжение на границе раздела выражается формулой

$$\sigma(x,0)\sim D\left(\frac{R_1R_2}{S}\right)^{1/2}\frac{k_{F5}k_{F6}}{k_{11}k_{12}}\sum_{n=5}^{6}\left\{\frac{(k_{Fn}^2-k_{11}^2)(k_{Fn}^2-k_{12}^2)}{k_{Fn}}\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{Im}\left[\frac{G^-(k_{Fn})\exp[-i(k_{Fn}x+^1/_4\pi)]}{Q^-(k_{Fn})}\right]\right\}$$

Асимптотики функций $\sigma(x, 0)$ и $v(x, 0)$ в нуле вычисляются по формулам (3.1). Остальные искомые функции могут быть получены исходя из (2.1), причем при обращении формул (2.1) следует пользоваться правилами обхода полюсов действительной оси, сформулированными выше по отношению к функциям $v(x, 0)$ и $\sigma(x, 0)$. Представляют интерес нормальные и касательные компоненты скорости при $y=0$. Их фурье-образы выражаются формулами

$$V_j(k)=\frac{(-1)^j ic^3r_j}{8\gamma_jc_{sj}^2\beta_j^2}\Sigma^-(k)\Delta_{3j}(k)\prod_{i=1}^{2}\left\{\frac{\operatorname{ch}(\lambda_{ij}h_j)}{\operatorname{ch}^2(^1/_2\lambda_{ij}h_j)\Delta_{ij}(k)}\right\}$$

$$U_j(k)=\frac{c\Sigma^-(k)}{\gamma_j4\prod_{i=1}^{2}\operatorname{ch}^2(^1/_2\lambda_{ij}h_j)\Delta_{ij}(k)}\{\operatorname{sh}(\lambda_{1j}h_j)\operatorname{sh}(\lambda_{2j}h_j)[\beta_j^{-1}+(R_j+1)^2]+$$
$$+(R_j+1)(\beta_j^{-1}+1)[1-\operatorname{ch}(\lambda_{1j}h_j)\operatorname{ch}(\lambda_{2j}h_j)]\}$$

При определении структуры функций $v_j(x, 0)$ и $u_j(x, 0)$ $(j=1, 2)$ и их асимптотического поведения вблизи точки $x=y=0$ применяются те же соображения, что и в [10], т. е. фурье-образы искомых функций разбиваются на два слагаемых: первое не содержит особенностей на действительной оси, а второе представляет из себя сумму особенностей данной функции на линии $\operatorname{Im}\xi=0$: тогда первое слагаемое интегрируемо на действительной оси, а для интегрирования второго слагаемого применяются правила обхода полюсов, оговоренные выше по отношению к скачку скорости и нормальному напряжению на границе раздела.

$0<c<c_{R1}$. При $x>0$ функция $v_1(x, 0)$ может быть представлена суммой собственной волны (сумма вычетов в точках $\xi=\pm k_{21}$, $c_g>c$), локального возмущения и постоянного слагаемого (поступательной нормальной скорости верхней полосы при $x\to\infty$: $v_1^0=-v_0/(1+\rho_2^{-1}h_2^{-1})$). При $x<0$ функция $v_1(x, 0)$ есть локальное возмущение. При стремлении к нулю и справа, и слева $v_1(x, 0)\sim O(1)$. Поведение функции $v_2(x, 0)$ аналогично и $v_2^0=v_0/(1+\rho_2 h_2)$, $x\to\infty$. Заметим, что выполняется закон сохранения импульса: $v_1^0+\rho_2 h_2 v_2^0\to 0$, $x\to\infty$; $v_1^0-v_2^0=-v_0$. Таким образом, в решении для нормальной скорости каждой из полос при $x>0$ присутствует собственная волна, уносящая энергию вправо на бесконечность: полосы соударяются со скоростями v_1^0 и v_2^0 так, что граница раздела между полосами проходит по линии $y=0$.

$c_{R1}<c<c^0$. Поведение функции $v_1(x, 0)$ такое же, как и в первом интервале, а для функции $v_2(x, 0)$ решение есть локальное возмущение с добавлением v_2^0 при $x>0$ и есть только локальное возмущение при $x<0$. Порядок асимптотик функций не меняется при $x\to-0$, а при $x\to+0$ $v_1(x, 0)\sim O(x^{-1/2})$ и $v_2(x, 0)\sim O(x^{-1/2})$. Причиной такого изменения асимптотического поведения является неравенство нулю потока энергии w_0 в данном интервале.

$c^0<c<c_S$. Асимптотическое поведение функций $v_1(x, 0)$ и $v_2(x, 0)$ качественно не отличается от предыдущего случая, а в самом решении есть существенные отличия от ранее рассмотренных интервалов, связанные с осциллирующим поведением $\sigma(x, 0)$ при $x<0$, а значит, такой же характер будет иметь решение для нормальных скоростей полос на границе раздела: скачок же скорости тождественно равен нулю при $x<0$. Функция $v_1(x, 0)$ включает в себя собственную волну ($c_g<c$) при $x<0$, локальное возмущение и постоянное слагаемое при $x>0$, а функция $v_2(x, 0)$ кроме аналогичных составляющих включает в себя и вторую собственную волну ($x>0$), уносящую энергию вправо на бесконечность.

$c_S<c<c_{R2}$. Поведение обеих функций подобно их поведению в предыдущем интервале, а их асимптотики такие же, как в интервале $0<c<c_{R1}$ ($w_0=0$).

$c_{R2}<c<c^*$. Поведение функций $v_1(x, 0)$ и $v_2(x, 0)$ совпадает с поведением нормального напряжения $\sigma(x, 0)$ при $x<0$, а при $x>0$ решение для каждой функции есть локальное возмущение с добавлением соответствующих слагаемых v_j^0, $j=1, 2$. Асимптотики такие же, как и в интервале $c_{R1}<c<c^0$. Касательные скорости $u_j(x, 0)$, $j=1, 2$ с точностью до постоянного слагаемого v_j^0, $j=1, 2$ по своей структуре во всех интервалах подобны функциям $v_j(x, 0)$, $j=1, 2$.

В заключение проведем качественное сравнение решений рассмотренной выше задачи с задачами симметричного соударения [1] и соударения упругой и акустической полос [10]. Задача [1] является частным случаем задачи (1.1)–(1.2) в том смысле, что коэффициент задачи Римана (2.2) переходит в соответствующий коэффициент в [1], если толщины обеих полос одинаковы и имеют одинаковые упругие параметры. Несимметричный случай характеризуется большим числом интервалов, на которые делится дозвуковая область, что объясняется наличием трех характерных скоростей (c_{R1}, c_S, c_{R2}) и более сложной структурой возбуждения волн. Корреляция результатов наблюдается в подобии асимптотического поведения решений при малых скоростях ($0<c<c_{R1}$, $0<c<c_R$), т. е. решение в интервалах, ограниченных сверху минимальной из возможных характерных скоростей, непрерывно на всей оси x, причем нормальное напряжение в этих интервалах не имеет осциллирующего характера. Асимптотическое поведение при больших скоростях ($c_{R2}<c<c^*$ и $c_R<c<c^*$) также подобно и имеет порядок $O(x^{-1/2})$, $x\to 0$. Задачу о соударении упругой и акустической полос нельзя получить предельным переходом из рассмотренного варианта, так как дозвуковой диапазон при этом вырождается в точку (переход к этой задаче осуществляется из трансзвукового режима). Асимптотики рассмотренной задачи и задачи [10] качественно совпадают при больших скоростях (близких к c^*). Интересно, что при малых скоростях искомые функции задачи [10] в отличие от (1.1)–(2.2) при $x\to 0$ имеют порядок $O(x^{-1/2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Симонов И. В.* Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 90—99.
2. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 439 с.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. Н.* Уравнения типа свертки. М.: Наука. 1978. 295 с.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 284 с.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
6. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 349 с.
7. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112—125.
8. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: ГИФМЛ. 1962. 127 с.
9. *Слепян Л. И.* Динамика хрупкого разрушения в средах со структурой // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 121—130.
10. *Сажин В. В., Симонов И. В.* Косое соударение упругой и акустической полос в дозвуковом режиме // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 109—116.

Минск

Поступила в редакцию
9.VII.1986