МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988

УДК 539.3

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ БЛОЧНЫХ СРЕД С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦАХ

НИКИТИН И. С.

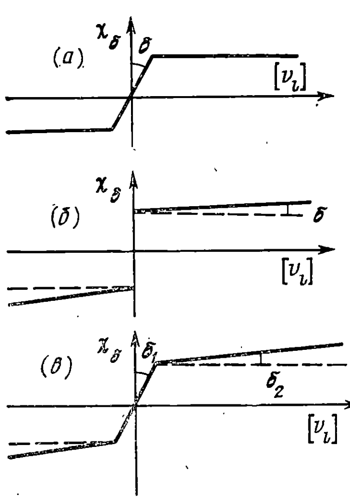
Наиболее последовательным методом осреднения структурно-периодических сред является асимптотический метод осреднения [1]. Подробное изложение этого метода с многочисленными примерами дано в [2], где рассматривается случай идеального контакта (полного сцепления) структурных элементов. Большое количество задач с помощью этого метода решено в [3], где дается постановка задачи об осреднении структур с неидеальными условиями контакта – линейными условиями проскальзывания.

В [4] построены осредненные уравнения слоистой среды, в которой слои взаимодействуют по некоторому обобщенному нелинейному закону, включающему в себя взаимодействие винклеровского типа, вязкое и сухое трение.

В публикуемой работе метод асимптотического осреднения применяется для построения осредненных уравнений среды, структурными элементами которой являются блоки – упругие однородные параллелепипеды, контактные границы которых (разрезы) образуют равномерную сетку и взаимодействуют между собой по обобщенному нелинейному закону [4].

1. В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную среду периодической структуры. Структурным элементом среды является блок – упругий, однородный, изотропный, прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям x_1, x_2, x_3 с размерами $\theta_1\varepsilon$, $\theta_2\varepsilon$, $\theta_3\varepsilon$ соответственно ($\varepsilon\ll1$, $\theta_k\sim1$), с модулями Ламе λ, μ и плотностью ρ. Контактные границы между блоками (разрезы) образуют равномерную сетку $x_k=x_k^{(p)}=\theta_k p\varepsilon$ ($k=1, 2, 3$; $p=0, \pm1, \pm2\ldots$).

Предположим, что среда при $t>0$ нагружается объемными силами с плотностью $f_k(x_l, t)$ так, что если на контактной границе $x_i=x_i^{(p)}$ нормальные напряжения являются сжимающими, то соседние блоки взаимодействуют по следующему обобщенному нелинейному закону:



$$\sigma_{ii}<0,\quad [u_i]=[\sigma_{ik}]=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{li}=k(|\sigma_{ii}|)[u_l]+\eta(|\sigma_{ii}|)[v_l]+$$
$$+q(|\sigma_{ii}|)\chi_\delta([v_l])\quad (l\neq i)$$

В противном случае контактные границы расходятся и выполняются условия: $[u_i]\geqslant0$, $\sigma_{ik}=0$. Здесь и далее приняты обозначения: u_i – компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$, v_i – компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам производится суммирование (за исключением индекса i).

Символом $[A]$ обозначается скачок величины A на контактной границе $x_i=x_i^{(p)}$ соседних блоков:

$$[A]=A\Big|_{x_i^{(p)}+0}-A\Big|_{x_i^{(p)}-0}$$

Функция χ_δ задает закон нелинейного трения на контактных границах между блоками и выбирается таким образом, чтобы предельным переходом по параметру $\delta\to0$ можно было перейти к закону сухого трения Кулона. Такой выбор может быть сделан различными способами. В одномерном случае характер возможных зависимостей $\chi_\delta([v_l])$ показан на фигуре. Для определенности выберем функцию χ_δ в следующем виде (фиг. 1, a):

$$\chi_\delta([v_l])=[v_l]/|[\mathbf{v}]| \quad (|[\mathbf{v}]|>\delta)$$

$$\chi_\delta([v_l])=[v_l]/\delta \quad (|[\mathbf{v}]|\leqslant\delta), \quad |[\mathbf{v}]|=([v_k][v_k])^{1/2}, \quad (k, l\neq i).$$

Зависимость коэффициентов k, η и q от $|\sigma_{ii}|$ будем считать линейной: $k=k_0|\sigma_{ii}|$, $\eta=\eta_0|\sigma_{ii}|$, $q=q_0|\sigma_{ii}|$. Кроме того, предположим, что значения коэффициентов k_0, η_0 и q_0 таковы, что $k_*=k_0\varepsilon=O(1)$, $\eta_*=\eta_0\varepsilon=O(1)$, $q_0=O(1)$, а параметр $\delta_*=\delta/\varepsilon$ таков, что $\varepsilon/\delta_*=O(\varepsilon^\varkappa)$, $\varkappa>0$.

Полагая в обобщенном законе взаимодействия (1.1) $\eta_0=q_0=0$, получаем $\sigma_{li}=k_0|\sigma_{ii}|[u_l]$ $(l\neq i)$ — нелинейный закон проскальзывания винклеровского типа. При $k_0=q_0=0$ получаем $\sigma_{li}=\eta_0|\sigma_{ii}|[\dot v_l]$ $(l\neq i)$ — нелинейный закон вязкого трения. При $k_0=\eta_0=0$ получаем $\sigma_{li}=q_0|\sigma_{ii}|\chi_\delta([v_l])$ $(l\neq i)$ — закон нелинейного трения, в котором путем предельного перехода $\delta\to0$ можно перейти к закону сухого трения Кулона. Отметим, что функция χ_δ антисимметрична $\chi_\delta(-x)=-\chi_\delta(x)$.

В геометрически линейной постановке движение такой среды описывается следующей системой уравнений с альтернативными условиями (A) или (B):

$$x_i\neq x_i^{(p)}:\ \partial\sigma_{kl}/\partial x_l-\rho u_k^{\cdot\cdot}=f_k$$

$$\sigma_{kl}=C_{klmn}\partial u_m/\partial x_n \tag{1.2}$$

$$x_i=x_i^{(p)}:\ [\sigma_{ik}]=0$$

$$\sigma_{ii}<0,\ [u_i]=0 \tag{A}$$

$$\sigma_{li}=k_0|\sigma_{ii}|[u_l]+\eta_0|\sigma_{ii}|[\dot v_l]+q_0|\sigma_{ii}|\chi_\delta([v_l]) \quad (l\neq i)$$

$$[u_i]\geqslant0,\ \sigma_{ik}=0 \tag{B}$$

Начальные условия при $t=0$: $u_k=v_k=0$. В этой системе и в дальнейшем дифференцирование по времени обозначается точкой сверху. Тензор модулей упругости C_{klmn} в рассматриваемом случае упругих, однородных, изотропных блоков равен $C_{klmn}=\lambda\delta_{kl}\delta_{mn}+\mu(\delta_{km}\delta_{ln}+\delta_{kn}\delta_{lm})$ и вводится только для сокращения записи.

2. Если внешнее воздействие f_k является достаточно гладкой, медленно меняющейся функцией с характерным пространственным масштабом $L\gg\varepsilon$ $(L\sim1)$ и временным масштабом $\tau\gg\varepsilon/c$ $(\tau\sim1)$ (где c — характерная скорость упругих волн, скажем, $c=(\mu/\rho)^{1/2}$), то можно попытаться перейти к осредненному описанию такой среды с помощью метода асимптотического осреднения [1].

В дополнение к «медленным» переменным x_l введем «быстрые» переменные $\xi_l=x_l/\varepsilon$ и будем искать смещения u_k в виде гладкой функции переменных x_l и θ_l-периодической функции быстрых переменных ξ_l [2]: $u_k=u_k(x_l, \xi_l, t)$. По переменным ξ_l смещения u_k являются гладкими функциями при $\xi_l\neq0$ (вне контактных границ) и могут терпеть разрывы первого рода при $\xi_l=0$.

С учетом такого выбора аргументов перепишем систему (1.2) с альтернативными условиями (A) или (B) в смещениях следующим образом:

$$x_i\neq x_i^{(p)}:$$

$$C_{klmn}\{\partial^2u_m/\partial x_n\partial x_l+\varepsilon^{-1}(\partial u_{m,l}/\partial x_n+\partial u_{m,n}/\partial x_l)+\varepsilon^{-2}u_{m,nl}\}-\rho u_k^{\cdot\cdot}=f_k$$

$$x_i=x_i^{(p)}:\ [C_{ikmn}(\partial u_m/\partial x_n+\varepsilon^{-1}u_{m,n})]=0 \tag{2.1}$$

$$C_{iimn}(\partial u_m/\partial x_n+\varepsilon^{-1}u_{m,n})<0,\ [u_i]=0 \tag{A}$$

$$C_{ilmn}(\partial u_m/\partial x_n+\varepsilon^{-1}u_{m,n})=|C_{iimn}(\partial u_m/\partial x_n+\varepsilon^{-1}u_{m,n})|(k_0[u_l]+\eta_0[\ddot u_l]+$$

$$+q_0\chi_\delta([\dot u_l])) \quad (l\neq i)$$

$$[u_i]\geqslant0,\ C_{ikmn}(\partial u_m/\partial x_n+\varepsilon^{-1}u_{m,n})=0 \tag{B}$$

Начальные условия при $t=0$: $u_k=u_k^{\cdot}=0$. Здесь и далее запятая после индекса означает частное дифференцирование по соответствующей быстрой переменной.

Представим смещения среды в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε, ограничиваясь членами порядка ε^2:

$$u_k=u_k^{(0)}(x_l,\xi_l,t)+\varepsilon u_k^{(1)}(x_l,\xi_l,t)+\varepsilon^2 u_k^{(2)}(x_l,\xi_l,t)+\ldots \tag{2.2}$$

Подставим этот ряд в систему (2.1) и приравняем сумму коэффициентов при степенях ε^{-2} и ε^{-1} нулю, а при ε^0 — функции f_k. В результате получим системы уравнений нулевого, первого и второго приближений, из которых следует: 1. Нулевое приближение $u_k^{(0)}$ не зависит от быстрых переменных $u_k^{(0)}=w_k(x_l,t)$;

2. Первое приближение $u_k^{(1)}$ находится из задачи на ячейке периодичности $\{x_i^{(p)}-\theta_i\varepsilon/2\leqslant x_i\leqslant x_i^{(p)}+\theta_i\varepsilon/2;\ -\theta_i/2\leqslant\xi_i\leqslant\theta_i/2\}$:

$$x_i\neq x_i^{(p)},\qquad \xi_i\neq 0:\qquad C_{klmn}u^{(1)}_{m,ln}=0 \tag{2.3}$$

условия θ_i-периодичности при $\xi_i=\pm\theta_i/2$: $[[u_k^{(1)}]]=[[u^{(1)}_{k,i}]]=0$

$$x_i=x_i^{(p)},\qquad \xi_i=0:\qquad [C_{ikmn}(\partial w_m/\partial x_n+u^{(1)}_{m,n})]=0$$

$$C_{iimn}(\partial w_m/\partial x_n+u^{(1)}_{m,n})<0,\qquad [u_i^{(1)}]=0 \tag{A}$$

$$C_{ilmn}(\partial w_m/\partial x_n+u^{(1)}_{m,n})=$$

$$=|C_{iimn}(\partial w_m/\partial x_n+u^{(1)}_{m,n})|\,(k_*[u_l^{(1)}]+\eta_*[u_l^{(1)\cdot}]+q_0\chi_{\delta_*}([u_l^{(1)\cdot}]))\qquad (l\neq i)$$

$$[u_i^{(1)}]\geqslant 0,\qquad C_{ikmn}(\partial w_m/\partial x_n+u^{(1)}_{m,n})=0 \tag{B}$$

Начальные условия при $t=0$: $u_k^{(1)}=u_k^{(1)\cdot}=0$. По определению, $[[A]]=A|_{\xi_i=\theta_i/2}-A|_{\xi_i=-\theta_i/2}$, причем ξ_i в этом определении рассматривается как независимая переменная;

3. Второе приближение $u_k^{(2)}$ находится из уравнений:

$$C_{klmn}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_n\,\partial x_l}+C_{klmn}\frac{\partial u^{(1)}_{m,n}}{\partial x_l}+\left\{C_{klmn}\left(u^{(2)}_{m,n}+\frac{\partial u_m^{(1)}}{\partial x_n}\right)\right\}_{,l}-\rho w_k^{\cdot\cdot}=f_k \tag{2.4}$$

В соответствии с представлением (2.2) можно записать

$$\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(0)}+\varepsilon\sigma_{kl}^{(1)}+\ldots,\qquad \sigma_{kl}^{(1)}=C_{klmn}(u^{(2)}_{m,n}+\partial u_m^{(1)}/\partial x_n)$$

Из условия $[\sigma_{kl}]=0$ следует, что $[\sigma_{kl}^{(1)}]=0$. Отсюда и из условий θ_k-периодичности по ξ_k получаем

$$\langle\sigma^{(1)}_{kl,l}\rangle=\langle\{C_{klmn}(u^{(2)}_{m,n}+\partial u_m^{(1)}/\partial x_n)\}_{,l}\rangle=0$$

Здесь обозначено $\langle A\rangle=(\theta_1\theta_2\theta_3)^{-1}\iiint A\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3$ (интегрирование в пределах $|\xi_k|\leqslant\theta_k/2$). С учетом этого факта проинтегрируем уравнение (2.4) по ячейке периодичности:

$$C_{klmn}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_n\,\partial x_l}+C_{klmn}\frac{\partial\langle u^{(1)}_{m,n}\rangle}{\partial x_l}-\rho w_k^{\cdot\cdot}=f_k \tag{2.5}$$

Это и есть осредненное уравнение для главного члена смещений w_k. Первое приближение $u_m^{(1)}$, входящее в (2.5), находится из решения задачи на ячейке периодичности (2.3).

Подставим в (2.3) выражение для тензора модулей упругости C_{klmn} и введем обозначения:

$$s_i=\lambda\frac{\partial w_k}{\partial x_k}+2\mu\frac{\partial w_i}{\partial x_i},\qquad \tau_{il}=\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_l}+\frac{\partial w_l}{\partial x_i}\right)\qquad (l\neq i)$$

Тогда задача на ячейке (2.3) примет вид (по индексам, заключенным в скобки, производится симметризация: $w_{(k,\,l)}=(w_{k,\,l}+w_{l,\,k})/2$):

$$x_i\neq x_i^{(p)},\qquad \xi_i\neq 0:\qquad (\lambda+\mu)\,u^{(1)}_{k,kl}+\mu u^{(1)}_{l,kk}=0 \tag{2.6}$$

$$\xi_i=\pm\theta_i/2:\qquad [[u_k^{(1)}]]=[[u^{(1)}_{k,i}]]=0$$

$$x_i=x_i^{(p)},\qquad \xi_i=0:\qquad [\lambda u^{(1)}_{k,k}+2\mu u^{(1)}_{i,i}]=0,\qquad [u^{(1)}_{(i,l)}]=0$$

$$s_i+\lambda u^{(1)}_{k,k}+2\mu u^{(1)}_{i,i}<0,\qquad [u_i^{(1)}]=0 \tag{A}$$

$$\tau_{li}+2\mu u_{(i,l)}=$$

$$=|s_i+\lambda u^{(1)}_{k,k}+2\mu u^{(1)}_{i,i}\,|\,(k_*[u_l^{(1)}]+\eta_*[u_l^{(1)\cdot}]+q_0\chi_{\delta_*}([u_l^{(1)\cdot}]))\qquad (l\neq i)$$

$$[u_i^{(1)}]\geqslant 0,\qquad s_i+\lambda u^{(1)}_{k,k}+2\mu u^{(1)}_{i,i}=0,\qquad \tau_{il}+2\mu u^{(1)}_{(i,l)}=0\qquad (l\neq i) \tag{B}$$

$$t=0:\qquad u_k^{(1)}=u_k^{(1)\cdot}=0$$

Решение этой задачи будем искать в следующем виде: $u_k^{(1)}=u_k^{(1)}(\partial w_m/\partial x_n;\ \xi_i)$. Дифференциальным уравнениям при $\xi_i\neq 0$ в (2.6) можно удовлетворить с помощью функций

$$u_k^{(1)}=\varphi_{kl}(\partial w_m/\partial x_n)\,\xi_l+\psi_k(\partial w_m/\partial x_n),\qquad \psi_k=\sum_{l=1}^{3}\psi_{kl}$$

$$\varphi_{kl}=\varphi_{kl}^{+},\ \psi_{kl}=\psi_{kl}^{+}\ (\xi_l>0),\ \varphi_{kl}=\varphi_{kl}^{-},\ \psi_{kl}=\psi_{kl}^{-}\ (\xi_l<0)$$

Условия θ_i-периодичности по ξ_i и непрерывности напряжений при $\xi_i=0$ дают $\varphi_{ki}^{+}=\varphi_{ki}^{-}=\varphi_{ki}$, $\theta_i\varphi_{ki}=-(\psi_{ki}^{+}-\psi_{ki}^{-})$.

Поскольку $[u_k^{(1)}]|_{\xi_i=0}=\psi_{ki}^{+}-\psi_{ki}^{-}$, имеем

$$[u_k^{(1)}]_{\xi_i=0}=-\theta_i\varphi_{ki},\qquad u^{(1)}_{k,i}=\varphi_{ki} \tag{2.7}$$

Функции φ_{ki} подлежат определению из альтернативных условий (A) или (B) в системе (2.6). Поскольку в осредненное уравнение (2.5) входят только производные $u^{(1)}_{k,i}=\varphi_{ki}$, то функции $\psi_{ki}^{\pm}$ можно оставить неопределенными. Их можно определить из дополнительного условия $\langle u_k^{(1)}\rangle=0$ [2].

Определим φ_{ki} для режима (A). Подставляя (2.7) в условия (A) системы (2.6), получаем

$$\varphi_{ii}=0,\ s_i+\lambda\varphi_{kk}<0\ \ (k\neq i) \tag{2.8}$$

$$|s_i+\lambda\varphi_{kk}|\,(q_0\chi_{\delta_*}(\theta_i\varphi_{li}^{\cdot})+\eta_*\theta_i\varphi_{li}^{\cdot}+k_*\theta_i\varphi_{li})+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0\ \ (k,\ l\neq i)$$

Начальное условие для этого уравнения: $\varphi_{li}|_{t=t_*}=\varphi_{li}^{*}$, где t_* — время перехода к этому режиму, φ_{li}^{*} — значение функции φ_{li} в этот момент. Если $t_*=0$, то $\varphi_{li}^{*}=0$.

Рассмотрим режим (B). Подставляя (2.7) в условия (B) системы (2.6), получаем

$$\varphi_{ii}\leqslant 0,\ \varphi_{ii}=-(s_i+\lambda\varphi_{kk})/(\lambda+2\mu),\ \varphi_{(il)}=-\tau_{il}/(2\mu)\ \ (k,\ l\neq i) \tag{2.9}$$

Ограничение $\varphi_{ii}\leqslant 0$ в (2.9) можно переписать в виде $s_i+\lambda\varphi_{kk}\geqslant 0$, $k\neq i$. Осредненное уравнение (2.5) с учетом (2.7)—(2.9) принимает вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_n\,\partial x_m}+\mu\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_m\,\partial x_m}+\lambda\frac{\partial\varphi_{mm}}{\partial x_n}+2\mu\frac{\partial\varphi_{(mn)}}{\partial x_m}-\rho w_n^{\cdot\cdot}=f_n \tag{2.10}$$

$$s_i+\lambda\varphi_{kk}<0,\ \varphi_{ii}=0\ \ (k\neq i) \tag{A}$$

$$|s_i+\lambda\varphi_{kk}|\,(q_0\chi_{\delta_*}(\theta_i\varphi_{li}^{\cdot})+\eta_*\theta_i\varphi_{li}^{\cdot}+k_*\theta_i\varphi_{li})+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0\ \ (k,l\neq i)$$

$$\varphi_{li}|_{t=t_*}=\varphi_{li}^*$$
$$s_i+\lambda\varphi_{kk}\geqslant 0 \quad (k\neq i) \qquad \text{(B)}$$
$$\varphi_{ii}=-(s_i+\lambda\varphi_{kk})/(\lambda+2\mu), \quad \varphi_{(il)}=-\tau_{il}/(2\mu) \quad (k,\ l\neq i)$$

В общем виде построение осредненной модели завершено. Если воздействие на среду осуществляется таким образом, что в течение всего процесса деформирования блоки прижаты друг к другу ($\sigma_{ii}|_{x_i=x_i^{(p)}}<0$), то на всех гранях осуществляется взаимодействие в режиме А). В дальнейшем ограничимся рассмотрением именно этого случая.

Тогда осредненное уравнение примет вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_m\,\partial x_n}+\mu\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_m\,\partial x_m}+2\mu\frac{\partial\varphi_{(mn)}}{\partial x_m}-\rho w_n{}^{\cdot\cdot}=f_n \qquad (2.11)$$
$$s_i<0,\ \varphi_{ii}=0 \qquad \text{(A)}$$
$$|s_i|\,(q_0\chi_{\delta_*}(\theta_i\varphi_{li}{}^{\cdot})+\eta_*\theta_i\varphi_{li}{}^{\cdot}+k_*\theta_i\varphi_{li})+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0 \quad (l\neq i)$$

3. Рассмотрим различные частные случаи обобщенного закона взаимодействия.

1. Взаимодействие по закону проскальзывания винклеровского типа ($q_0=\eta_0=0$).

Из (2.11) для φ_{li} имеем $|s_i|k_*\theta_i\varphi_{li}+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0$ $(l\neq i)$. Отсюда нетрудно найти:

$$\varphi_{il}=-2\mu|s_i|\theta_i w_{(i,\,l)}[k_*|s_l|\ |s_i|\theta_i\theta_l+\mu(|s_i|\theta_i+|s_l|\theta_l)]^{-1}$$

Подстановка этого выражения в осредненное уравнение для главного члена смещений w_m из (2.11) приводит к нелинейным уравнениям второго порядка для w_m.

2. Взаимодействие по закону вязкого трения ($k_0=q_0=0$). Из (2.11) для φ_{li} имеем

$$\eta_*|s_i|\theta_i\varphi_{li}{}^{\cdot}+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0 \quad (l\neq i),\ \varphi_{li}|_{t=t_*}=\varphi_{li}^*$$

Это уравнение объединяется в систему с уравнением для w_m из (2.11) и решается совместно.

3. Взаимодействие по закону нелинейного трения ($k_0=\eta_0=0$). С учетом определения функции χ_δ из (2.11) для φ_{li} имеем нелинейные уравнения в случае режима (A):

1°. При $\theta_i^2\varphi_{ki}{}^{\cdot}\varphi_{ki}{}^{\cdot}>\delta_*^2$ $(k\neq i)$

$$q_0|s_i|\varphi_{li}{}^{\cdot}(\varphi_{ki}{}^{\cdot}\varphi_{ki}{}^{\cdot})^{-1/2}+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0 \quad (k,\ l\neq i).$$

2°. При $\theta_i^2\varphi_{ki}{}^{\cdot}\varphi_{ki}{}^{\cdot}\leqslant\delta_*^2$ $(k\neq i)$

$$q_0|s_i|\theta_i\varphi_{li}{}^{\cdot}/\delta_*+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0 \quad (k,\ l\neq i)$$

Ограничение в случае 2° можно переписать в виде

$$\sum_{l\neq i}\left(\frac{\tau_{li}+2\mu\varphi_{(li)}}{q_0|s_i|}\right)^2\leqslant 1 \qquad (3.1)$$

Перейдем к пределу $\delta_*\to 0$, что соответствует переходу к закону сухого трения Кулона. Для φ_{li} получим следующие уравнения:

1°. При $\varphi_{ki}{}^{\cdot}\varphi_{ki}{}^{\cdot}\neq 0$ $(k\neq i)$

$$q_0|s_i|\varphi_{li}{}^{\cdot}(\varphi_{ki}{}^{\cdot}\varphi_{ki}{}^{\cdot})^{-1/2}+2\mu\varphi_{(li)}+\tau_{il}=0 \quad (k,\ l\neq i)$$

2°. При выполнении ограничения (3.1) $\varphi_{li}{}^{\cdot}=0$ или $\varphi_{li}=\varphi_{li}^*$. Здесь φ_{li}^* — значение функции φ_{li} в момент перехода к режиму 2° (это значение «замораживается» и не меняется в течение всего режима взаимодействия 2°).

Полученные уравнения для φ_{li} присоединяются к уравнениям для w_m из (2.11) и решаются совместно.

4. Главный член напряжений в их асимптотическом разложении по степеням ε равен

$$\sigma_{ij}^{(0)}=C_{ijkl}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_l}+u_{k,l}^{(1)}\right)=\lambda\delta_{ij}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_k}+\varphi_{kk}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}+2\varphi_{(ij)}\right) \tag{4.1}$$

Поэтому его можно определить в ходе решения совместной осредненной системы для w_k и φ_{kl} для любого из рассмотренных вариантов взаимодействия. Продифференцируем (4.1) по времени и введем обозначения $p_{ij}=\sigma_{ij}^{(0)}$ для главного члена напряжений и $v_i=w_i^{\bullet}$ для главного члена скорости. Тогда осредненную систему (2.10) можно записать в виде нелинейной системы первого порядка для «напряжений» p_{ij}, «скоростей» v_i и дополнительных функций φ_{ij}:

$$\partial p_{ij}/\partial x_j-\rho v_i^{\bullet}=0$$

$$\dot{p}_{ij}=\lambda\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\varphi_{kk}^{\bullet}+2\mu\varphi_{(ij)}^{\bullet} \tag{4.2}$$

$$\varphi_{ii}=0,\ p_{ii}<0 \tag{A}$$

$$|p_{ii}|\left(q_0\chi_{\delta_*}(\theta_i\varphi_{li}^{\bullet})+\eta_*\theta_i\varphi_{li}^{\bullet}+k_*\theta_i\varphi_{li}\right)+p_{il}=0\ \ (l\neq i)$$

$$\varphi_{li}|_{t=t_*}=\varphi_{li}^*$$

$$\varphi_{ii}\leqslant 0,\ p_{ii}=p_{il}=0\ \ (l\neq i) \tag{B}$$

Функции φ_{ki}, входящие в осредненные системы (2.10) или (4.2), имеют ясный физический смысл — это распределенные относительные скачки смещений $[u_k^{(1)}]$ на грани $x_i=\mathrm{const}$ (с точностью до коэффициента $-\theta_i$), что вытекает из формул для решения задачи на ячейке (2.7).

Отметим, что вывод осредненной системы уравнений (2.10) или (4.2) нетрудно обобщить на случай достаточно произвольной нелинейной зависимости коэффициентов k, η и q от нормального сжимающего напряжения на контактной границе $x_i=\mathrm{const}$ двух соседних блоков $\sigma_{ii}<0$: $k=k(|\sigma_{ii}|)$, $\eta=\eta(|\sigma_{ii}|)$, $q=q(|\sigma_{ii}|)$, удовлетворяющей условиям $k(0)=0$, $\eta(0)=0$, $q(0)=0$. Эти условия необходимо наложить для того, чтобы функция φ_{kl} была непрерывна при переходе с режима (A) на режим (B).

Автор выражает признательность Н. В. Зволинскому и А. Н. Ковшову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т. 221. № 3. С. 516–519.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
3. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
4. *Никитин И. С.* Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 80–86.

Москва

Поступила в редакцию 19.III.1987