МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В.

Построение решения задачи о действии динамических нагрузок на упругое полупространство имеет значение как в самостоятельном смысле, так и при исследовании контактных задач [1, 2]. В последнем случае эти решения могут играть роль фундаментальных и быть использованы в качестве ядра при построении соответствующих интегральных уравнений. Наибольшие трудности в указанных задачах возникают при смешанном характере граничных условий на поверхности полупространства. Имеющиеся в литературе методы пригодны для случая не зависящей от времени линии раздела граничных условий и в основном сводятся к решению парных интегральных уравнений [1, 2]. Среди задач с переменной границей раздела, в основном, исследованы некоторые варианты плоских динамических задач [3, 4]. В публикуемой работе построен алгоритм решения осесимметричной динамической задачи для упругого полупространства, основанный на применении принципа суперпозиции и допускающий использование в задачах с переменной линией раздела граничных условий.

1. Постановка задачи. В прямоугольной декартовой системе координат xyz и соответствующей цилиндрической системе $r\vartheta z$ рассматривается симметричное относительно оси z движение однородного изотропного полупространства $z\geqslant 0$, которое описывается уравнениями линейной теории упругости. Последние в безразмерных величинах имеют следующий вид:

$$\eta_1^2\partial^2\varphi/\partial\tau^2=\Delta\varphi,\quad \eta_2^2\partial^2\psi/\partial\tau^2=\Delta\psi-\psi/r^2$$
$$\Delta=\partial^2/\partial r^2+r^{-1}\partial/\partial r+\partial^2/\partial z^2 \tag{1.1}$$

где φ и ψ — скалярный потенциал и ненулевая компонента векторного упругого потенциала перемещений.

При этом ненулевые компоненты вектора перемещений и тензора напряжений связаны с потенциалами известными дифференциальными операторами теории упругости:

$$u=\partial\varphi/\partial r-\partial\psi/\partial z,\quad w=\partial\varphi/\partial z+\partial\psi/\partial r+\psi/r,\quad \sigma_{r\vartheta}=\sigma_{z\vartheta}\equiv 0$$
$$\sigma_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r}+\varkappa\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\qquad \sigma_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right) \tag{1.2}$$
$$\sigma_{rz}=\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\qquad \sigma_{\vartheta\vartheta}=\frac{u}{r}+\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

где w — перемещение среды вдоль оси z, u — тангенциальное перемещение, $\sigma_{\alpha\beta}$ — напряжения в цилиндрической системе координат.

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\tau=c_1t/L,\quad r=r'/L,\quad x=x'/L,\quad y=y'/L,\quad z=z'/L$$
$$u=u'/L,\quad w=w'/L,\quad b=b'/L,\quad \varphi=\varphi'/L^2,\quad \psi=\psi'/L^2$$
$$\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}'/(\lambda+2\mu),\quad p=p'/(\lambda+2\mu),\quad \varkappa=\lambda/(\lambda+2\mu)$$
$$\eta_1=1,\quad \eta_2=\eta=c_1/c_2,\quad c_1^2=(\lambda+2\mu)/\rho,\quad c_2^2=\mu/\rho$$

где t — время, L — некоторый линейный размер, λ и μ — упругие параметры Ламе, ρ — плотность среды, c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения — сжатия и вращения.

На поверхности полупространства $z=0$ в круге радиуса $b(\tau)$ приложены нормальные усилия $p(\tau, r)$, касательные усилия отсутствуют, а остальная поверхность свободна от напряжений. Тогда граничные условия принимают следующий вид ($H(x)$ — единичная функция Хевисайда):

$$\sigma_{zz}|_{z=0}=p(\tau, r)=p_0(\tau, r)H[b(\tau)-r], \quad \sigma_{rz}|_{z=0}=0 \tag{1.3}$$

Будем также полагать, что на бесконечности ($\sqrt{r^2+z^2}\to\infty$) возмущения отсутствуют. Считаем, что в начальный момент времени $\tau=0$ упругая среда находится в невозмущенном состоянии. Это приводит к нулевым начальным условиям:

$$\varphi|_{\tau=0}=\psi|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{1.4}$$

Таким образом, соотношения (1.1)—(1.4) определяют математическую постановку указанной начально-краевой задачи.

При наличии решения этой задачи могут быть определены перемещения на поверхности полупространства (F — некоторый функционал):

$$w_0(\tau, r)=w|_{z=0}=F[p(\tau, r)] \tag{1.5}$$

Если рассматривается задача со смешанными граничными условиями, например:

$$w|_{z=0}=w_0(\tau, r) \quad (r\leqslant b), \quad \sigma_{zz}|_{z=0}=0 \quad (r>b) \tag{1.6}$$

$$\sigma_{rz}|_{z=0}=0 \quad (r\geqslant 0)$$

то соотношение (1.5) можно понимать как функциональное (в данном случае интегральное) уравнение относительно неизвестных усилий $p(\tau, r)$.

2. Определение ядра функционала (1.5). Применим к указанной задаче интегральные преобразования Лапласа по времени τ (s — параметр, L обозначает трансформанту) и Ханкеля по координате r (q — параметр, H указывает на изображение) с ядрами $rJ_0(rq)$ и $rJ_1(rq)$, где $J_\nu(x)$ — функции Бесселя порядка ν. Тогда в силу линейности задачи найдем

$$w_0^{LH}(s, q)=G_0(s, q)p^{LH}(s, q) \tag{2.1}$$

Заметим, что функция G_0 соответствует граничному условию

$$\sigma_{zz}^{LH}|_{z=0}=1, \quad \sigma_{rz}^{LH}|_{z=0}=0 \tag{2.2}$$

Если рассматривать граничные условия вида ($\delta(\tau)$, $\delta(x, y)$ — обобщенные функции Дирака):

$$\sigma_{zz}|_{z=0}=\delta(\tau)\delta(x, y), \quad \sigma_{rz}|_{z=0}=0 \tag{2.3}$$

то придем к известной осесимметричной задаче Лемба [2, 5]. Условия (2.3) в области изображений имеют вид

$$\sigma_{zz}^{LH}|_{z=0}=1/(2\pi), \quad \sigma_{rz}^{LH}|_{z=0}=0 \tag{2.4}$$

Тогда решение задачи Лемба связано с функций G_0 следующим образом:

$$w|_{z=0}=G(\tau, r)={}^1/_2G_0(\tau, r)/\pi \tag{2.5}$$

Используя теорему умножения преобразований Лапласа и Ханкеля [2] и соотношение (2.5), функционал F представим так:

$$w_0(\tau, r)=\int_0^\infty\int_0^\tau p(t, \rho)\Gamma(\tau-t, r, \rho)\,d\rho\,dt \tag{2.6}$$

$$\Gamma(\tau, r, \rho)=\rho\int_0^{2\pi}G(\tau, \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha})\,d\alpha \tag{2.7}$$

Таким образом функция $\Gamma(\tau, r, \rho)$ определяет ядро функционала F и связана с решением задачи Лемба.

3. Решение осесимметричной задачи Лемба на основе связи с плоской задачей. Применяя преобразования Лапласа и Ханкеля к задаче (1.1), (1.2), (1.4) и (2.3), найдем изображение функции G [5]:

$$\begin{gathered} G^{LH}(s, q)=-{}^1/_2\eta^4 s^2 k_1(s^2, q^2)/(\pi R(s^2, q^2)) \\ R(s, q)=k_3{}^2-4qk_1k_2, \quad k_1(s, q)=(s+q)^{1/2} \\ k_2(s, q)=(\eta^2 s+q)^{1/2}, \quad k_3(s, q)=k_2{}^2(s, q)+q^2 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь ветви корней выбираются так, чтобы их вещественные части были положительны.

Рассматривая соответствующую плоскую задачу Лемба с граничными условиями

$$\sigma_{zz}|_{z=0}=\delta(\tau)\delta(x), \quad \sigma_{xz}|_{z=0}=0 \tag{3.2}$$

и решая ее с помощью преобразования Лапласа по времени и экспоненциального преобразования Фурье по x (q — параметр, F обозначает трансформанту), найдем

$$w^{LF}|_{z=0}=G_1{}^{LF}(s, q)=2\pi G^{LH}(s, q) \tag{3.3}$$

Так как оригинал функции G_1 имеет достаточно простой вид [2, 3]:

$$G_1(\tau, x)=\Phi(\tau^2, x^2)=\Phi_1(\tau^2, x^2)H(\tau^2-x^2)+\Phi_2(\tau^2, x^2)H(\tau^2-\eta^2x^2) \tag{3.4}$$

$$\Phi_1(\tau, x)=\frac{\eta^4 x p_1(\tau, x)p_3{}^2(\tau, x)}{\pi Q(\tau, x)}, \quad \Phi_2(\tau, x)=\frac{4\eta^4\tau x p_1{}^2(\tau, x)p_2(\tau, x)}{\pi Q(\tau, x)}$$

$$Q(\tau, x)=p_3{}^4(\tau, x)-16\tau^2 p_1{}^2(\tau, x)p_2{}^2(\tau, x), \quad p_i(\tau, x)=k_i(-x, \tau) \quad (i=1, 2, 3)$$

то во избежание решения достаточно сложной задачи непосредственного вычисления оригинала функции $G^{LH}(s, q)$ найдем связь решения плоской и осесимметричной задач.

С использованием понятия интегрального преобразования, порожденного двумя другими, может быть доказано следующее утверждение.

Пусть даны два интегральных преобразования (q — параметр, $i=1, 2$):

$$f_i(q)=\int_{\gamma_i} K_i(x_i, q)\varphi_i(x_i)\,dx_i, \quad K_i(x_i, q)\in S'_{qx_i}(\Gamma)$$

$$\varphi_i(x_i)=\int_\Gamma L_i(q, x_i)f_i(q)\,dq, \quad L_i(q, x_i)\in S'_{x_iq}(\gamma_i)$$

$$\int_\Gamma K_i(x_i, q)\,\omega(q)\,dq\in S_{x_i}(\gamma_i) \quad \forall\omega(q)\in S_q(\Gamma)$$

$$\int_{\gamma_i} L_i(q, x_i)\lambda(x_i)\,dx_i\in S_q(\Gamma) \quad \forall\lambda(x_i)\in S_{x_i}(\gamma_i)$$

где $S_{qx}'(\Gamma)$ — пространство обобщенных функций медленного роста по q и бесконечно дифференцируемых по x, $S_q(\Gamma)$ — пространство основных быстро убывающих функций.

Пусть также $f_2(q)=Cf_1(q)$. Тогда существует порожденное интегральное преобразование

$$\varphi_2(x_2)=\int_{\gamma_1}\varphi_1(x_1)K_3(x_1, x_2)\,dx_1 \tag{3.5}$$

$$\varphi_1(x_1)=\int_{\gamma_2}\varphi_2(x_2)L_3(x_2, x_1)\,dx_2, \quad K_3(x_1, x_2)=C\int_\Gamma K_1(x_1, q)L_2(q, x_2)\,dq$$

$$L_3(x_2, x_1)=\frac{1}{C}\int_\Gamma K_2(x_2, q)L_1(q, x_1)\,dq$$

Из этого утверждения вытекает следствие

Пусть для преобразований Фурье и Ханкеля имеется следующая связь между изображениями: $\varphi_2^H(q)=C_2\varphi_{20}^H(q)\exp(iqa)$, $\varphi_{20}^H(q)=C_1\varphi_1^F(q)$.

Тогда оригинал функции $\varphi_2^H(q)$ имеет вид (i — мнимая единица):

$$\varphi_2(r)=\frac{C_2}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-a)K_{3c}(x,r)\,dx+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-a)K_{3s}(x,r)\,dx\right] \tag{3.6}$$

$$K_{3c}(x,r)=-2C_1|x|\,(x^2-r^2)_+^{-3/2}$$

$$K_{3s}(x,r)=-2C_1x(r^2-x^2)_+^{-3/2},\qquad x_+^{\lambda}=x^{\lambda}H(x)$$

Учитывая, что, как следует из (2.5), $C_1=1/(2\pi)$, $C_2=1$, $a=0$, а также четность по x функций $G_1(\tau,x)$ и $K_{3c}(x,r)$ и нечетность $K_{3s}(x,r)$, из (3.6) найдем

$$G(\tau,r)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{r}^{\infty}x(x^2-r^2)_+^{-3/2}\,\Phi(\tau^2,x^2)\,dx \tag{3.7}$$

Интеграл в (3.7) понимается в смысле регуляризованного значения [6] и может быть вычислен в явном виде. Для этого, учитывая, что квадрат скорости распространения волн Релея является корнем уравнения $Q(1,c_R^2)=0$, и раскладывая рациональные функции, входящие в формулы (3.4), на элементарные дроби, представим Φ_1 и Φ_2 в виде

$$\Phi_i(\tau,x)=[\Phi_{i1}(\tau,x)+\Phi_{i2}(\tau,x)]/(\pi\eta^4)\qquad(i=1,2) \tag{3.8}$$

$$\Phi_{i1}(\tau,x)=\frac{a_ip_i(\tau,x)}{x-c_R^2\tau},\qquad \Phi_{i2}(\tau,x)=p_i(\tau,x)\frac{b_ix+c_i\tau}{P(\tau,x)}$$

$$P(\tau,x)=x^2-2\alpha^2x\tau+\beta^2\tau^2,\qquad \alpha^2={}^1/_2(8-\eta^2c_R^2)/\eta^2$$

$$\beta^2=16(\eta^2-1)/(\eta^8c_R^2),\qquad a_i=p_3^2(1,c_R^2)P^{-2}(1,c_R^2),\qquad b_1=\eta^4-a_1$$

$$a_2=-b_2=4(1-c_R^2)\gamma^{-2},\qquad \Delta_1=\alpha^4-\beta^2,\qquad c_i=(\beta^2a_i-4)c_R^{-2}$$

где Δ_1 — дискриминант многочлена $P(1,x)$. Исследование последнего показывает, что $\Delta_1>0$ при $0\leqslant\varkappa<\varkappa_*$, $\Delta_1<0$ при $\varkappa_*<\varkappa\leqslant 1$, $\Delta_1=0$ при $\varkappa=\varkappa_*\approx$ $\approx 0{,}357003$, что соответствует коэффициенту Пуассона $\nu_*\approx 0{,}263082$.

Выполним в интеграле (3.7) замену переменных:

$$G(\tau,r)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\xi_+^{-3/2}\,\Phi(\tau^2,\xi+r^2)\,d\xi,\quad \xi=x^2-r^2 \tag{3.9}$$

Можно показать, что регуляризованные значения интегралов, встречающихся при вычислении (3.9), имеют вид

$$I_1=\int\limits_0^a\frac{\sqrt{a-x}}{x^{3/2}(x-b)}\,dx=-\pi\sqrt{a-b}\,(b)_-^{-3/2}\qquad(a<b) \tag{3.10}$$

$$I_2=\int\limits_0^a\frac{\sqrt{a-x}\,(bx+c)}{x^{3/2}(x^2+2dx+e)}\,dx=-\frac{\pi}{2\Delta_2e^2}[ce(1+q_1)+2ade-abe]\qquad(\Delta<0)$$

$$I_2=0\quad(\Delta\geqslant 0),\qquad \Delta=d^2-e,\qquad q_1=\sqrt{q},\qquad \Delta_2=\sqrt{(q_1+p)/2}$$

$$p=ad/e+1,\qquad q=a(a+2d)/e+1$$

Вычисляя интегралы в (3.9), с учетом формул (3.4), (3.8) и (3.10) найдем

$$G(\tau,r)=\frac{\tau}{2\eta^4\pi}\sum_{k=1}^{2}\left[a_k c_{Rk}(r^2-c_R{}^2\tau^2)_+^{-3/2}+\chi_k(\tau^2,r^2)\right]H(\tau-\eta_k r),\quad c_{Rk}{}^2=1-\eta_k{}^2 c_{Rk}{}^2$$

$$\chi_k(\tau,r)=\frac{\gamma_{1k}(b_k r+c_k\tau)+S_k(\tau,r)P^{-1/2}(\tau,r)}{\sqrt{2}P(\tau,r)\left[\gamma_{1k}\sqrt{P(\tau,r)}+\gamma_{2k}r+\gamma_{3k}\tau\right]^{1/2}}\quad(\varkappa>\varkappa_*) \tag{3.11}$$

$$\chi_k(\tau,r)\equiv 0\quad(\varkappa\leqslant\varkappa_*)$$

$$S_k(\tau,r)=\gamma_{4k}r^2+2\gamma_{5k}r\tau+\gamma_{6k}\tau^2,\quad \gamma_{1k}{}^2=P(\eta_k{}^2,1)$$

$$\gamma_{2k}=1-\alpha^2\eta_k{}^2,\quad \gamma_{3k}=\beta^2\eta_k{}^2-\alpha^2,\quad \gamma_{4k}=b_k(1-2\alpha^2\eta_k{}^2)-\eta_k{}^2c_k$$

$$\gamma_{5k}=c_k+\eta_k{}^2 b_k\beta^2,\quad \gamma_{6k}=c_k(\beta^2\eta_k{}^2-2\alpha^2)-\beta^2 b_k$$

Таким образом, полученная формула (3.11) позволяет вычислить нормальные перемещения на поверхности полупространства в осесимметричной задаче Лемба в явном виде. Причем функции $\chi_k(\tau, r)$ являются регулярными, за исключением точки $\tau=0$, $r=0$. Нетрудно показать, что функция $G(\tau, r)$ является однородной степени $s=-2$ функцией двух переменных.

Отметим, что подробное исследование осесимметричной задачи Лемба проведено, например, в [7]. Здесь использован достаточно трудоемкий процесс непосредственного обращения двойного преобразования Лапласа — Ханкеля. Решение содержит интегралы.

4. Вычисление ядра $\Gamma(\tau, r, \rho)$ интегрального функционала. Учитывая четность и периодичность $\cos\alpha$ и выполняя замену переменных, преобразуем формулу (2.7) к виду

$$\Gamma(\tau,r,\rho)=2\rho\int_{-1}^{1}G(\tau,R_1)(1-z^2)^{-1/2}dz$$

$$z=\cos\alpha,\quad R_1{}^2=r^2+\rho^2-2r\rho z \tag{4.1}$$

Соответствующие (4.1) интегралы от каждого слагаемого формулы (3.11) не выражаются в элементарных функциях. При этом, как можно показать, интегралы от регулярных составляющих χ_k сводятся к гиперэллиптическим интегралам и могут быть вычислены при $\tau^2+R_1{}^2\neq 0$, например, с помощью любой квадратурной формулы, учитывающей особенность подынтегральной функции в точках $z=\pm 1$.

Рассмотрим интегралы от сингулярных слагаемых. Они понимаются в смысле регуляризованных значений, сводятся к эллиптическим интегралам [8] и при $r\rho\neq 0$ равны

$$g_k(\tau,r,\rho)=\int_{-1}^{1}(R_1{}^2-c_R{}^2\tau^2)_+^{-3/2}(1-z^2)^{-1/2}H(\tau^2-\eta_k{}^2R_1{}^2)\,dz= \tag{4.2}$$

$$=(2r\rho)^{-3/2}\int_{-1}^{1}(z_2-z)^{-3/2}(1-z^2)^{-1/2}H(z_2-z)H(z-z_{1k})\,dz=$$

$$=\tfrac{1}{4}(r\rho)^{-3/2}\langle -m_1{}^{-1}m^{-1/2}\{E(\varphi_k,m^{-1})[H(n_{k1})-H(-n_k)]+$$

$$+\mathbf{E}(m^{-1})H(-n_k)\}H(-m_1)+m^{-1}\{[\mathbf{K}(m)-m_1{}^{-1}\mathbf{E}(m)]H(m)+$$

$$+[m_1{}^{-1}E(\theta_k,m)-F(\theta_k,m)-m_1{}^{-1}\sqrt{n_k n_{k1}/(m-n_k)}]H(n_k)\}H(m_1)\rangle$$

$$z_{1k}=\frac{\eta_k{}^2(r^2+\rho^2)-\tau^2}{2r\rho\eta_k{}^2}\leqslant z_2=\frac{r^2+\rho^2-c_R{}^2\tau^2}{2r\rho}$$

$$2m=1+z_2,\quad m_1=1-m,\quad 2n_k=1+z_{1k}$$

$$n_{k1}=1-n_k,\quad \sin\varphi_k=\sqrt{n_{k1}m/(m-n_k)},\quad \sin\theta_k=\sqrt{n_k/m}$$

$$\mathbf{K}(m)=F(\pi/2,m),\quad \mathbf{E}(m)=E(\pi/2,m)$$

Здесь $F(\varphi, m)$ и $\mathrm{K}(m)$ — неполный и полный эллиптические интегралы первого рода, $E(\varphi, m)$ и $\mathrm{E}(m)$ — неполный и полный эллиптические интегралы второго рода, m — параметр, φ — амплитуда [9].

Выделим особенности в выражении (4.2). Сначала рассмотрим случай $r\neq\rho$. Как показывают оценки

$$m\geqslant 0, \quad n\leqslant 1, \quad 0\leqslant\varphi_k\leqslant\pi/2, \quad 0\leqslant\theta_k<\pi/2$$
$$m|_{c_R\tau=|r-\rho|}=1, \quad \varphi_k|_{c_R\tau=|r-\rho|}=\pi/2, \quad m_1|_{c_R\tau=|r-\rho|}=0 \tag{4.3}$$

Таким образом, особенность сосредоточена на множестве $c_R\tau=|r-\rho|$.

Найдем асимптотическую формулу для $g_k(\tau, r, \rho)$ при $c_R\tau\to|r-\rho|+0$ $(m_1>0)$. Учтем при этом асимптотическое представление полных эллиптических интегралов [10]:

$$\mathrm{K}(m)=-{}^1/_2\ln m_1+2\ln 2-{}^1/_8 m_1\ln m_1+{}^1/_4(2\ln 2-1)m_1+o(m_1)$$
$$\mathrm{E}(m)=1-{}^1/_4 m_1\ln m_1+{}^1/_4(4\ln 2-1)m_1+o(m_1) \quad (m_1\to+0) \tag{4.4}$$

Тогда при $|r-\rho|>\eta_k c_R(r+\rho)$ $(m>0,\ n_k<0)$ с учетом разложения $m^{-1}=$ $=(1-m_1)^{-1}=1+m_1+o(m_1)$ $(m_1\to+0)$ найдем

$$g_k(\tau, r, \rho)={}^1/_4(r\rho)^{-3/2}m^{-1}[\mathrm{K}(m)-m_1^{-1}\mathrm{E}(m)]=$$
$$=\rho^{-1}[g_{sk}(\tau, r, \rho)+h_0]+o(1) \quad (c_R\tau\to|r-\rho|+0) \tag{4.5}$$

$$g_{sk}(\tau, r, \rho)=\sqrt{\frac{\rho}{r}}\frac{1}{(r-\rho)^2-c_R^2\tau^2}-\frac{1}{16r\sqrt{r\rho}}\ln[c_R^2\tau^2-(r-\rho)^2]$$
$$h_0=[\ln(8\sqrt{r\rho})-{}^3/_2]/(8r\sqrt{r\rho})$$

где $g_{sk}(\tau, r, \rho)$ — сингулярная составляющая функции $g_k(\tau, r, \rho)$.

В случае $|r-\rho|<\eta_k c_R(r+\rho)$ $(m>0,\ n_k>0)$, дополнительно принимая во внимание, что [10]

$$\lim_{m\to1-0} E(\theta_k, m)=\sin\theta_k|_{m=1}=\sqrt{n_k}$$
$$\lim_{m\to1-0} F(\theta_k, m)=\ln\operatorname{tg}(\theta_k/2+\pi/4)|_{m=1}=\ln[(1+\sqrt{n_k})/\sqrt{n_{k1}}] \tag{4.6}$$
$$\lim_{m\to1-0}[E(\theta_k, m)-\sqrt{n_k n_{k1}/(m-n_k)}]=0$$

$$\lim_{m\to1-0}[E(\theta_k, m)-\sqrt{n_k n_{k1}/(m-n_k)}]/(mm_1)]=\lim_{m\to1-0}[dE(\theta_k, m)/dm+$$
$$+{}^1/_2(m-n)^{-3/2}\sqrt{n_k n_{k1}}]/(m_1-m)={}^1/_2\ln[(1+\sqrt{n_k})/\sqrt{n_{k1}}]$$
$$dE(\theta_k m)/dm=\partial E/\partial m+(\partial E/\partial\theta_k)(d\theta_k/dm)$$
$$\partial E/\partial m={}^1/_2(E-F)/m, \quad d\theta_k/dm=-{}^1/_2\sqrt{n_k/(m-n_k)}/m$$
$$\partial E(\theta_k, m)/\partial\theta_k=\sqrt{1-m\sin^2\theta_k}$$

получим

$$g_k(\tau, r, \rho)={}^1/_4(r\rho)^{-3/2}\{m^{-1}[\mathrm{K}(m)-m_1^{-1}\mathrm{E}(m)]-$$
$$-m^{-1}F(\theta_k, m)-[E(\theta_k, m)-\sqrt{n_k n_{k1}/(m-n_k)}]/(mm_1)\}=$$
$$=\rho^{-1}[g_{sk}(\tau, r, \rho)+h_0+h_{1k}]+o(1) \quad (c_k\tau\to|r-\rho|+0) \tag{4.7}$$
$$h_{1k}=-(8r\sqrt{r\rho})^{-1}\ln[(1+\sqrt{n_k^R})/\sqrt{n_{k1}^R}]$$
$$n_{k1}^R=n_{k1}|_{\tau=|r-\rho|/c_R}=c_{Rk}^2(r-\rho)^2/(c_R^2 4r\rho), \quad n_k^R=1-n_{k1}^R$$

Аналогично найдем представление $g_k(\tau, r, \rho)$ при $c_R\tau\to|r-\rho|-0$ $(m_1<0)$. При условии $|r-\rho|>\eta_k c_R(r+\rho)$ $(n_k<0)$ из формул (4.2) и (4.4) получим

$$g_k(\tau, r, \rho)={}^1/_4(r\rho)^{-3/2}l_1^{-1}(1-l_1)^{3/2}\mathbf{E}(l)=g_{sk}(\tau, r, \rho)+$$
$$+h_0+o(1)\quad (c_R\tau\to|r-\rho|-0),\quad l=m^{-1},\quad l_1=1-l \tag{4.8}$$
$$(1-l_1)^{3/2}=1-{}^3/_2l_1+o(l_1)\quad (l_1\to+0)$$

Если же $|r-\rho|<c_R(r+\rho)$ $(c_R^2\eta_k^2n_k>-m_1)$, то в левой полуокрестности точки $\tau=|r-\rho|/c_R$, как следует из (4.2), g_k определяется так:

$$g_k(\tau, r, \rho)={}^1/_4(r\rho)^{-3/2}l_1^{-1}E(\varphi_k, l) \tag{4.9}$$

Так как $\varphi_k\to\pi/2$ при $c_R\tau\to|r-\rho|-0$, то, используя следующее преобразование эллиптических интегралов к новой амплитуде [9]:

$$F(\alpha, m)=\mathbf{K}(m)-F(\alpha_1, m),\quad m_1\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha_1=1$$
$$E(\alpha, m)=\mathbf{E}(m)-E(\alpha_1, m)+m\sin\alpha\sin\alpha_1 \tag{4.10}$$

Формулу (4.9) представим в виде

$$g_k(\tau, r, \rho)={}^1/_4(r\rho)^{-3/2}l_1^{-1}l^{3/2}[\mathbf{E}(l)-E(\varphi_{k1}, l)+l\sqrt{n_kn_{k1}/(1-mn_k)}]$$
$$l_1\operatorname{tg}^2\varphi_k\operatorname{tg}^2\varphi_{k1}=1,\quad \sin\varphi_{k1}=\sqrt{n_k},\quad \varphi_{k1}|_{c_R\tau=|r-\rho|}\neq\pi/2 \tag{4.11}$$

Учитывая формулы (4.6), (4.8) и выполняя соответствующие предельные переходы, из (4.11) найдем при $c_R\tau\to|r-\rho|-0$ и $|r-\rho|<c_R(r+\rho)$

$$g_k(\tau, r, \rho)=\rho^{-1}[g_{sk}(\tau, r, \rho)+h_0+h_{1k}+h_{2k}]+$$
$$+o(1)\quad (c_R\tau\to|r-\rho|-0),\quad h_{2k}=-\sqrt{n_k^R}/(8r\sqrt{r\rho n_{k1}^R}) \tag{4.12}$$

Асимптотические представления (4.5), (4.7), (4.8) и (4.12) справедливы при $r\neq\rho$ и $r\rho\neq0$. Случай $r=\rho$, $r\rho\neq0$ требует отдельного рассмотрения, так как при $c_R\tau\to|r-\rho|$ $(\tau\to0)$ $\theta_k\to\pi/2$. Отметим сначала, что с учетом носителя функции g_k:

$$\lim_{\tau\to-0} g_k(\tau, r, \rho)=0 \tag{4.13}$$

При $\tau\to+0$, выполняя преобразования (4.10), найдем

$$g_k(\tau, r, \rho)=m^{-1}[\mathbf{K}(m)-F(\theta_k, m)]-[\mathbf{E}(m)-E(\theta_k, m)+$$
$$+\sqrt{n_kn_{k1}/(m-n_k)}]/(mm_1)=m^{-1}[F(\theta_{k1}, m)-m_1^{-1}E(\theta_{k1}, m)+$$
$$+m_1^{-1}\sqrt{(m-n_k)/n_{k1}}]-\sqrt{n_kn_{k1}/(m-n_k)}/(mm_1),\quad \sin\theta_{k1}=c_{Rk}/\sqrt{m} \tag{4.14}$$
$$m_1={}^1/_4c_R^2\tau^2(r\rho),\quad n_{k1}={}^1/_4\tau^2/(r\rho\eta_k^2),\quad m-n_k=n_{k1}c_{Rk}^2$$

Осуществляя в (4.14) соответствующие предельные переходы при $\tau\to+0$, окончательно получим

$$g_k(\tau, r, \rho)=-(\rho c_{Rk}c_R^2\tau^2)^{-1}+$$
$$+{}^1/_8\rho^{-3}[\ln(1+c_{Rk})-\ln(c_R\eta_k)-c_{Rk}^{-1}]+o(1)\quad (\tau\to+0) \tag{4.15}$$

При $r\rho=0$, интегрируя в (4.1) сингулярные слагаемые $G(\tau, r)$, найдем

$$g_k(\tau, 0, \rho)=\pi(\rho^2-c_R^2\tau^2)_+^{-3/2}H(\tau-\rho)\quad (R_1=\rho)$$
$$g_k(\tau, r, 0)=\pi(r^2-c_R^2\tau^2)_+^{-3/2}H(\tau-r)\quad (R_1=r) \tag{4.16}$$
$$g_k(\tau, 0, 0)=0$$

Таким образом, собирая все формулы п. 4, с учетом (3.11) получим следующее представление ядра $\Gamma(\tau, r, \rho)$:

$$\Gamma(\tau, r, \rho)=\sum_{k=1}^{2}[\Gamma_{ks}(\tau, r, \rho)H(m)+\Gamma_{kr}(\tau, r, \rho)]H(n_{k1}) \tag{4.17}$$

$$\Gamma_{ks}(\tau, r, \rho) = \frac{a_k}{\eta^4}\begin{cases} \tau c_{Rk} g_{sk}(\tau, r, \rho)/\pi & (r \neq \rho,\ r\rho \neq 0) \\ \tau\rho c_{Rk}(\rho^2 - c_R^2\tau^2)_+^{-3/2} & (r = 0,\ \rho \neq 0) \\ 0 & (\rho = 0,\ r \geqslant 0) \\ -\rho(\pi c_R^2 \tau)^{-1} & (r = \rho,\ r\rho \neq 0) \end{cases}$$

$$\Gamma_{kr}(\tau, r, \rho) = \frac{\tau\rho}{\pi\eta^4}\int\limits_{\max(-1, z_{1k})}^{1} \frac{\chi_k(\tau^2, R_1^2)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz + f_k(\tau, r, \rho)$$

$$f_k(\tau, r, \rho) = a_k c_{Rk}\tau g_k(\tau, r, \rho)/(\pi\eta^4) - \Gamma_{ks}(\tau, r, \rho) \qquad (r\rho \neq 0)$$

$$f_k(\tau, r, \rho) \equiv 0 \qquad (r\rho = 0)$$

Здесь функции Γ_{ks} определяют сингулярные составляющие функции Γ, а Γ_{kr} — регулярные слагаемые. Причем функции $f_k(\tau, r, \rho)$ ограничены и имеют конечный разрыв на множестве $c_R\tau = |r-\rho|$ при $r\rho \neq 0$:

$$\lim_{c_R\tau \to |r-\rho|+0} f_k(\tau, r, \rho) = a_k c_{Rk}|r-\rho|[h_0 + h_{1k}H(n_k^R)]/(\pi\eta^4 c_R) \qquad (4.18)$$

$$[f_k(\tau, r, \rho)]\big|_{c_k\tau = |r-\rho|} = \lim_{c_R\tau \to |r-\rho|+0} f_k - \lim_{c_R\tau \to |r-\rho|-0} f_k =$$

$$= -a_k c_{Rk}|r-\rho|\, h_{2k} H(n_k^R)/(\pi\eta^4 c_R)$$

Формула (4.17) для ядра функционала (2.6) позволяет построить квадратурные формулы для вычисления соответствующего двойного интеграла. Аналогичным образом могут быть решены задачи Лемба при других граничных условиях и найдена вторая компонента перемещения.

5. Второе интегральное представление для ядра $\Gamma(\tau, r, \rho)$. При построении решения задачи (1.1), (1.4) можно, не применяя теорему умножения для преобразования Ханкеля, воспользоваться принципом суперпозиции для линейных уравнений с переменными коэффициентами [2]. Обозначим $\Gamma(\tau, r, \rho) = w|_{z=0}$ решение указанной задачи с граничными условиями

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(r-\rho)\delta(\tau), \qquad \sigma_{rz}|_{z=0} = 0 \qquad (5.1)$$

Применяя интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, найдем

$$\Gamma^{LH}(s, q, \rho) = 2\pi G^{LH}(s, q)\rho J_0(q\rho) \qquad (5.2)$$

Используя интегральное представление функции Бесселя $J_0(q\rho)$ [9], получим

$$\Gamma^{LH}(s, q, \rho) = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\pi G^{LH}(s, q)\rho\exp(iq\rho\cos\alpha)\,d\alpha \qquad (5.3)$$

Учитывая связь плоской и осесимметричной задач (3.3) и применяя следствие (3.6) к подынтегральному выражению (5.3) при условии $C_1 = 1/(2\pi)$, $C_2 = 2\rho$, $a = \rho\cos\alpha$, приходим к следующей формуле, связывающей решение плоской задачи Лемба и ядро $\Gamma(\tau, r, \rho)$:

$$\Gamma(\tau, r, \rho) = -\frac{2\rho}{\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_r^\infty x(x^2 - r^2)_+^{-3/2} G_1(\tau, x - \rho\cos\alpha)\,d\alpha\,dx \qquad (5.4)$$

Можно показать, что в результате интегрирования в (5.4) с учетом конкретного представления функции G_1 (3.4) придем к результату, аналогичному (4.17).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1959. 470 с.
2. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Вертикальный удар цилиндра по упругой полуплоскости // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тез. докл. Ереван. 1984. С. 125–131.

3. *Грандштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. *Кубенко В. Д.* Об одном способе решения задач проникания тел в акустическую и упругую среду // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Тез. докл. Ереван. 1984. С. 183–187.
5. *Огурцов К. И., Петрашень Г. И.* Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Учен. зап. ЛГУ. 1951. № 149. Вып. 24. с. 3–117.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука. 1981. 798 с.
7. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка. 1976. 283 с.
8. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение. 1972. 374 с.
9. *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение. 1980. 343 с.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М. Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1986
