МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988

УДК 534.1

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЛАБЫЕ СВЯЗИ В МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

БАНАХ Л. Я.

Одним из наиболее эффективных методов исследования сложных многомерных систем является метод декомпозиции – разделение системы на подсистемы. При этом важен выбор способа разбиения на подсистемы, поскольку не при всяком разбиении достаточно прост анализ поведения системы в целом. Целесообразно отыскивать в системе различного рода слабые связи, при которых подсистемы составляют «ядро» системы и имеют динамические характеристики, близкие к соответствующим характеристикам всей системы (под динамическими характеристиками здесь подразумеваются частоты и формы свободных колебаний, амплитуды вынужденных колебаний).

В [1] исследован один из возможных типов слабых связей многомерных систем, когда малы безразмерные коэффициенты связи γ_{ij} между i-м и j-м элементом системы, т. е. $\gamma_{ij}=k_{ij}(k_{ii}k_{jj})^{-1/2}$. Подобные слабые связи возникают, например, в случае небольшой асимметрии геометрической и динамической [2], при наличии в системе элементов с малой жесткостью типа амортизаторов.

Оказывается, что понятие слабых связей допускает существенное обобщение, удобное для исследования сложных многомерных систем различной природы, имеющих матричную форму записи уравнений. Установлены еще два типа слабых связей: энергетически слабые связи, спектрально слабые связи. Такого типа связи достаточно часто встречаются при исследовании сооружений, различного оборудования и так далее.

1. Способ выделения слабых связей. Уравнение сложной системы, состоящей из ряда подсистем, можно записать в виде матрицы симметричной блочной структуры с блоками $K_{ij}-\lambda M_{ij}$:

$$D=K-\lambda M=[K_{ij}-\lambda M_{ij}]\quad (i,\ j=1,\dots,m) \tag{1.1}$$

Здесь K – матрица жесткости системы, ее элементы k_{ij}, M – матрица инерции, диагональные блоки K_{ii}, M_{ii} представляют собой матрицы жесткости и инерции i-й подсистемы; K_{ij}, M_{ij} – матрицы жесткостной и инерционной связи между i-й и j-й подсистемами; m – число подсистем, n_i – порядок i-й подсистемы. Демпфирование можно учесть полагая K комплексным.

Назовем парциальной подсистемой такую подсистему, которая получена при жестком закреплении остальных $m-1$ подсистем. Тогда, очевидно, каждый из выделенных диагональных блоков матрицы D в (1.1) описывает свою парциальную подсистему. Внедиагональные блоки отражают взаимодействие между подсистемами.

Предположим теперь, что известно решение для каждой из парциальных подсистем, т. е. спектр собственных частот и формы колебаний. Тогда для каждой из подсистем можно сформировать следующие матрицы: Λ_i – диагональная матрица, состоящая из собственных частот подсистемы i, т. е. $\Lambda_i=\mathrm{diag}\,[\lambda_i^p]$ $(p=1,\dots,n_i)$; Φ_i – матрица, состоящая из столбцов форм колебаний i-й подсистемы.

Найдем условия, при которых система (1.1) является слабо связанной. Образуем блочно-диагональную матрицу Φ_0, состоящую из блоков Φ_i, и диагональную матрицу Λ_0, состоящую из блоков Λ_i. Эти матрицы, очевидно, описывают несвязанные между собой подсистемы.

Умножим матрицу D (соотношение 1.1) справа и слева на Φ_0^T и Φ_0 (знак T означает транспонирование). Тогда получим симметричную блочную матрицу

$$D^*=\Phi_0^T D\Phi_0=[\Phi_i^T(K_{ij}-\lambda M_{ij})\Phi_j] \qquad (1.2)$$

Элементы матрицы D^*: $\Phi_i^{pT}(K_{ij}-\lambda M_{ij})\Phi_j^s$ — работа сил связи $\Phi_i^{pT}(K_{ij}-\lambda M_{ij})$, совершаемая в i-й подсистеме на перемещениях, соответствующих формам колебаний j-й подсистемы. Равенство $\Phi_i^T(K_{ij}-\lambda M_{ij})\Phi_j=\Phi_j^T(K_{ji}-\lambda M_{ji})\Phi_i$, вытекающее из симметрии матрицы D^*, означает принцип взаимности. При этом $\Phi_i^{pT}(K_{ij})\Phi_j^p$ — работа сил упругого взаимодействия, $\Phi_i^T M_{ij}\Phi_j=W_i$ — работа сил инерционного взаимодействия. Работу этих сил необходимо учитывать при переходе от парциальных подсистем к полной системе в сборе.

Поскольку Φ_i — собственные формы i-й подсистемы, то блоки матрицы (1.2), расположенные на главной диагонали, приводятся к диагональному виду с элементами, которые обозначим

$$\Phi_i^T M_{ii}\Phi_i=\mathrm{diag}\,[\mu_i^p]=\mu_i \qquad (1.3)$$

$$\Phi_i^T K_{ii}\Phi_i=\mathrm{diag}\,[\varkappa_i^p]=\varkappa_i \qquad (1.4)$$

$$\varkappa_i^p=\lambda_i^p\mu_i^p \qquad (1.5)$$

Учитывая (1.3)—(1.5), запишем диагональные блоки в (1.2) в виде

$$\Phi_i^T(K_{ii}-\lambda M_{ii})\Phi_i=\varkappa_i-\lambda\mu_i \qquad (1.6)$$

Для того чтобы матрица D^* описывала слабо связанные подсистемы, необходимо представить ее в виде матрицы, содержащей малый параметр $\varepsilon\ll 1$ при внедиагональных блоках матрицы D^*, т. е. (учитывая (1.6)):

$$D^*=\mathrm{diag}\,[\varkappa_i-\lambda\mu_i]+\varepsilon B, \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1m}^T & B_{2m}^T & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

Тогда решение системы (1.7), следуя теории возмущений [3], можно записать в виде рядов по степеням ε:

$$\Lambda=\Lambda_0+\varepsilon\Delta_1\Lambda+\varepsilon^2\Delta_2\Lambda+\dots, \qquad \Phi=\Phi_0+\varepsilon\Phi_0 S+\varepsilon^2\Phi_0 T+\dots \qquad (1.8)$$

где Λ_0, Φ_0 определены выше и представляют собственные частоты и формы колебаний несвязанных парциальных подсистем, а коэффициенты при ε характеризуют соответствующие поправки первого и высших приближений. Вопросы сходимости подобных рядов рассматривались в [3, 4].

Приведение матрицы (1.2) к виду (1.7) может быть осуществлено различными способами, и в зависимости от этого могут быть получены слабые связи различных типов. В [1] показана возможность приведения матрицы умножением ее справа и слева на диагональную матрицу $N=\mathrm{diag}\,[(\varkappa_i^p)^{1/2}]$; в результате получается матрица $D^{**}=ND^*N$, в которой на главной диагонали стоят элементы $1-\lambda\mu_i^p/\varkappa_i^p$, а внедиагональные блоки α_{ij} имеют безразмерные элементы

$$\alpha_{ij}^{ps}=[\Phi_i^T(K_{ij}-\lambda M_{ij})\Phi_j](\varkappa_i^p\varkappa_j^s)^{-1/2} \qquad (1.9)$$

Учитывая (1.5), найдем, что выражение (1.9) эквивалентно следующему:

$$\alpha_{ij}^{ps}=[\Phi_i^T(K_{ij}-\lambda M_{ij})\Phi_j](\lambda_i^p\lambda_j^s)^{-1/2}(\mu_i^p\mu_j^s)^{-1/2} \qquad (1.10)$$

2. Энергетические слабые связи. Оценим величину α_{ij}^{ps}. Заметим сначала, что $|\alpha_{ij}^{ps}|<1$ в силу положительной определенности матриц K, M. Необходимое условие слабой связанности системы имеет вид

$$|\alpha_{ij}^{ps}|\leqslant\varepsilon\ll 1 \quad (p=1,\dots,n_i,\ s=1,\dots,n_j) \qquad (2.1)$$

Действительно, выполнение (2.1) означает, что матрицу D^{**} можно представить в виде (1.7) $D^{**}=D_0+\varepsilon D_1$, описывающем слабо связанные системы.

В случае, когда условие (2.1) выполняется лишь при $p>p_1$, $s>s_1$, можно говорить о частичной слабой связи подсистем i и j.

Неравенство (2.1) означает, что работа сил упругого взаимодействия V_{ij} между i-й и j-й подсистемами для p-й и s-й форм колебаний значительно меньше среднегеометрической величины потенциальной энергии i-й и j-й подсистем V_{ii}, V_{jj}:

$$V_{ij}^{ps} \ll (V_{ii}^{p} V_{jj}^{s})^{1/2} \qquad (2.2)$$

В случае существования инерционных элементов M_{ij} в матрице связи можно получить аналогичное условие для кинетической энергии

$$W_{ij}^{ps} \ll (W_{ii}^{p} W_{jj}^{s})^{1/2} \qquad (2.3)$$

поэтому условие (2.2) или (2.3) можно назвать условием существования энергетически слабых связей. Индексы p, s означают соответствующий номер формы колебаний.

Для сложных систем разбиение на энергетически слабо связанные подсистемы возможно, в частности, если суммарная энергия, накопленная в подсистеме связи при колебаниях, значительно меньше энергии основных подсистем. Тогда, очевидно, выполнено условие (2.2). Возможность выполнения (2.2) повышается с увеличением частоты колебаний (п. 4).

Как указывалось ранее, при выполнении (2.1) матрица D^* имеет вид (1.7), т. е. $K=K_0+\varepsilon B$, $M=M_0+\varepsilon L$, где блоки матрицы B равны: $B_{ii}=0$; $B_{ij}=\Phi_i^T K_{ij} \Phi_j$. Аналогично можно получить блоки матрицы L.

Решение системы (1.2) можно искать в виде рядов (1.8). Используя процедуру [1], находим следующие величины поправок первого приближения (в случае простых корней) для собственных частот и форм колебаний i-й подсистемы от связи с j-й:

$$(\Delta\Lambda_i)_j=0, \quad s_{ij}^{ps}=\alpha_{ij}^{ps}\lambda_i^p(\lambda_j^s-\lambda_i^p)^{-1} \qquad (2.4)$$

В случае равных или близких корней вид решения представлен в п. 4. Если i-я подсистема связана с несколькими подсистемами, окончательная поправка суммируется.

3. Спектральные слабые связи. Анализируя поправки первого и высших приближений, видим, что в них в качестве множителя входит матрица $S=[s_{ij}^{ps}]$ (2.4). Следовательно, скорость и радиус сходимости определяются величинами s_{ij}^{ps}. Если $|s_{ij}^{ps}|>1$, то ряды расходятся.

Если удовлетворены условия (2.1) для энергетически слабых связей $|\alpha_{ij}^{ps}|<\varepsilon$, то, учитывая (2.4), неравенство $s_{ij}^{ps}>1$, означающее расходимость рядов в (1.8), возможно, если $|1-\lambda_i^p/\lambda_j^s|<\varepsilon$, т. е. при наличии в различных подсистемах близких частот. В этом случае, как и в [1], возникает сильная связанность подсистем. Следовательно, для сходимости рядов (1.9) необходимо условие

$$s_{ij}^{ps}=\alpha_{ij}^{ps}\lambda_i^p(\lambda_j^s-\lambda_i^p)^{-1}<\varepsilon \qquad (3.1)$$

Связи K_{ij}, удовлетворяющие условию (3.1), назовем спектрально слабыми.

Условия существования спектрально слабых связей (3.1) выполняются в двух случаях: в первом случае, если система имеет слабые энергетические связи $|\alpha_{ij}^{ps}|<\varepsilon$ и в подсистемах нет близких частот, т. е. расстройка $|1-\lambda_i^p/\lambda_j^s|\sim 1$, во втором случае, если расстройка частот в подсистемах велика, т. е. $|1-\lambda_i^p/\lambda_j^s|\geqslant 1/\varepsilon$, причем подсистемы могут и не иметь энергетической слабой связи. Это означает малую связь подсистем, работающих в различных частотных диапазонах.

4. Решение системы в случае спектрально сильной связи. Если условие (3.1) не выполнено и ряд (1.8) расходится, то решение связанной системы необходимо искать в другом виде, как для случая систем, имеющих кратные корни [1, 3]. В [1] предложен достаточно простой вид решения для системы с линейными элементарными делителями (что соответствует физически реализуемым матрицам (1.1). Так, если корень i-й подсистемы λ_i^p близок к корню λ_j^s, для j-й подсистемы в (2.1) не выполнено, то для связанной системы соответствующие поправки первого приближения к частотам [1] равны: $(\Delta_1\lambda_i^p)_j=\Phi_i^{pT}K_{ij}\Phi_j^s(\mu_{ii})^{-1}$.

Формы колебаний имеют вид

$$h_i^p = \Phi_i^p + C_1\Phi_j^s + o(\varepsilon) \tag{4.1}$$
$$h_j^s = \Phi_j^s + C_2\Phi_i^p + o(\varepsilon), \quad C_1 = C_2^{-1} = \mu_i^p/\mu_j^s$$

Анализируя решение (4.1), видим, что поправки к собственным частотам пропорциональны коэффициенту энергетической связи α_{ij}^{ps} и, следовательно, если подсистемы энергетически слабо связаны, то и в этом случае поправки $\Delta\lambda$ малы и частоты связанной системы близки к частотам парциальных подсистем.

Собственные векторы меняются достаточно сильно, поскольку являются линейной комбинацией собственных векторов, соответствующих близким частотам.

Таким образом, условие энергетически слабых связей можно применять при отсутствии близких частот в подсистемах, в противном случае необходимо проверить выполнение (3.1).

5. Выделение слабо связанных подсистем в общей системе. Декомпозиция системы с учетом слабых энергетических и спектральных связей позволяет существенно уменьшить порядок исследуемой системы. Так, если известны решения для подсистем, то можно построить матрицу α_{ij} и оценить связанность форм колебаний.

Для большинства практических задач порядок подсистем может быть очень велик (10^3-10^4), и трудно иметь всю информацию о частотах и формах колебаний. В связи с этим для эффективного использования слабых связей необходимо иметь приближенные способы оценки величин α_{ij} при неполной информации о решении или вообще без решения системы лишь по коэффициентам исходных матриц K, M.

Докажем важное свойство энергетических связей, а именно: максимально возможные элементы матрицы α_{ij}^{ps} убывают с номером формы p, s и при определенных условиях остаются меньше наперед заданного числа ε, т. е.

$$\max \alpha_{ij}^{ps} \leqslant \ldots \leqslant \max \alpha_{ij}^{n_i n_j} \; (p=1, \ldots, n_i, \; s=1 \ldots n_j) \tag{5.1}$$

Для доказательства упростим выражения (1.9), (1.10), применяя векторные и матричные нормы [5]. Тогда условие существования слабых энергетических связей (2.1) примет вид

$$\alpha_{ij}^{ps} \leqslant \frac{\|\Phi_i^{pT} K_{ij} \Phi_j^s\|}{(\Phi_i^{pT} K_{ii} \Phi_i^p)^{1/2} (\Phi_j^{sT} K_{jj} \Phi_j^s)^{1/2}} \leqslant \frac{\|Q_i^{-1/2} K_{ij} Q_j^{-1/2}\|}{(\varkappa_i^p \varkappa_j^s)^{1/2}} \tag{5.2}$$

где Q определяется из условия ортогональности форм колебаний: $\Phi_i^T Q \Phi_i = E$. В частности, для достаточно распространенных условий ортогональности: по энергии $^1/_2 \lambda_i \Phi_i^T M_{ii} \Phi_i = E$ и по матрице инерции $\Phi_i^T M_{ii} \Phi_i = E$, выражение (5.2) примет вид

$$|\alpha_{ij}^{ps}| \leqslant \| M_{ii}^{-1/2T} K_{ij} M_{jj}^{-1/2} \| \, (\lambda_i^p \lambda_j^s)^{-1/2} \tag{5.3}$$

Числитель (5.2) и (5.3) не зависит от решения и определяется коэффициентами исходных матриц K, M. Следовательно, при возрастании номера p, s изменение α_{ij}^{ps} определяется величиной λ_i^p, λ_j^s, откуда сразу же следует соотношение (5.1).

Докажем теперь вторую часть высказанного выше утверждения. Выберем разбиение системы по энергетически слабым связям таким образом, что

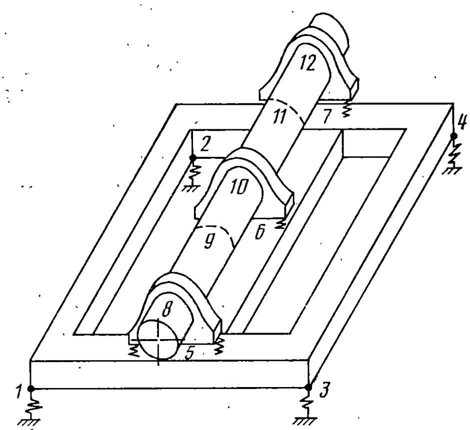
$$\|Q_i^{-1/2} K_{ij} Q_j^{-1/2}\| (\mu_i^{p_1} \mu_j^{s_1})^{-1/2} < \varepsilon \, (\lambda_i^{p_1} \lambda_j^{(s_1)})^{-1/2} \tag{5.4}$$

Тогда элементы матрицы $|\alpha_{ij}^{ps}| < \varepsilon$ при $p > p_1$, $s > s_1$, что и требовалось доказать.

Условие (5.4) для вычисления $\max \alpha_{ij}^{ps}$ не требует знания высших частот и форм колебаний. Кроме того, из (5.4) можно определить частоты

$\lambda_i^{p_1}$, которые необходимо оставить в системе для обеспечения точности расчета, равной ε.

Если для подсистем неизвестно даже низкочастотное решение, можно указать способ приближенной оценки условия энергетической связи с помощью соотношения (5.2), используя среднеарифметическое значение $\varkappa_i^* = (\Sigma\varkappa_i^p)/n_i = (\Sigma q_{ii}^{pp})/n_i$, что равно (по теореме Виета) среднему арифметическому суммы собственных значений матрицы $K_{ii} - \lambda Q_i$. Тогда условие существования слабых связей имеет вид



$$\alpha_{ij}^* \leqslant \| Q_i^{-{1/2}T} K_{ij} Q_j^{-1/2} \| (\varkappa_i^* \varkappa_j^*)^{-1/2} \tag{5.5}$$

Неравенство (5.5), очевидно, не зависит от условия ортогональности Q. Оценки (5.5) означают выполнение (5.4) в среднем и являются достаточным, но не необходимым условием; их легко проверить, поскольку для этого требуется знать лишь элементы исходных матриц и диагональные элементы $Q_i^{-{1/2}T} K_{ij} Q_j^{-1/2}$.

Таким образом, можно предложить следующий способ отыскания в сложной системе энергетических слабых связей. Проводя разбиение на подсистемы в соответствии с (5.5), можно ожидать существования в системе энергетически слабых связей. Затем, решая несвязанные подсистемы и получая для них собственные частоты и формы колебаний, найти с помощью (5.4) номера p_1 и s_1 энергетически слабо связанных форм колебаний в i-й и j-й подсистемах.

Следовательно, соотношение (5.4) позволяет оценить величину энергетических связей и является критерием существования слабых энергетических связей и дает способ разбиения системы на слабо взаимодействующие подсистемы.

6. Пример. В качестве примера исследования систем с помощью энергетических и спектральных связей рассмотрим анализ свободных колебаний ротора, установленного на упругом фундаменте (фигура).

Фундамент: $L_1 = 5$ м, $L_2 = 3$ м, $J_{y\Phi} = J_{z\Phi} = 0{,}87 \cdot 10^{-2}$ м^2;

Ротор: $J_{yP} = J_{zP} = 0{,}1 \cdot 10^{-1}$ м^4, частотный диапазон 0–100 Гц. Расчетная конечноэлементная модель имеет 12 узлов с шестью степенями свободы каждый, т. е. 72 степени свободы.

Матрица жесткости системы имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} K_\Phi & K_{\Phi P} \\ K_{\Phi P}^T & K_P \end{bmatrix}$$

где K_Φ, K_P – матрицы жесткости фундамента ротора соответственно; $K_{\Phi P}$ – матрица упругих элементов, связывающих ротор и фундамент; $K_{\Phi P}(42\times30)$ имеет блочную структуру с блоками $K_{\Phi P}^{ij}$ $(i=1,\ldots,7;\ j=8,\ldots,12)$. При этом не равны нулю только блоки $\overset{58}{K_{\Phi P}} = \overset{6,10}{K_{\Phi P}} = \overset{7,12}{K_{\Phi P}}$, имеющие порядок (6×6); ненулевые элементы этих блоков: $k_{11} = k_{22} = k_{33} = -10^3$ Н/м; $k_{15} = -k_{24} = -34{,}3 \cdot 10^3$ Н/м.

Первые четыре собственные частоты для несвязанных подсистем (Гц): ротор – 7,65; 8,36; 21,86; 39,8; фундамент – 22,2; 25,76; 29,0; 79,8.

Соответствующие им формы колебаний: Φ_P^i, Φ_Φ^i $(i=1,\ldots,4)$. Вычисляя в соответствии с (1.10) матрицу $D^* = \Phi_\Phi^T(K - \lambda M)\Phi_P$, находим $\max \alpha_{ij}^{ps} = \alpha_{ij}^{44} = 0{,}11$, $\max s_{ij}^{ps} = 0{,}04$ $(\mu_i = \mu_j = 50)$. Следовательно, в этом частотном диапазоне система энергетически и спектрально слабо связана. Для p, $s > 4$ при неизвестных формах колебаний можно оценить α_{ij}, используя (5.3). В данном случае при λ_i, $\lambda_j > 2\pi \cdot 80$ Гц найдем $\alpha_{ij} \leqslant \| M_\Phi^{-1/2} K_{\Phi P} M_P^{-1/2} \| (\lambda_i \lambda_j \mu_i \mu_j)^{-1/2} \leqslant 0{,}2$, т. е. учитывая (5.4), заключаем, что система энергетически слабо связана во всем частотном диапазоне и, следовательно, собственные частоты связанной системы близки к соответствующим частотам изолированных подсистем, что подтверждают результаты расчета собственных частот колебаний.

Собственные частоты связанной системы (Гц): 7,13; 7,96; 20,55; 22,8; 26,1; 29,4; 38,5; 80,7.

Поправки к частотам не превышают 6%, при этом частоты ротора и фундамента, соответствующие идентичным формам колебаний, раздвигаются (меньшие — уменьшаются, большие — увеличиваются, притом примерно на одинаковую величину), так что $\Sigma\lambda_{i\Phi}+\Sigma\lambda_{iP}=\Sigma\lambda_i$.

Таким образом, использование слабых связей существенно упрощает анализ и расчет сложных многомерных систем. Подсистемы, полученные расчленением исходной системы с помощью слабых связей, обладают динамическими характеристиками, близкими соответствующим характеристикам исходной системы.

Анализ энергетически и спектрально слабых связей дает также возможность построить низкочастотную модель минимального порядка, эквивалентную в какомлибо смысле исходной в выбранном частотном диапазоне [6]. Эта задача по существу сводится к определению тех частот колебаний $\lambda_i^{p_i}$, $\lambda_j^{s_i}$, выше которых колебания становятся энергетически и спектрально слабо связанными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Банах Л. Я., Перминов М. Д.* Исследование сложных динамических систем с использованием слабых связей между подсистемами // Машиноведение. 1972. № 4. С. 3–9.
2. *Банах Л. Я., Гаджиева Е. Г.* Динамика регулярных и квазирегулярных систем с поворотной симметрией // Машиноведение. 1984. № 3. С. 9–16.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972. 740 с.
4. *Дольберг М. Д., Ясницкая Н. Н.* Оценки снизу частот колебаний упругой системы. Обобщенные оценки Донкерлея — Папковича // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1973. Т. 212. № 6. С. 1317–1319.
5. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир. 1983. 382 с.
6. *Ахметханов Р. С., Банах Л. Я., Соколин Е. Г.* Построение расчетной модели минимального порядка для сложных колебательных систем // Машиноведение. 1987. № 3. С. 87–94.

Москва

Поступила в редакцию 5.VI.1986