

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО
КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

ФИЛИПОВА Л. М., ЧЕБАКОВ М. И.

Рассмотрена задача о внедрении симметрично расположенных штампов в торцы кругового цилиндра при наличии в цилиндре однородного поля начальных напряжений. Используется модель нелинейно-упругого изотропного несжимаемого материала. Задача приведена к парному ряду уравнений, решение которого сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей. Излагается метод решения этой системы. Для некоторых распространенных моделей резиноподобных материалов вычислены контактные напряжения и жесткость цилиндра в зависимости от степени предварительного бокового сжатия или растяжения, а также геометрических параметров цилиндра. Результаты могут быть использованы для выбора оптимальных размеров некоторых типов амортизаторов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим круговой цилиндр из нелинейно-упругого изотропного несжимаемого материала, равномерно сжатый или растянутый силами, приложенными к боковой поверхности. Торцы цилиндра свободны от нагрузки. На описанную однородную конечную деформацию накладывается малая деформация, обусловленная внедрением в торцы цилиндра двух симметрично расположенных круговых штампов. Будем считать, что трение между штампами и упругим телом отсутствует, а на боковой поверхности цилиндра заданы условия отсутствия касательных напряжений и нормальных перемещений. В силу предположений о малости добавочной деформации контактную задачу будем рассматривать в линеаризованной постановке. Линеаризованные уравнения равновесия для осесимметричной добавочной деформации несжимаемого тела имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right) + \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \\ \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ \partial u / \partial r + u / r + \partial w / \partial z = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\mu = 2\lambda_3 \Pi_3 + \lambda^2 \Pi_{11} + \lambda_3^2 \Pi_{33} - 2\lambda \lambda_3 \Pi_{13}$$

$$\nu = \lambda_3^2 \frac{\lambda_3 \Pi_3 - \lambda \Pi_1}{\lambda_3^2 - \lambda^2}, \quad \kappa = \lambda^2 \frac{\lambda_3 \Pi_3 - \lambda \Pi_1}{\lambda_3^2 - \lambda^2}$$

$$\Pi_s = \partial \Pi / \partial \lambda_s, \quad \Pi_{ks} = \partial^2 \Pi / \partial \lambda_k \partial \lambda_s \quad (k, s = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты в предварительно деформируемой среде, u, w — компоненты вектора перемещений соответственно в радиальном и вертикальном направлениях, q — добавочное нормальное напряжение в горизонтальных сечениях цилиндра, $\Pi = \Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — функция удельной потенциальной энергии деформации, определяющая упругие свойства материала. В рассматриваемом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda^{-2}$, где $(\lambda - 1)$ — относительное удлинение горизонтальных волокон в начальном деформируемом состоянии.

Для упругого материала, свойства которого задаются трехпараметрическим потенциалом [2], имеем (G, n, β — постоянные):

$$\begin{aligned}\Pi &= Gn^{-2}[(1+\beta)(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3) + (1-\beta)(\lambda_1^{-n} + \lambda_2^{-n} + \lambda_3^{-n} - 3)] \\ \mu &= Gn^{-1}\lambda^{-2n}[(1-\beta)\lambda^{-n} + 1 + \beta][n+1+(n-1)\lambda^{3n}] \\ \nu &= Gn^{-1}\lambda^{-2n}(1-\lambda^{3n})(1-\lambda^6)^{-1}[1+\beta+(1-\beta)\lambda^n] \\ \kappa &= Gn^{-1}\lambda^{-2n}(1-\lambda^{3n})(\lambda^{-6}-1)^{-1}[1+\beta+(1-\beta)\lambda^n]\end{aligned}$$

Частными случаями трехпараметрического потенциала является потенциал Муни [3] (C_1, C_2 — постоянные):

$$\begin{aligned}\Pi &= C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 - 3) \\ \mu &= 2\lambda^2(1+3\lambda^{-6})(C_1+C_2\lambda^2), \quad \nu = 2\lambda^{-4}(C_1+C_2\lambda^2) \\ \kappa &= 2\lambda^2(C_1+C_2\lambda^2), \quad 2(C_1+C_2) = G\end{aligned}\quad (1.3)$$

и потенциал Бартенева — Хазановича [3]

$$\begin{aligned}\Pi &= 2G(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \quad \mu = 4G\lambda^{-2} \\ \nu &= 2G/[\lambda^2(1+\lambda^3)], \quad \kappa = 2G\lambda^4/(1+\lambda^3)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь и далее G означает модуль сдвига материала при малых деформациях из ненапряженного состояния. При $C_2=0$ материал Муни называется неогуковским [3].

Подставленная контактная задача имеет следующие граничные условия:

$$\nu \partial u / \partial z + \kappa \partial w / \partial r = 0, \quad u = 0 \quad (r=b) \quad (1.5)$$

при $z = \pm h$:

$$\begin{aligned}w &= \pm[\delta - \varphi(r)] \quad (0 \leq r \leq a) \\ q &= 0 \quad (a < r < b) \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial r &= 0 \quad (0 \leq r < b)\end{aligned}\quad (1.6)$$

В (1.5), (1.6) $2h$ — толщина цилиндра, b — радиус цилиндра, a — радиус штампа, δ — смещение штампа, $\varphi(r)$ — функция, задающая форму штампа.

Решение краевой задачи (1.1), (1.5), (1.6) будем искать в виде разложений

$$\begin{aligned}u(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) J_1(k_n r), \quad w(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(z) J_0(k_n r), \\ q(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) J_0(k_n r)\end{aligned}\quad (1.7)$$

где $J_0(r)$, $J_1(r)$ — функции Бесселя. Если набор постоянных k_n подчинить условию $J_1(k_n b) = 0$, то граничные условия (1.5) на боковой поверхности цилиндра будут выполнены. Удовлетворяя при помощи (1.7) уравнениям (1.1) и крайевым условиям (1.6), приходим к парному ряду-уравнению с неизвестными B_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n K(k_n h) J_0(k_n r) = 2Gh^{-1}\Omega(\delta - \varphi(r)) \quad (r \leq a) \quad (1.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(k_n r) + B_0 = 0 \quad (a < r < b)$$

$$K(u) = \frac{(\beta - \alpha) \operatorname{sh} u \alpha \operatorname{sh} u \beta [\nu(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2) - \mu(1 - \alpha\beta)]}{u \Delta(u)} \quad (1.9)$$

$$\Delta(u) = \alpha(1+\beta^2)[\mu - \nu(1+\alpha^2)] \operatorname{sh} u\beta \operatorname{ch} u\alpha - \beta(1+\alpha^2)[\mu - \nu(1+\beta^2)] \operatorname{sh} u\alpha \operatorname{ch} u\beta \quad (1.10)$$

$$\Omega = \frac{\nu(1+\alpha^2)(1+\beta^2) - \mu(1-\alpha\beta)}{2G(\alpha+\beta)}, \quad \alpha = \omega_1, \quad \beta = \omega_2$$

где ω_1, ω_2 — положительные корни уравнения

$$\nu\omega^4 - (\mu - 2\nu)\omega^2 + \alpha = 0 \quad (1.11)$$

Функции в (1.7), образующие решение задачи, выражаются через постоянные B_n следующим образом:

$$\begin{aligned} W_n(z) &= B_n [A_n \operatorname{sh}(k_n \alpha z) + C_n \operatorname{sh}(k_n \beta z)] \\ U_n(z) &= -B_n [\alpha A_n \operatorname{ch}(k_n \alpha z) + \beta C_n \operatorname{ch}(k_n \beta z)] \\ Q_n(z) &= B_n k_n \{ \alpha A_n [\mu - \nu(1+\alpha^2)] \operatorname{ch}(k_n \alpha z) + \\ &\quad + \beta C_n [\mu - \nu(1+\beta^2)] \operatorname{ch}(k_n \beta z) \} \\ A_n &= (1+\beta^2) \operatorname{sh}(k_n \beta h) k_n^{-1} \Delta^{-1}(k_n h) \\ C_n &= -(1+\alpha^2) \operatorname{sh}(k_n \alpha h) k_n^{-1} \Delta^{-1}(k_n h) \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Решение парного ряда-уравнения. В (1.8) функция $K(u)$ является четной, мероморфной и может быть представлена в виде

$$K(u) = A \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{\delta_n^2} \right) \left(1 + \frac{u^2}{\gamma_n^2} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

$$A = \lim_{u \rightarrow 0} K(u) = G^{-1}(\alpha+\beta)^{-1} [\nu(1+\alpha^2)(1+\beta^2) - \mu(1-\alpha\beta)]$$

где $\pm i\delta_n, \pm i\gamma_n$ — счетное множество нулей и полюсов функции $K(u)$.

В этом случае для решения парного ряда (1.8) — (1.9) может быть использован метод [4, 5], позволяющий свести его к исследованию бесконечной системы линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей.

Предположим, что $\varphi(r) = 0$ (случай $\varphi(r) \neq 0$ рассматривается аналогично [4]), тогда неизвестные контактные напряжения под штампом найдем по формуле [5]

$$q(\rho a, h) = \frac{2G\Omega\delta}{aA\varepsilon} \left[\frac{a^2\varepsilon A}{\pi b^2} Q^* + 1 \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n I_0 \left(\frac{\delta_n \rho}{\varepsilon} \right) I_0^{-1} \left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \right) \right] \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (2.2)$$

а связь между силой P , приложенной к штампу, и перемещением штампа δ найдем из соотношения

$$P = 2G\delta\Omega a Q^*, \quad Q^* = P^* \left[1 - \frac{P^* A a^2 \varepsilon}{\pi b^2} \right]^{-1} \quad (2.3)$$

$$P^* = \frac{2\pi}{A} \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\delta_n} I_1 \left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \right) I_0^{-1} \left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \right) \right]$$

где $\varepsilon = h/a$, x_n — решение бесконечной системы

$$\begin{aligned} BX &= D \\ B &= \left\{ \frac{\gamma_m K_1(\gamma_m/\varepsilon) I_0(\delta_n/\varepsilon) + \delta_n I_1(\delta_n/\varepsilon) K_0(\gamma_m/\varepsilon)}{(\delta_n^2 - \gamma_m^2) K_0(\gamma_m/\varepsilon) I_0(\delta_n/\varepsilon)} - \right. \\ &\quad \left. - B_1 \left(\frac{b\gamma_m}{h} \right) \frac{\gamma_m I_1(\gamma_m/\varepsilon) I_0(\delta_n/\varepsilon) - \delta_n I_1(\delta_n/\varepsilon) I_0(\gamma_m/\varepsilon)}{(\delta_n^2 - \gamma_m^2) K_0(\gamma_m/\varepsilon) I_0(\delta_n/\varepsilon)} \right\} \end{aligned}$$

$$D = \left\{ \frac{K_1(\gamma_m/\varepsilon) - B_1(\gamma_m b/h) I_1(\gamma_m/\varepsilon)}{\gamma_m K_0(\gamma_m \varepsilon)} \right\} \quad (2.4)$$

$$B_1(x) = K_1(x) I_1^{-1}(x)$$

Здесь $B = \{b_{mn}\}$ — матрица, $D = \{\alpha_m\}$, $X = \{x_n\}$ — векторы бесконечного порядка, $K_n(x)$, $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Неизвестные коэффициенты B_n парного ряда уравнения (1.8) выражаются через решение x_n бесконечной системы (2.4) при помощи соотношения

$$B_n = 2b^{-2} J_0^{-2}(k_n b) \int_0^a q(r, h) J_0(k_n r) r dr$$

где $q(r, h)$ определяется через x_n формулой (2.2). Можно показать, что $|\gamma_m|$, $|\delta_m| \sim m$ ($\gamma_m \neq \delta_m$) при $m \rightarrow \infty$. Учитывая это и асимптотическое представление $K_n(x)$, $I_n(x)$ при больших x , регуляризуем систему (2.4). Она будет эквивалентна бесконечной системе второго рода

$$X = T^{-1} D - T^{-1} (B - T) X \quad (2.5)$$

где матрица $T = \{a_{mn}\}$ с элементами

$$a_{mn} = (\delta_n - \gamma_m)^{-1} \quad (2.6)$$

имеет обратную матрицу [5] $T^{-1} = \{\tau_{nm}\}$ с элементами

$$\tau_{nm} = \{ [K_-^{-1}(i\gamma_m)]' K_+(-i\delta_n) (\gamma_m - \delta_n) \}^{-1} \quad (2.7)$$

Здесь $K(u) = K_+(u) K_-(u)$ — результат факторизации функции $K(u)$ относительно действительной оси.

Отметим, что при определенных значениях параметров решение системы (2.5) может быть получено методом редукции [6].

Использование точной факторизации функции $K(u)$ связано со значительными трудностями, поэтому воспользуемся приближенной факторизацией, для чего на действительной оси $K(u)$ аппроксимируем функцией [7]

$$L(u) = \frac{\text{th } Au}{u} \prod_{i=1}^S \frac{(u^2 + p_i^2)}{(u^2 + q_i^2)} \quad (2.8)$$

при условии $\lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = A$. Можно проверить, что поведение функций $K(u)$ и $L(u)$ на бесконечности совпадает.

Нулями и полюсами функции $L(u)$ соответственно будут

$$\delta_n^* = \begin{cases} p_n & (n \leq S) \\ \alpha_n = \pi(n - S)/A & (n > S) \end{cases}, \quad \gamma_m^* = \begin{cases} q_m & (m \leq S) \\ \beta_m = \pi(m - S - 1/2)/A & (m > S) \end{cases} \quad (2.9)$$

Факторизуя $L(u)$ и заменяя в (2.7) $K_{\pm}(u)$ на $L_{\pm}(u)$, а δ_n, γ_m соответственно на δ_n^*, γ_m^* , найдем приближенно элементы матрицы T^{-1} :

$$\tau_{nm} = [\Gamma_m \Delta_n (\delta_n^* - \gamma_m^*)]^{-1}$$

$$\Delta_n = \frac{R_+(-ip_n)}{p_n - q_n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^S \frac{p_k - p_n}{q_k - p_n} \quad (n \leq S)$$

$$\Delta_n = \frac{2A \sqrt{A} (2n - 2S - 2)!!}{\pi (2n - 2S - 1)!!} \prod_{k=1}^S \frac{(p_k - \alpha_n)}{(q_k - \alpha_n)} \quad (n > S)$$

$$\Gamma_m = \frac{R_+^{-1}(-iq_m)}{p_m - q_m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^s \frac{q_k - q_m}{p_k - q_m} \quad (m \leq S) \quad (2.10)$$

$$\Gamma_m = \sqrt{A} \frac{(2m-2S-2)!!}{(2m-2S-3)!!} \prod_{k=1}^s \frac{q_k - \beta_m}{p_k - \beta_m} \quad (m > S)$$

$$R_+(-iu) = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{Au}{\pi}\right) \Gamma^{-1}\left(1 - \frac{Au}{\pi}\right)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. В дальнейшем при получении приближенного решения системы (2.5) необходимо в (2.2)–(2.4), (2.6), (2.7) δ_n, γ_m заменить соответственно на δ_n^*, γ_m^* .

Решение системы (2.5) будем получать на ЭВМ методом редукции по схеме [4, 5]:

$$x_n = \sum_{m=1}^N \tau_{nm} d_m + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=1}^N \tau_{nm} b_{mn} \right) x_k \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (2.11)$$

Значение N выбираем в зависимости от заданной точности. Как пока-

Таблица 1

λ	p_1	p_2	q_1	q_2	%	p_1	p_2	q_1	q_2	%
0,8	5,038	1,667	2,927	2,870	5,1	5,093	1,603	2,864	2,850	6,0
0,9	2,754	1,304	2,082	1,724	4,4	2,733	1,312	1,935	1,852	4,5
1,1	1,392	0,8786	1,135	1,077	2,3	1,468	0,9168	1,199	1,122	1,5
1,2	1,177	0,7763	0,9133	1,000	1,2	1,136	0,7344	0,8952	0,9320	1,7
1,3	1,124	0,7820	0,8695	1,011	0,78	1,116	0,7592	0,8343	1,016	1,6
1,4	1,100	0,8321	0,9118	1,004	0,48	0,8718	0,5913	0,6350	0,8118	1,2
1,5	1,061	0,7354	0,7626	1,024	0,34	0,8352	0,5297	0,5601	0,7898	

Таблица 2

λ	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
-----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$\varepsilon=0,3 \quad \beta=1,3$

$\sigma(0)$	22,59	18,69	16,97	16,52	17,09	18,40
$\sigma(0,5)$	22,28	18,54	16,91	16,49	17,09	18,43
$\sigma(0,95)$	24,85	23,60	23,37	24,14	25,85	28,41
Q	74,90	65,39	61,46	61,36	64,44	70,03

$\varepsilon=0,3 \quad \beta=1,5$

$\sigma(0)$	16,00	12,83	11,11	10,52	10,70	11,40
$\sigma(0,5)$	15,76	12,68	11,05	10,49	10,69	11,41
$\sigma(0,95)$	17,43	15,75	15,25	15,43	16,34	17,86
Q	52,80	44,59	40,16	39,09	40,48	43,64

$\varepsilon=0,5 \quad \beta=1,3$

$\sigma(0)$	14,44	12,86	12,25	12,30	12,93	14,09
$\sigma(0,5)$	14,29	12,87	12,32	12,44	13,13	14,34
$\sigma(0,95)$	19,35	19,81	20,39	21,49	23,17	25,59
Q	51,59	48,91	48,29	49,67	52,89	58,08

$\varepsilon=0,5 \quad \beta=1,5$

$\sigma(0)$	9,620	8,070	7,287	7,401	7,361	7,930
$\sigma(0,5)$	9,485	8,011	7,330	7,192	7,493	8,108
$\sigma(0,95)$	12,71	12,40	12,53	13,05	14,05	15,48
Q	34,07	30,88	29,16	29,39	31,10	33,94

Таблица 3

λ	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\varepsilon=0,3 \quad \beta=1,3$						
$\sigma(0)$	23,33	16,40	15,36	15,33	15,84	16,79
$\sigma(0,5)$	23,01	16,33	15,35	15,33	15,87	16,83
$\sigma(0,95)$	25,66	22,57	22,49	23,18	24,50	26,29
Q	77,37	59,37	57,11	57,77	60,34	64,29
$\varepsilon=0,3 \quad \beta=1,5$						
$\sigma(0)$	16,53	10,73	9,781	9,610	9,797	10,32
$\sigma(0,5)$	16,28	10,67	9,758	9,602	9,810	10,35
$\sigma(0,95)$	18,00	14,73	14,38	14,67	15,38	16,46
Q	54,54	38,77	36,39	36,36	37,54	39,87
$\varepsilon=0,5 \quad \beta=1,3$						
$\sigma(0)$	14,92	11,83	11,45	11,62	12,12	12,95
$\sigma(0,5)$	14,76	11,90	11,58	11,79	12,34	13,22
$\sigma(0,95)$	19,98	19,69	20,00	20,81	22,03	23,74
Q	53,28	46,63	46,22	47,54	49,97	53,68
$\varepsilon=0,5 \quad \beta=1,5$						
$\sigma(0)$	9,933	7,040	6,619	6,409	6,841	7,252
$\sigma(0,5)$	9,790	7,080	6,706	6,505	6,992	7,434
$\sigma(0,95)$	13,12	12,10	12,17	11,48	13,35	14,34
Q	35,15	28,16	27,43	26,22	29,28	31,25

Таблица 4

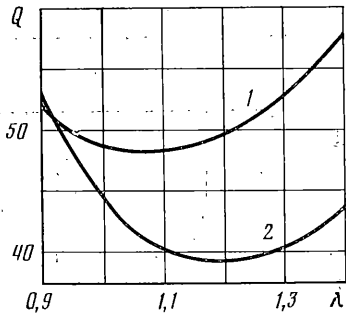
λ	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\varepsilon=0,3 \quad \beta=1,3$						
$\sigma(0)$	21,39	16,70	14,99	13,84	12,76	11,81
$\sigma(0,5)$	21,09	16,62	14,98	13,86	12,83	11,93
$\sigma(0,95)$	23,55	23,05	22,39	21,80	21,15	20,39
Q	70,93	60,52	56,19	53,10	50,18	47,38
$\varepsilon=0,3 \quad \beta=1,5$						
$\sigma(0)$	15,15	10,92	9,458	8,498	7,612	6,887
$\sigma(0,5)$	14,92	10,85	9,435	8,502	7,655	6,962
$\sigma(0,95)$	16,51	15,01	14,21	13,61	13,02	12,45
Q	50,00	39,46	35,51	32,84	30,37	28,27
$\varepsilon=0,5 \quad \beta=1,3$						
$\sigma(0)$	13,67	12,05	11,29	10,69	10,11	9,557
$\sigma(0,5)$	13,52	12,11	11,45	10,91	10,39	9,893
$\sigma(0,95)$	18,37	20,14	20,08	19,74	19,23	18,61
Q	48,84	47,56	46,04	44,43	42,72	40,90
$\varepsilon=0,5 \quad \beta=1,5$						
$\sigma(0)$	9,059	7,157	6,448	5,966	5,525	5,148
$\sigma(0,5)$	8,921	7,195	6,551	6,116	5,728	5,392
$\sigma(0,95)$	12,01	12,362	12,15	11,92	11,62	11,27
Q	32,09	28,70	27,07	25,87	24,66	23,53

зывают числовые расчеты, с увеличением параметра $(b-a)/h$ заданная точность достигается при меньшем числе уравнений системы (2.11).

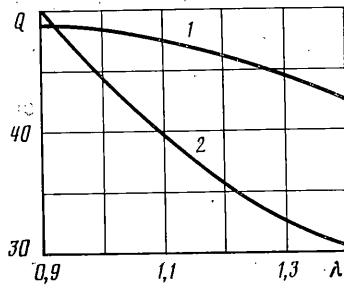
3. Числовые примеры. Рассмотрим материал Муни (1.3). В этом случае функция $K(u)$ и постоянная Ω парного ряда (1.8) будут иметь вид

$$K(u) = \frac{\text{sh } u \text{ sh } u \lambda^3 [\lambda^{-3} (\lambda^6 + 1)^2 - 4]}{u [(\lambda^9 + 2\lambda^3 + \lambda^{-3}) \text{ch } u \text{ sh } u \lambda^3 - 4 \text{ sh } u \text{ ch } u \lambda^3]} \quad (3.1)$$

$$\Omega = \frac{(1 + \lambda^2 C_2 / C_1) [\lambda^{-3} (\lambda^6 + 1)^2 - 4]}{2(1 + C_2 / C_1) \lambda (\lambda^6 - 1)} \quad (3.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для проведения расчетов потребуется величина

$$A = \lim_{u \rightarrow 0} K(u) = \frac{(\lambda^6 + 1)^2 - 4\lambda^3}{(\lambda^6 + 1)^2 - 4} \quad (3.3)$$

и значения параметров p_i, q_i аппроксимирующей функции $L(u)$, заданной выражением (2.8). В случае неогукковского материала формулы (3.1)–(3.3) сохраняют свой вид, если в (3.2) положить $C_2=0$. Аналогичными будут и параметры p_i, q_i .

Для материала Бартењева – Хазановича на основании (1.4) получим

$$K(u) = \frac{(3\lambda^3 - 1) \operatorname{sh}^2(u\lambda^{3/2})}{u [(3\lambda^3 - 1) \operatorname{sh}(u\lambda^{3/2}) \operatorname{ch}(u\lambda^{3/2}) + u\lambda^{3/2}(1 + \lambda^3)]} \quad (3.4)$$

$$\Omega = (3\lambda^3 - 1)/2\lambda^{3/2}, \quad A = (3\lambda^3 - 1)/4\lambda^{3/2}$$

В табл. 1 приведены значения параметров p_i, q_i ($i=1, 2$) при $S=2$ для материала Муни (колонки 2–5) и Бартењева – Хазановича (колонки 7–10) в зависимости от параметра предварительного напряжения λ . Там же в шестой и одиннадцатой колонках приведено значение максимальной относительной погрешности аппроксимации в процентах.

Для нахождения числовых значений контактных напряжений (2.2) и действующей на штамп силы P (2.3) была составлена программа для ЭВМ. Вычислялись безразмерные величины

$$\sigma(\rho) = aq(\rho a, h)/(2G\delta), \quad Q = P/(2G\delta a) \quad (3.5)$$

при этом в рядах (2.2), (2.3) удерживалось N членов. При уменьшении параметра $(b-a)/h$ для достижения заданной точности N увеличивалось. В приводимых расчетах в наиболее неблагоприятных случаях $N=40$. Числовые результаты контролировались путем сравнения их при различных значениях N . Погрешность для контактных напряжений наибольшая при приближении к краю штампа при фиксированном N , но с увеличением N может быть достигнута любая заданная наперед точность. Исключение составляет точка $r=a$, где напряжения обращаются в бесконечность.

В табл. 2 для материала Муни приведены значения величин $\sigma(\rho)$ и Q , вычисляемых по формулам (3.5), при различных значениях параметров $\rho, \epsilon, \beta=b/a, \lambda$. При этом полагалось $C_2/C_1=1/5$.

Как показали многочисленные расчеты, результаты которых частично приведены в табл. 2, жесткость системы штамп – цилиндр с увеличением λ убывает до некоторого минимального значения, а затем возрастает. При этом с увеличением высоты цилиндра при неизменном его радиусе значение λ , при котором система имеет минимальную жесткость, смещается в сторону меньших значений. Например, для материала Муни ($C_2/C_1=1/5$) при $\epsilon=0,1, \beta=1,3$ минимум достигается при $\lambda \approx 1,3$, а при $\epsilon=0,3, \beta=1,3$ – при $\lambda \approx 1,15$.

В табл. 3 приведены значения величин $\sigma(\rho)$ и Q для неогукковского материала. Здесь поведение жесткости системы в зависимости от λ такое же, что и в предыдущем случае.

Для материала Бартењева – Хазановича значение величин $\sigma(\rho)$ и Q при различных значениях $\beta, \epsilon, \rho, \lambda$ приведено в табл. 4. Здесь наблюдается совершенно иная по сравнению с материалом Муни зависимость жесткости системы от параметра λ , а именно: с увеличением λ жесткость системы монотонно убывает.

На фиг. 1, 2 для наглядности приведены зависимости жесткости системы штамп – цилиндр, выражаемой величиной Q , от параметра предварительного напряжения λ соответственно для материала Муни ($C_2/C_1=1/5$) и материала Бартењева – Хазановича при $\epsilon=0,5, \beta=1,3$ (кривая 1) и $\epsilon=0,3, \beta=1,5$ (кривая 2).

Отметим также, что для рассмотренных материалов при стремлении радиуса цилиндра к радиусу штампа жесткость неограниченно возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппова Л. М. О влиянии начальных напряжений на раскрытие круговой трещины // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 286—290.
2. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение. 1986. 336 с.
3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
4. Александров В. М., Чебаков М. И. Метод парных рядов по функциям Бесселя в смешанных задачах теории упругости для круглой плиты // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 486—492.
5. Чебаков М. И. Контактная задача теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // Механика сплошной среды. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та. 1981. С. 134—139.
6. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 732—741.
7. Бабешко В. А., Гарагуля В. А. Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане, на упругий слой // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 76—79.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
17.VII.1986