МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1988

УДК 531.36

МИНИМАКСНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОЗИЦИОННОЙ КОРРЕКЦИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

МАТАСОВ А. И., МАРТИРОСЯН С. Р.

Для решения задачи позиционной коррекции инерциальной навигационной системы применяются методы теории минимаксного (гарантированного) оценивания.

1. Рассмотрим объект, на борту которого установлена инерциальная навигационная система. Коррекция инерциальной навигационной системы с помощью дополнительной информации различной природы является основным источником повышения точности ее функционирования. Детальное исследование задачи коррекции проведено в [1]. При движении объекта с крейсерской скоростью по траекториям, близким к ортодромиям, уравнения ошибок разделяются на две независимые группы, описывающие ошибки вдоль направления движения объекта и в поперечном направлении. В связи с этим говорят о продольном и боковом каналах уравнений ошибок.

Одним из распространенных типов дополнительной информации является информация о местоположении объекта, называемая позиционной. Эта информация доставляется, например, с помощью радиомаяков, спутниковых навигационных систем.

Рассмотрим позиционную коррекцию инерциальной навигационной системы. Исследуем сначала продольный канал уравнений ошибок инерциальной навигационной системы, описываемый на интервалах времени, в течение которых производится коррекция, уравнениями [1]:

$$\gamma^{\cdot}=\mu,\quad \varphi^{\cdot}=\mu-\vartheta,\quad \mu^{\cdot}=-\varphi,\quad \vartheta^{\cdot}=0 \tag{1.1}$$

Здесь точкой сверху обозначается дифференцирование по безразмерному времени $\tau=\omega_0 t$; ω_0 — частота Шулера: $\omega_0^2=g/a$, g — гравитационное ускорение, a — радиус Земли; t — размерное время; γ — угловая ошибка определения местоположения в продольном направлении, $\varphi=\alpha+\varepsilon$, α — угловая ошибка приборной вертикали, ε — постоянная приведенная погрешность продольного ньютонометра; $\mu=\Delta V/a\omega_0$; ΔV — ошибка определения скорости в продольном направлении; $\vartheta=\nu/\omega_0$, ν — постоянный дрейф гироплатформы в продольном направлении.

Сторонняя позиционная информация, дополняющая уравнения (1.1), имеет вид

$$z(\tau)=\gamma(\tau)+w(\tau),\quad \tau\in[0,\ T] \tag{1.2}$$

где $z(\tau)$ — непосредственно измеряемая величина, $w(\tau)$ — помеха измерения.

Задача позиционной коррекции состоит в построении оценок значений фазовых переменных системы (1.1) в момент времени T по информации (1.2). Будем считать $T\leqslant\pi/2$; реальные интервалы коррекции удовлетворяют этому условию (в размерном времени $\pi/2$ соответствует приблизительно 20 мин).

Обычно предполагается, что $w(\tau)$ — случайный процесс, в том или ином смысле близкий к процессу типа белого шума. Это существенное предположение приводит к оптимальным алгоритмам оценивания типа метода наименьших квадратов или фильтра Калмана [1, 2]. Однако указанная гипотеза далеко не всегда имеет достаточное обоснование. Поэтому представляет практический интерес рассмотрение неопределенной ситуации [3—5].

Будем считать, что о корреляционной функции помехи измерения никакой информации нет, т. е. помеха измерения является произвольно коррелированным процессом с ограниченной дисперсией: $\mathbf{M}w(\tau)=0$, $\mathbf{M}w(\tau)w(s)=\sigma(\tau)\sigma(s)K(\tau, s)$, где $\mathbf{M}w^2(\tau)=\sigma^2(\tau)\leqslant\sigma^2$, σ — известная постоянная величина.

Для того чтобы последующие выкладки имели строгий смысл, предположим, что $K(\tau, s)$ — интегрируемая функция [6]. Обозначим класс всех интегрируемых корреляционных функций $\mathbf{K}$.

2. Будем строить линейные несмещенные оценки фазовых переменных системы (1.1) в конечный момент времени T по измерениям (1.2). Перейдем к новым обозначениям. Соотношение (1.2) представим в виде (знак T обозначает транспонирование):

$$z(\tau)=\mathbf{H}'^T\mathbf{q}+w(\tau),\quad \mathbf{H}'(\tau)=\exp\{\mathbf{A}^T(\tau-T)\}\mathbf{h}_1$$

$$\mathbf{h}_1=\|1, 0, 0, 0\|^T,\quad \mathbf{q}=\|\gamma(T), \varphi(T), \mu(T), \vartheta(T)\|^T$$

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Пусть вектор $\mathbf{P}'=\|0, \dots, 0,1, 0, \dots, 0\|^T$ определяет выбранную для оценки компоненту вектора $\mathbf{q}$ с помощью соотношения $J=\mathbf{P}'^T\mathbf{q}$. Линейная оценка строится в виде

$$J^*=\int_0^T z(\tau)x(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

Функция $x(\tau)$ определяет алгоритм оценивания. Будем выбирать $x(\tau)$ из объединения множества кусочно-непрерывных на $[0, T]$ функций и множества импульсных функций с конечным числом импульсов:

$$x^u(\tau)=\Sigma_{i=1}^m x_i\delta(\tau-\tau_i).$$

Обозначим это множество X. Импульсные функции используются для того, чтобы, сохраняя единообразие в выкладках, учесть линейные оценки J, построенные по конечному числу измерений: $\int_0^T x^u z d\tau=\Sigma_1^m x_i z(\tau_i)$.

Требование несмещенности оценки, т. е. равенства нулю ошибки оценки в отсутствие помех, приводит к условию [3—5]:

$$\int_0^T \mathbf{H}'(\tau)x(\tau)\,d\tau=\mathbf{P}' \tag{2.2}$$

Гарантированное значение дисперсии ошибки оценки $D=\max \mathbf{M}\Delta J^2=$ $=\sigma^2(\int_0^T|x(\tau)|d\tau)^2$, где максимум берется на множестве функций $\sigma(\tau)\leqslant\sigma$, $K(\tau, s)\in\mathbf{K}$. Оно достигается при $\sigma(\tau)=\sigma$, $K(\tau, s)=\operatorname{sgn} x(\tau)\operatorname{sgn} x(s)$, где $\operatorname{sgn} x$ — знак x; формально полагаем $\operatorname{sgn}\delta(\tau)=1$. Нетрудно убедиться, что $\operatorname{sgn} x(\tau)\operatorname{sgn} x(s)\in\mathbf{K}$.

Среди всех алгоритмов оценивания $x(\tau)$ найдем такой, при котором величина D минимальна. Положим $D_0=\min_{x\in X} D$.

Тогда задача построения оптимального алгоритма оценивания в случае произвольно коррелированной помехи измерения сводится к следующей задаче математического программирования [3, 4]:

$$\int_0^T|x(\tau)|\,d\tau\to\min \tag{2.3}$$

$$\int_0^T \mathbf{H}(\tau)x(\tau)\,d\tau=\mathbf{P} \tag{2.4}$$

в которой $\mathbf{H}(\tau)=\mathbf{H}'(\tau)$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}'$; вектор $\mathbf{P}$ называется целевым вектором. Ее решение $x^0(\tau)$ определяет оптимальный гарантированный алгоритм оценивания. Рассмотренную задачу принято называть задачей о наихудшей корреляции.

Гарантирующий подход при решении механических задач применен в [7]. Задача о наихудшей корреляции впервые поставлена и сведена к задаче линейного программирования в [3]. Различные стороны гарантирующего подхода рассматривались в [5, 8—10].

В дальнейшем для обозначения величины безразмерного времени наряду с τ будет использоваться буква t.

3. Сведем задачу (2.3), (2.4) к задаче нахождения обобщенного чебышевского полинома, которая будет решена аналитически. Для этого сформулируем некоторые результаты теории задач математического программирования указанного вида [11, 12]. Для удобства рассмотрим общий случай задачи (2.3), (2.4) произвольной размерности.

Замечание 3.1. Можно считать, что $\mathbf{P}=\|1, 0, \ldots 0\|^T$, иначе нужно поменять местами две соответствующие компоненты вектора $\mathbf{H}(t)$.

Сформулируем двойственную к (2.3), (2.4) задачу: на множестве векторов $\mathbf{Y}\in\mathbf{R}^k$ найти вектор, максимизирующий функционал

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{P}\to\max_{\mathbf{Y}} \tag{3.1}$$

при условии

$$|\mathbf{Y}^T\mathbf{H}(t)|\leqslant 1, \quad t\in[0, T] \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ — заданные векторы из $\mathbf{R}^k$. Пусть $\mathbf{Y}^0$ — решение задачи (3.1), (3.2), а $t_1, \ldots, t_l$, $l\leqslant k$ — такие моменты времени, в которые $|\mathbf{Y}^{0T}\mathbf{H}(t_j)|=1$ $(j=1, \ldots, l)$.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{N}\mathbf{x}=\mathbf{P} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{N}=\|\mathbf{H}(t_1), \ldots, \mathbf{H}(t_l)\|, \quad \mathbf{x}=\|x_1, \ldots, x_l\|^T\in R^l$$

$\mathbf{N}$ — прямоугольная матрица порядка $k\times l$.

Справедливы утверждения [11]: система (3.3) совместна; $x^0=\sum_{j=1}^{l} x_j\delta(t-t_j)$ — решение задачи математического программирования (2.3), (2.4); $\int_0^T|x^0(t)|dt=\mathbf{Y}^{0T}\mathbf{P}$, т. е. оптимальные значения функционалов обеих задач совпадают.

Таким образом, решив двойственную задачу, получим решение исходной задачи (2.3), (2.4).

Сведем двойственную задачу к задаче построения обобщенного чебышевского полинома:

$$L=\min_{z_j}\max_t|H_1(t)+\textstyle\sum_{j=2}^{k} z_jH_j(t)| \qquad (j=2, \ldots, k;\ t\in[0, T]) \tag{3.4}$$

Можно показать [11, 12], что если решение двойственной задачи (3.1), (3.2) $\mathbf{Y}^0=\|y_1^0, \ldots, y_k^0\|^T$ существует, то существует решение задачи (3.4), достигающееся на наборе $\{z_j^0\}$ $(j=2, \ldots, k)$; при этом $L>0$ и

$$y_1^0=L^{-1}, \quad y_j^0=L^{-1}z_j^0 \quad (j=2, \ldots, k) \tag{3.5}$$

Справедливо и обратное утверждение: если решение задачи (3.4) достигается на наборе $\{z_j^0\}$ $(j=2, \ldots, k)$ и $L>0$, то существует решение двойственной задачи (3.1), (3.2) и выполняется (3.5).

Итак, для решения задачи математического программирования (2.3), (2.4) можно предложить следующий алгоритм, удобный (при небольших значениях k) для аналитического исследования.

1. С помощью перестановки элементов вектора $\mathbf{H}(t)$ исходная задача сводится к задаче с $\mathbf{P}=\|1, 0, \ldots, 0\|^T$.

2. Строится обобщенный чебышевский полином (3.4); пусть в моменты времени $t_1, \ldots, t_l$ значения обобщенного полинома равны $\pm L$, т. е. полином принимает наибольшие по модулю значения.

3. Решается система алгебраических уравнений (3.3); пусть $\mathbf{x}=\|x_1, \ldots, x_l\|^T$ — решение (3.3); для определенности полагаем, что $l\leqslant k$ (в рассматриваемой задаче коррекции это условие, как будет показано ниже, выполняется: $l=k$).

4. Строится решение исходной задачи (2.3), (2.4) в виде

$$x^0(t)=\Sigma_{j=1}^{l}x_j\delta(t-t_j)$$

и определяется минимальное значение функционала $\int_0^T|x^0|dt=\Sigma_{j=1}^{l}|x_j|$; отметим, что $\int_0^T|x^0(t)|dt=\mathbf{Y}^{0T}\mathbf{P}=L^{-1}$.

Отсюда следует, что решение задачи (2.3), (2.4) достигается на импульсных функциях с числом импульсов $l\leqslant k$, т. е. оптимальный алгоритм обработки использует лишь l измерений из всех имеющихся на отрезке $[0, T]$. Моменты времени $t_1, \ldots, t_l$ называются оптимальными моментами измерений.

4. Сформулируем и докажем лемму, используемую ниже при построении решения (2.3), (2.4) в аналитической форме.

Рассмотрим обобщенный полином $S(t)=H_1(t)+\Sigma_{j=2}^{k}z_jH_j(t)$, в котором $z_j\in\mathbf{R}^1$ $(j=2, \ldots, k)$; $H_i(t)\in\mathbf{R}^1$ $(i=1, \ldots, k)$ — дифференцируемые на $[0, T]$ функции.

Лемма. Пусть $z_j^0\in R^1$ таковы, что

$$S^0(t)=H_1(t)+\Sigma z_j^0H_j(t)$$

удовлетворяет условиям

$$S^0(0)=-S^0(t_1)=\ldots=(-1)^sS^0(t_s)=\ldots=(-1)^{k-1}S^0(T) \qquad (4.1)$$
$$(0<t_1<\ldots<t_{k-2}<T)$$

$$dS^0(t)/dt|_{t_i}=0, \qquad dS^0(t)/dt\neq0, \qquad t\neq t_i \qquad (i=1,\ldots,k-2) \qquad (4.2)$$

Пусть, кроме того, уравнение

$$\Sigma_{j=2}^{k}\delta z_jH_j(t)=0 \qquad (4.3)$$

для любых δz_j, таких, что $\Sigma_{j=2}^{k}\delta z_j^2\neq0$, имеет не более $(k-2)$ корней внутри отрезка $[0, T]$. Тогда $S^0(t)$ — обобщенный чебышевский полином.

Доказательство. Ясно, что при выполнении условий (4.1), (4.2) $\{0, t_1, \ldots, t_{k-2}, T\}$ являются единственными точками максимума или минимума функции $S^0(t)$ на $[0, T]$. Допустим, что функция $S(t)$ обладает меньшим чем $S^0(t)$ уклонением от нуля. Так как $S(t)$ непрерывна на $[0, T]$, то ее значения лежат в полосе $[-\zeta, \zeta]$, $0<\zeta<|S^0(0)|-\eta$, $\eta>0$, иначе $\max|S(t)|=\max|S^0(t)|$. При этом, очевидно, существуют моменты времени

$$t_1'<t_1''<t_1<t_2'<t_2''<t_2<\ldots<t_{k-2}'<t_{k-2}''<t_{k-2}<t_{k-1}'<t_{k-1}''$$

такие, что $S^0(t_i')=-S^0(t_i'')$, $|S^0(t_i')|=|S^0(t_i'')|=\zeta$. Следовательно, график функции $S(t)$ должен не менее $k-1$ раз пересечь кривую $S^0(t)$ внутри отрезка $[0, T]$, что противоречит условию леммы о количестве нулей уравнения (4.3). Лемма доказана.

Лемма позволяет находить обобщенный чебышевский полином, лишь установив существование полинома с нужными свойствами, и имеет тесную связь с теоремой об альтернансе в теории равномерного приближения функций полиномами [13].

Следствие. Пусть выполнены условия леммы, $z_s^0\neq0$ и уравнение $\Sigma_{j=1,\, j\neq s}^{k}\delta z_jH_j(t)=0$ для любых δz_j, таких, что $\Sigma_{j=1,j\neq s}^{k}\delta z_j^2\neq0$, имеет внутри отрезка $[0, T]$ не более $(k-2)$ корней.

Тогда среди обобщенных полиномов

$$U(t)=H_s(t)+\Sigma_{j=1}^{s-1}u_jH_j(t)+u_sH_1(t)+\Sigma_{j=s+1}^{k}u_jH_j(t) \qquad (4.4)$$

полином $U^0(t)=U(t)|_{u_j=u_j^0}$, где $u_j^0=z_j^0/z_s^0$ $(j=2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k)$, $u_s^0=1/z_s^0$, наименее уклоняется от нуля и

$$\max|U^0(t)|=|z_s^0|^{-1}\max|S^0(t)| \qquad (4.5)$$

Согласно замечанию 3.1, решение задачи (2.3), (2.4) для $P=\|0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0\|^T$ (где на s-м месте стоит единица) сводится к нахождению среди обобщенных полиномов вида (4.4) наименее уклоняющихся от нуля. Поэтому, если $S^0(t)$, соответствующий $P=\|1, 0, \ldots, 0\|^T$, удовлетворяет условиям леммы и ее следствиям, то оптимальные моменты измерений, найденные для задачи с $P=\|1, 0, \ldots, 0\|^T$, являются оптимальными и для задачи с $P=\|0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\|^T$.

5. Рассмотрим вопрос о единственности оптимальных алгоритмов. Справедлива следующая

Лемма. Пусть $\mathbf{Y}^0$ — решение двойственной задачи (3.1), (3.2) — таково, что

$$|\mathbf{H}^T(t)\mathbf{Y}^0|<1,\ t\neq t_j,\quad |\mathbf{H}^T(t_j)\mathbf{Y}^0|=1\quad (j=1, \ldots, l) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{H}(t);\quad \mathbf{P}\in\mathbf{R}^k,\quad \mathbf{P}\neq\mathbf{0}$$

Тогда решение задачи (2.3), (2.4) достигается лишь на импульсных функциях, сосредоточенных в точках t_j $(j=1, \ldots, l)$.

Доказательство. Согласно п. 3, функция $x^0(t)=\Sigma_{j=1}^{l}x_j^0\delta(t-t_j)$, где $\Sigma_{j=1}^{l}\mathbf{H}(t_j)x_j^0=\mathbf{P}$, является решением задачи (2.3), (2.4) и

$$\int_0^T |x^0(t)|\,dt=\mathbf{Y}^{0T}\mathbf{P} \tag{5.2}$$

Пусть $x(t)$ — допустимое решение (2.3), (2.4), т. е. $x(t)\in X$ (см. п. 2) и

$$\int_0^T \mathbf{H}(t)\,x(t)\,dt=\mathbf{P} \tag{5.3}$$

Из (5.3) получаем, что

$$\mathbf{Y}^{0T}\mathbf{P}=\int_0^T \mathbf{H}^T(t)\mathbf{Y}^0x(t)\,dt \tag{5.4}$$

Возможны два варианта: $x(t)$ — интегрируемая на $[0, T]$ функция; $x(t)$ — импульсная функция с импульсами, сосредоточенными в точках $\{t_i'\}$:

$$x(t)=\Sigma_{i=1}^{m}x_i\delta(t-t_i'),\quad x_i\neq0\quad (i=1,\ldots, m)$$

Сначала рассмотрим первый вариант. Из условий (5.1) следует, что на множестве $M=[0, T]\setminus\{t_1\cup\ldots\cup t_l\}$:

$$|\mathbf{H}^T(t)\mathbf{Y}^0|<1$$

Введем множество $V=\{t: x(t)\neq0\}$. Ясно, что V — множество ненулевой меры, иначе из условий несмещенности (5.3) вытекало бы, что $\mathbf{P}=\mathbf{0}$. Тогда из (5.2), (5.4) имеем

$$\int_0^T |x^0(t)|\,dt=\int_{M\cap V} \mathbf{H}^T(t)\mathbf{Y}^0x(t)\,dt\leqslant\int_{M\cap V} |\mathbf{H}^T(t)\mathbf{Y}^0|\,|x(t)|\,dt<\int_0^T |x(t)|\,dt$$

а следовательно, $x(t)$ — неоптимальная функция. Второй вариант рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что если $l\leqslant k$ и $\operatorname{rank}\mathbf{N}=l$, $\mathbf{N}=\|\mathbf{H}(t_1), \ldots, \mathbf{H}(t_l)\|$, то решение (2.3), (2.4) единственно.

6. Перейдем к непосредственному решению задачи (2.3), (2.4) для различных $\mathbf{P}=\mathbf{P}'$, $k=4$. Нетрудно подсчитать, что $\mathbf{H}'(t)=\|1, \cos(T-t)-1, -\sin(T-t), \sin(T-t)-(T-t)\|^T$. Сначала рассмотрим задачу (2.3), (2.4) с $\mathbf{P}=\mathbf{P}'=\|0, 1, 0, 0\|^T$, соответствующую оцениванию $\varphi(T)$. Согласно замечанию 3.1, эта задача эквивалентна задаче (2.3), (2.4) с $\mathbf{P}=\|1, 0, 0, 0\|^T$,

$$\mathbf{H}(t)=\|H_1(t), H_2(t), H_3(t), H_4(t)\|^T= \tag{6.1}$$
$$=\|\cos(T-t)-1, 1, -\sin(T-t), \sin(T-t)-(T-t)\|^T$$

и, согласно п. 3, сводится к нахождению обобщенного чебышевского полинома:

$$L=\min_{z_j}\max_t|S(t)|,\quad S(t)=H_1(t)+\Sigma z_jH_j(t)\quad (j=2,3,4;\ t\in[0,T]) \tag{6.2}$$

Представим обобщенный полином $S(t)$ в виде $S(t)=F(t)+c$, $F(t)=f(t)-\chi(t)$, $f(t)=\cos(T-t)+y\sin(T-t)$, $\chi(t)=v(T-t)+1$, $y,v\in R^1$, $z_2=c$, $z_3=v-y$, $z_4=v$.

Произведя геометрические построения с графиками функций f и χ, можно обнаружить, что при некоторых $y=y^0$, $v=v^0$, t_1^0, t_2^0:

$$\begin{gathered}F(T)=0,\quad F(t_1^0)=0,\quad F(t_2^0)=F(0)\\ dF/dt|_{t_1^0}=dF/dt|_{t_2^0}=0\quad (0<t_1^0<t_2^0<T)\\ dF/dt\neq 0,\ \text{если}\ t\neq t_1^0,\ t\neq t_2^0;\quad t_1^0+t_2^0=T\end{gathered} \tag{6.3}$$

Тогда для того, чтобы удовлетворить условиям (4.1), (4.2) леммы п. 4, достаточно положить $c=c^0=-{}^1/{}_2F(0)$. Условие о количестве нулей уравнения (4.3), как легко показать, выполняется при $T\leqslant\pi/2$.

Из (6.3) следует, что

$$\begin{gathered}y^0=\mathrm{ctg}(T/2),\quad v^0=-\sin(T-\varkappa)+y^0\cos(T-\varkappa)\\ t_1^0=\varkappa,\quad t_2^0=T-\varkappa\end{gathered} \tag{6.4}$$

где $\varkappa$ — решение уравнения

$$\sin(\varkappa-T/2)+(T-\varkappa)\cos(\varkappa-T/2)-\sin(T/2)=0\quad \varkappa\in(0,T/2) \tag{6.5}$$

Можно показать, что решение (6.5) существует и единственно.

Непосредственной подстановкой v^0, y^0, t_1^0, t_2^0 из (6.4) в (6.3) с учетом (6.5) нетрудно убедиться, что соотношения (6.3) выполняются. Следовательно, обобщенный полином $S(t)$ при

$$\begin{gathered}z_2=z_2^0=c^0=[2\sin(T/2)-T\cos(\varkappa-T/2)]/(2\sin(T/2))\\ z_3=z_3^0=v^0-y^0=[\cos(T/2)-\cos(\varkappa-T/2)]/\sin(T/2)\\ z_4=z_4^0=v^0=-\cos(\varkappa-T/2)/\sin(T/2)\end{gathered} \tag{6.6}$$

является чебышевским, т. е. наименее уклоняется от нуля. При этом свое максимальное по модулю значение $L=L_1=|c^0|=-c^0$ он принимает в точках 0, $\varkappa$, $T-\varkappa$, T — оптимальных моментах измерений. Согласно (3.5):

$$\mathbf{Y}^0=\mathbf{Y}_1^0=L^{-1}\|1,\ z_2^0,\ z_3^0,\ z_4^0\|^T \tag{6.7}$$

Весовые коэффициенты алгоритма оценивания подсчитываются из условий несмещенности (3.3), в которых $l=k=4$, $t_1=0$, $t_2=\varkappa$, $t_3=T-\varkappa$, $t_4=T$, а $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ задаются соотношениями (6.1).

Таким образом, задача (2.3), (2.4) при $\mathbf{H}=\mathbf{H}'$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}'=\|0,1,0,0\|^T$ решена.

Согласно замечанию 3.1, решение задачи (2.3), (2.4) для трех оставшихся случаев $\mathbf{H}=\mathbf{H}'$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}'=\|1,0,0,0\|^T$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}'=\|0,0,1,0\|^T$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}'=\|0,0,0,1\|^T$ эквивалентно решению задачи (2.3), (2.4) для случаев, в которых $\mathbf{H}$ задается соотношением (6.1), а целевые векторы определяются выражениями $\mathbf{P}=\|0,1,0,0\|^T$, $\mathbf{P}=\|0,0,1,0\|^T$, $\mathbf{P}=\|0,0,0,1\|^T$. Эти случаи соответствуют оцениванию параметров $q_1=\gamma(T)$, $q_3=\mu(T)$, $q_4=\vartheta(T)$.

Для их решения воспользуемся следствием леммы п. 4 и последующим замечанием к нему. При этом z_s^0; $s=2, 3, 4$ определяются формулами (6.6), а $\mathbf{H}(t)$ — (6.1).

Нетрудно проверить, что во всех трех случаях условия следствия леммы п. 4 выполняются. Таким образом, оптимальные моменты измерений при оценивании всех компонент вектора $\mathbf{q}$ определяются равенствами $t_1=0$, $t_2=\varkappa$, $t_3=T-\varkappa$, $t_4=T$, где $\varkappa$ задается уравнением (6.5).

Значения максимальных уклонений соответствующих обобщенных чебышевских полиномов вычисляются по формуле (4.5):

$$L_s=|z_s^0|^{-1}L_1=-|z_s^0|^{-1}c^0\quad (s=2,3,4)$$

решение двойственной задачи, как следует из (3.5) и (4.5), имеет вид

$$\mathbf{Y}_s^0=L_1^{-1}\operatorname{sgn} z_s^0\|z_s^0, z_2^0,\ldots, z_{s-1}^0, 1, z_{s+1}^0,\ldots, z_k^0\|^T \qquad (k=4, s=2, 3, 4) \tag{6.8}$$

Весовые коэффициенты соответствующих алгоритмов оценивания подсчитываются из условий несмещенности (3.3), в которых $l=k=4$: $\mathbf{N}=\|\mathbf{H}'(0)$, $\mathbf{H}'(\varkappa)$, $\mathbf{H}'(T-\varkappa)$, $\mathbf{H}'(T)\|$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}_s=\|0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\|^T$ (единица — на s-м месте; $s=1,\ldots,4$). Из результатов п. 5, очевидно, следует, что эти алгоритмы единственны.

7. Из пп. 3—6 следует, что решение задачи (2.3), (2.4) достигается на импульсных функциях, т. е. оптимальные оценки строятся лишь по конечному числу измерений. Использование остальных измерений может ухудшить точность оценок. Эта особенность принципиально отличает минимаксный алгоритм от традиционных алгоритмов типа метода наименьших квадратов.

Оптимальные гарантированные оценки параметров $\gamma(T)$, $\varphi(T)$, $\mu(T)$, $\vartheta(T)$, определяемые задачей (2.3), (2.4) и обозначенные дополнительной звездочкой, имеют вид

$$\left\|\begin{matrix}\gamma^*(T)\\ \varphi^*(T)\\ \mu^*(T)\\ \vartheta^*(T)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_T\\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_T\\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_T\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}z(0)\\ z(\varkappa)\\ z(T-\varkappa)\\ z(T)\end{matrix}\right\| \tag{7.1}$$

$$\varphi_0=[(T-\varkappa)\sin\varkappa-\varkappa\sin(T-\varkappa)]/\Delta$$

$$\varphi_1=[\varkappa\sin T-T\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\varphi_2=[T\sin(T-\varkappa)-(T-\varkappa)\sin T]/\Delta$$

$$\varphi_T=[\varkappa\sin\varkappa-(T-\varkappa)\sin(T-\varkappa)+(T-2\varkappa)\sin T]/\Delta$$

$$\mu_0=[(2\varkappa-T)+(T-\varkappa)\cos\varkappa-\varkappa\cos(T-\varkappa)-\sin(T-2\varkappa)+\sin(T-\varkappa)-\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\mu_1=[(T-\varkappa)-T\cos\varkappa+\varkappa\cos T+\sin(T-\varkappa)-\sin T+\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\mu_2=[-\varkappa+T\cos(T-\varkappa)-(T-\varkappa)\cos T-\sin(T-\varkappa)+\sin T-\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\mu_T=[\varkappa(\cos\varkappa-\cos T)+(T-\varkappa)(\cos T-\cos(T-\varkappa))+\sin(T-2\varkappa)-\\ -\sin(T-\varkappa)+\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\vartheta_0=[\sin(T-\varkappa)-\sin(T-2\varkappa)-\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\vartheta_1=[\sin(T-\varkappa)-\sin T+\sin\varkappa]/\Delta$$

$$\vartheta_2=-\vartheta_1,\quad \vartheta_T=\vartheta_0$$

$$\Delta=4\sin(\varkappa/2)\sin((T-\varkappa)/2)\{T\sin(T/2-\varkappa)-(T-2\varkappa)\sin(T/2)\}$$

а $\varkappa$ задается уравнением (6.5).

Выражения для соответствующих оптимальных ошибок оценок имеют вид

$$\begin{aligned} D_0^{1/2}(\gamma)&=(M[\gamma(T)-\gamma^*(T)]^2)^{1/2}=\sigma,\\ D_0^{1/2}(\varphi)&=(M[\varphi(T)-\varphi^*(T)]^2)^{1/2}=\Delta_2/\Delta_*\\ D_0^{1/2}(\mu)&=(M[\mu(T)-\mu^*(T)]^2)^{1/2}=\Delta_3/\Delta_*\\ D_0^{1/2}(\vartheta)&=(M[\vartheta(T)-\vartheta^*(T)]^2)^{1/2}=\Delta_4/\Delta_*\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\Delta_2=2\sigma\sin(T/2),\quad \Delta_3=2\sigma[\cos(T/2-\varkappa)-\cos(T/2)]$$

$$\Delta_4=2\sigma\cos(T/2-\varkappa),\quad \Delta_*=T\cos(T/2-\varkappa)-2\sin(T/2)$$

Оценки (7.1), очевидно, могут быть легко реализованы. В силу линейности задачи выражения для оценок и ошибок оценок при переходе к размерным переменным умножаются на соответствующий масштабный множитель.

8. Обычно наряду с информацией (1.2) имеется априорная информация о параметрах $\mathbf{q}$. Пусть, например, имеется априорная информация о значении фазового вектора системы (1.1) в начальный момент времени, заданная в виде фиктивных измерений:

$$z_{-1}=\gamma(0)+\zeta_{-1}, \quad z_{-2}=\varphi(0)+\zeta_{-2} \tag{8.1}$$
$$z_{-3}=\mu(0)+\zeta_{-3}, \quad z_{-4}=\vartheta(0)+\zeta_{-4}$$

где ζ_{-i} $(i=1,\ldots,4)$ — произвольно коррелированные между собой и шумом $w(t)$ случайные величины, $M\zeta_{-i}^2\leqslant\sigma_{-i}^2$ $(i=1,\ldots,4)$. Так как начальное значение фазового вектора (1.1) связано с его конечным значением через фундаментальную матрицу, информация (8.1) эквивалентна априорной информации (в $\mathbf{h}_i$ на i-м месте стоит единица):

$$z_{-i}=\mathbf{H}_{-i}^T\mathbf{q}+\zeta_{-i} \quad (i=1,\ldots,4) \tag{8.2}$$
$$\mathbf{H}_{-i}=\exp(-\mathbf{A}^TT)\mathbf{h}_i, \quad \mathbf{h}_i=\|0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\|^T$$

Можно поставить задачу оптимального гарантированного оценивания выбранной линейной комбинации компонент $\mathbf{q}$ по информации (1.2), (8.2):

$$J^*=\Sigma_1^4x_{-i}z_{-i}+\textstyle\int_0^T x(t)z(t)\,dt$$

Проведя выкладки, аналогичные выкладкам п. 2, можно прийти к следующему обобщению задачи (2.3), (2.4):

$$\Sigma_{i=1}^4\sigma_{-i}|x_{-i}|+\textstyle\int_0^T\sigma|x(t)|\,dt\to\min_{x_{-i},x(t)} \tag{8.3}$$

$$\Sigma_{i=1}^4\mathbf{H}_{-i}x_{-i}+\textstyle\int_0^T\mathbf{H}(t)x(t)\,dt=\mathbf{P} \tag{8.4}$$

Соответственная двойственная задача имеет вид

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{P}\to\max_{\mathbf{Y}} \tag{8.5}$$

$$|\mathbf{Y}^T\mathbf{H}(t)|\leqslant1, \quad t\in[0,T] \quad \sigma\sigma_{-i}^{-1}|\mathbf{Y}^T\mathbf{H}_{-i}|\leqslant1 \quad (i=1,\ldots,4) \tag{8.6}$$

Множитель $\sigma\sigma_{-i}^{-1}$ появился из-за приведения уравнений измерений (1.2), (8.2) к одной интенсивности помехи измерения.

Можно продолжить это обобщение и далее, однако смешанный характер допустимых векторов в задаче (8.5), (8.6) не позволит относительно легко получить аналитическое решение. Тем не менее можно довольно просто получить достаточные условия, при которых решение задачи (2.3), (2.4) является решением задачи (8.3), (8.4) (соответственно решение задачи (3.1), (3.2) является решением (8.5), (8.6)).

Действительно, пусть $\mathbf{Y}^0$ — решение (3.1), (3.2). Ясно, что если при этом

$$\sigma\sigma_{-i}^{-1}|\mathbf{Y}^{0T}\mathbf{H}_{-i}|\leqslant1 \quad (i=1,\ldots,4) \tag{8.7}$$

то $\mathbf{Y}^0$ — решение (8.5), (8.6). В силу замечания 3.1 и формулы (6.8) условия (8.7) имеют одинаковый вид для всех четырех задач оценивания $\gamma(T)$, $\varphi(T)$, $\mu(T)$, $\vartheta(T)$. Поэтому рассмотрим для определенности задачу оценивания $\varphi(T)$ (см. п. 6). В этом случае с учетом (6.1), (6.7) и (8.2) условия (8.7) примут вид

$$\sigma_{-1}\geqslant\sigma, \quad \sigma_{-2}\geqslant\Delta_2/\Delta_* \tag{8.8}$$
$$\sigma_{-3}\geqslant\Delta_3/\Delta_*, \quad \sigma_{-4}\geqslant\Delta_4/\Delta_*$$

где величины Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_* определены соотношениями (7.2).

Итак, при выполнении условий (8.8) учет априорной информации не улучшает качество оценивания.

Если $\mathbf{Y}^0$ — единственное решение двойственной задачи, то условия (8.7) являются и необходимыми.

Действительно, если условия (8.7) не выполняются, то $\mathbf{Y}^0$ не принадлежит множеству (8.6) и в силу единственности оптимальное значение функционала на этом множестве строго меньше, чем на множестве (3.2).

Поэтому полученные без наличия априорной информации алгоритмы уже не являются оптимальными.

Единственность решения двойственной задачи, очевидно, эквивалентна единственности решения задачи нахождения обобщенного чебышевского полинома.

Из теории равномерного приближения функций полиномами известно, что чебышевский полином $S^0(t)=H_1+\Sigma_{j=2}^{k}z_j^0H_j$ единствен тогда и только тогда, когда уравнение

$$\Sigma_{j=2}^{k}\delta z_jH_j(t)=0 \qquad (t\in[0,T]) \tag{8.9}$$

при одновременно не равных нулю δz_j, $j=2,\ldots,k$ имеет на отрезке $[0, T]$ не более $(k-2)$ корней. Системы непрерывных функций $H_j(t)$, обладающие этим свойством, называются чебышевскими [13].

Условие этого типа входит в условия леммы п. 4 и ее следствия и уже использовалось выше. Отличие состоит в том, что ранее у уравнения (8.9) проверялось наличие не более $(k-2)$ корней внутри отрезка $[0, T]$, а не на всем отрезке $[0, T]$.

Нетрудно показать, что во всех случаях, кроме оценивания $\gamma(T)$, соответствующие системы функций являются чебышевскими при $T\leqslant\pi/2$.

Таким образом, построенные чебышевские полиномы, за исключением полинома для оценивания $\gamma(T)$, единственны, а следовательно, единственны и решения соответствующих двойственных задач. Поэтому условия (8.8), при выполнении которых не следует использовать априорную информацию при формировании оценок, являются не только достаточными, но и необходимыми.

Рассмотрим случай оценивания $\gamma(T)$. Наряду с уже построенным решением двойственной задачи $\mathbf{Y}_2^0$ (см. п. 6) вектор $\mathbf{Y}^*=\|1,\ 0,\ 0,\ 0\|^T$, очевидно, также является ее решением. Заметим, что в силу выпуклости множества $|\mathbf{H}^T(t)\mathbf{Y}|\leqslant1$ любой вектор $\mathbf{Y}_\alpha=\alpha\mathbf{Y}_2^0+(1-\alpha)\mathbf{Y}^*$, $\alpha\in[0,\ 1]$ является решением двойственной задачи, т. е. решений оказывается бесконечно много. Несмотря на это, как показано в п. 5, все они приводят к единственному решению задачи математического программирования (2.3), (2.4). Каждое $\mathbf{Y}_\alpha$ порождает достаточное условие типа (8.7). Наиболее простые выражения получаются при $\alpha=0$. В этом случае из четырех неравенств последние три выполняются тождественно, а первое принимает вид

$$\sigma\leqslant\sigma_{-1} \tag{8.10}$$

Хотя оно тоже не является необходимым, оно обычно выполняется на практике и к тому же очень простое. Поэтому на нем остановимся.

Итак, за исключением случая оценивания $\gamma(T)$, условия (8.8) являются необходимыми и достаточными условиями влияния априорной информации на оптимальный алгоритм оценивания. При оценивании параметра $\gamma(T)$ соотношения (8.8) можно заменить на более простое условие (8.10).

В [14] произведен численный расчет точности оптимального гарантированного алгоритма и проведено его сравнение с методом наименьших квадратов. Отметим два обстоятельства: для $T\leqslant\pi/2$, $\varkappa\approx T/4$; при наиболее неблагоприятной для метода наименьших квадратов корреляции ошибок измерений применение минимаксных алгоритмов улучшает точность оценивания $\gamma(T)$ в 2,5 раза, а остальных компонент — примерно в 1,5 раза.

9. Рассмотрим позиционную коррекцию бокового канала инерциальной навигационной системы. Уравнения ошибок бокового канала имеют вид [1, 15]:

$$\gamma_+^{\cdot}=\mu_+, \quad \varphi_+^{\cdot}=\mu_+-\vartheta_+ \tag{9.1}$$
$$\mu_+^{\cdot}=-\varphi_+, \quad \vartheta_+^{\cdot}=\Psi_+, \quad \Psi_+^{\cdot}=0$$

Здесь аналогично (1.1) γ_+ — угловая ошибка местоположения в боковом направлении, $\varphi_+=\alpha_++\varepsilon_+$, α_+ — угловая ошибка приборной вертикали в боковом направлении, ε_+ — постоянная приведенная погрешность бокового ньютонометра; $\mu_+=\Delta V_+/(\omega_0a)-(V/(\omega_0a))\gamma_a$, ΔV_+ — ошибка в определении скорости в боковом направлении, V — скорость движения объекта, γ_a — угловая ошибка определения азимутальной ориентации; $\vartheta_+=(V/\omega_0 a))\beta_a-\nu_+/\omega_0$, β_a — кинематическая ошибка азимутального угла, ν_+ — постоянный дрейф гироплатформы в боковом направлении; $\Psi_+=(V/(\omega_0 a^2))\nu_a$, ν_a — азимутальный дрейф гироплатформы.

Сторонняя позиционная информация, дополняющая уравнения (9.1), имеет вид

$$z_+(\tau)=\gamma_+(\tau)+w_+(\tau), \qquad \tau\in[0,\ T] \tag{9.2}$$

где $z_+(\tau)$ — непосредственно измеряемая величина; $w_+(\tau)$ — помеха измерения.

Задача коррекции состоит в построении оценок значений фазовых переменных системы (9.1) в момент времени T по информации (9.2).

Сделаем предположения о $w_+(\tau)$, аналогичные предположениям о шуме $w(\tau)$ в п. 1, и поставим задачу оптимального гарантированного оценивания вектора $\mathbf{q}_+=\|\gamma_+(T),\ \varphi_+(T),\ \mu_+(T),\ \vartheta_+(T),\ \Psi_+(T)\|^T$ (см. п. 1).

Аналогично п. 2 представим соотношение (9.2) в виде

$$z_+(t)=\mathbf{H}_+^T(t)\mathbf{q}_++w_+(t), \qquad t\in[0,\ T]; \qquad T\leqslant\pi/2$$

$$\mathbf{H}_+(t)=\exp\{\mathbf{B}^T(t-T)\}\mathbf{h}_1=\|1,\ \cos(T-t)-1,\ -\sin(T-t),\ \sin(T-t)-(T-t),$$
$$^1/_2(T-t)^2+\cos(T-t)-1\|^T$$

$$\mathbf{B}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{h}_1=\|1,0,0,0,0\|^T$$

Пусть вектор $\mathbf{P}_+=\|0,\ldots,0,\ 1,\ 0,\ldots,0\|^T$ определяет выбранную для оценивания компоненту вектора $\mathbf{q}_+$: $J_+=\mathbf{P}_+^T\mathbf{q}_+$. Оценку J_+ будем строить в виде $J_+^*=\int_0^T x_+(t)z(t)\,dt$. Для определения оптимального в минимаксном смысле алгоритма оценивания $x_+(t)\in X$ нужно, как и в п. 2, решить задачу математического программирования (2.3), (2.4), в которой $\mathbf{H}(t)=\mathbf{H}_+(t)$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}_+$, $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{P}_+\in\mathbf{R}^k$, $x(t)=x_+(t)$, $k=5$.

Применяя для решения этой задачи лемму п. 4 и ее следствие, совершенно так же, как это было сделано выше в п. 6, можно показать, что оптимальное решение имеет вид

$$x_+(t)=\Sigma_{j=1}^5 x_{+j}\delta(t-t_j) \tag{9.3}$$

$$t_1=0, \qquad t_2=\varkappa_+, \qquad t_3=T/2, \qquad t_4=T-\varkappa_+, \qquad t_5=T$$

величина $\varkappa_+$ определяется уравнением

$$T^2\sin(T/2-\varkappa_+)=8(1-\cos T/2)(T/2-\varkappa_+), \qquad \varkappa_+\in(0,\ T/2) \tag{9.4}$$

а весовые коэффициенты алгоритма x_{+j} $(j=1,\ldots,5)$ находятся из условий несмещенности, которые в этом случае принимают вид

$$\Sigma_{j=1}^5\mathbf{H}_+(t_j)x_{+j}=\mathbf{P}_+ \tag{9.5}$$

Заметим, что, как и для продольного канала, оптимальные моменты измерений являются общими для оценивания любой компоненты $\mathbf{q}_+$; кроме того, они симметричны относительно середины интервала $[0,\ T]$. Можно показать, что решение уравнения (9.4) существует и единственно, а матрица системы (9.5) неособая. Как и ранее, алгоритм (9.3) — единственный оптимальный алгоритм.

Можно подсчитать среднеквадратические значения оптимальных гарантированных ошибок оценок параметров $\gamma_+(T)$, $\varphi_+(T)$, $\mu_+(T)$, $\vartheta_+(T)$, $\Psi_+(T)$. Обозначим их $D_0^{1/2}(\gamma_+)$ и т. д.

$$D_0^{1/2}(\gamma_+)=\sigma_+, \qquad D_0^{1/2}(\varphi_+)=\sigma_+|z_2^+|^{-1}, \qquad D_0^{1/2}(\mu_+)=\sigma_+|z_3^+|\ |z_2^+|^{-1}$$

$$D_0^{1/2}(\vartheta_+)=\sigma_+|z_4^+|\ |z_2^+|^{-1}, \qquad D_0^{1/2}(\Psi_+)=\sigma_+|z_5^+|\ |z_2^+|^{-1}$$

$$z_2^+=\{(T/2-\varkappa_+)[\cos(T/2-\varkappa_+)-\cos(T/2)]+{}^1/_2\varkappa_+(\varkappa_+-T)\sin(T/2-\varkappa_+)\}/2\Delta_+$$

$$z_3^+=\{(T/2)\sin(T/2-\varkappa_+)-(T/2-\varkappa_+)\sin(T/2)\}/\Delta_+ \tag{9.6}$$

$$z_4^+=\{(T/2)\sin(T/2-\varkappa_+)\}/\Delta_+, \qquad z_5^+=\sin(T/2-\varkappa_+)/\Delta_+$$

$$\Delta_+=(T/2-\varkappa_+)\cos(T/2)-\sin(T/2-\varkappa_+)$$

Пусть имеется априорная информация о значении фазового вектора в начальный момент времени вида

$$z_{-1}=\gamma_+(0)+\zeta_{-1}^+, \qquad z_{-2}=\varphi_+(0)+\zeta_{-2}^+, \qquad z_{-3}=\mu_+(0)+\zeta_{-3}^+$$

$$z_{-4}=\vartheta_+(0)+\zeta_{-4}^+, \qquad z_{-5}=\Psi_+(0)+\zeta_{-5}^+ \tag{9.7}$$

где ζ_{-j}^+ $(j=1,\ldots,5)$ — произвольно коррелированные между собой и с процессом $w_+(t)$ случайные величины; $\mathbf{M}\zeta_{-j}^+=0$, $\mathbf{M}(\zeta_{-j}^+)^2\leqslant(\sigma_{-j}^+)^2$ $(j=1,\ldots,5)$.

Как и в п. 8, можно показать, что при оценивании параметров $\varphi_+(T)$, $\mu_+(T)$, $\vartheta_+(T)$, $\Psi_+(T)$ необходимыми и достаточными условиями невключения измерений (9.7) в оптимальный алгоритм оценивания являются условия

$$\sigma_+(\sigma_{-j}^+)^{-1}|\mathbf{H}_{-j}^{+T}\mathbf{Y}^+|\leqslant 1 \qquad (j=1,\ldots,5) \tag{9.8}$$

$$\mathbf{H}_{-j}^+=\exp\{-\mathbf{B}^T T\}\mathbf{h}_j, \qquad \mathbf{h}_j=\|0,\ldots,0,1,0,\ldots 0\|^T$$

$$\mathbf{Y}^+=(z_2^+)^{-1}\|z_2^+,\ 1,\ z_3^+,\ z_4^+,\ z_5^+\|^T$$

z_j^+ задаются соотношениями (9.6), $\mathbf{B}$ — матрица системы.

При оценивании величины $\gamma_+(T)$ наиболее простым достаточным условием невключения априорной информации является условие $\sigma_+\leqslant\sigma_{-1}^+$. Оптимальная оценка $\gamma_+(T)$ имеет вид $\gamma_+^*(T)=z_+(T)$.

Численные расчеты показывают, что при некоторых значениях $\sigma_+(\sigma_{-j}^+)^{-1}$ (того же порядка, что и $\sigma\sigma_{-j}^{-1}$, $j=1,\ldots,4$) условия (9.8) могут не выполняться (несмотря на выполнение условий (8.8)). В этом случае для решения соответствующей задачи математического программирования можно воспользоваться численными методами [3, 5].

Авторы выражают глубокую благодарность Н. А. Парусникову за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И.* Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ. 1982. 174 с.
2. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука. 1971. 395 с.
3. *Лидов М. Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космич. исследования. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
4. *Белоусов Л. Ю.* Определение оптимальных моментов измерения // Космич. исследования. 1969. Т. 7. № 1. С. 28–34.
5. *Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука. 1980. 360 с.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 719 с.
7. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. М.; Л.: Гостехиздат. 1939. 258 с.
8. *Анисимов С. А.* Некоторые методы минимаксной идентификации // Автоматика и телемеханика. 1978. № 6. С. 50–55.
9. *Черноусько Ф. Л., Овсеевич А. И., Клепфиш Б. Р., Трущенков В. Л.* Эллипсоидальное оценивание состояния управляемых динамических систем: Препринт № 224. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР. 1983. 52 с.
10. *Александров В. В.* Линейный анализ точности инерциальных систем навигации // Науч. тр. ин-та механики МГУ. 1974. № 33. С. 32–37.
11. *Белоусов Л. Ю., Крупень В. Я.* О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности // Космич. исследования. 1974. Т. 12. № 2. С. 191–196.
12. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.
13. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. 1977. 511 с.
14. *Голован А. А., Мартиросян С. Р., Матасов А. И.* Численное сравнение оптимального гарантированного алгоритма с алгоритмом метода наименьших квадратов // Космич. исследования. 1988. Т. 26. № 2. С. 319–322.
15. *Парусников Н. А., Каленова В. И., Парусникова О. И., Шакотько А. Г.* Задача наблюдаемости при коррекции инерциальных навигационных систем // Науч. тр. ин-та механики МГУ. 1974. № 33. С. 11–21.

Москва, Ереван

Поступила в редакцию
30.X.1986