МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988

УДК 534.1

ОПТИМАЛЬНАЯ АМОРТИЗАЦИЯ КРУГЛОГО ПРИБОРА

ПРОУРЗИН В. А.

В [1] поставлена задача оптимального управления пространственным движением амортизируемого твердого тела (прибора), связанного через амортизаторы с другим твердым телом (контейнером, корпусом, основанием), движущимся по закону удара. Закон изменения главного вектора и главного момента сил, действующих на прибор со стороны амортизаторов, подлежит выбору и играет в задаче роль управления. Внешнее воздействие задается в виде поступательного и углового ускорений контейнера.

Все приборы по их геометрической форме можно условно разбить на две группы: приборы, вращение которых вызывает существенные добавки к их ходам в контейнере («продолговатые» приборы), и приборы, вращение которых вызывает незначительные добавки к ходам («круглые» приборы). В последнем случае геометрическую форму прибора можно аппроксимировать с помощью шара.

В публикуемой работе показано, что в этом случае при выполнении определенных условий существует оптимальное управление с нулевым вращательным моментом. Задача при этом существенно упрощается, а в случае, когда поступательная компонента внешнего воздействия – постоянный по направлению удар, сводится к «простейшей» задаче оптимальной амортизации [2]. Направление удара и угловая компонента воздействия могут быть любыми и заранее не фиксируются.

Применение полученного результата показано на примере двух классов внешних воздействий. Для них построены характеристики амортизаторов в виде функций фазовых координат, оптимальные для каждого воздействия из своего класса.

1. Обозначим через $0xyz$, $c\xi\eta\zeta$ системы координат, связанные с контейнером и прибором, причем точка c лежит в центре масс прибора; $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор-столбцы из эйлеровых углов поворота контейнера в неподвижной системе координат и поворота прибора относительно контейнера, $B(\boldsymbol{\psi})$, $B(\boldsymbol{\varphi})$ — соответствующие матрицы поворота; $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютные угловые скорости контейнера и прибора, $\boldsymbol{\sigma}_\psi$, $\mathbf{u}_\theta$ — их абсолютные угловые ускорения; $\mathbf{r}_p$, $\boldsymbol{\rho}_p$ — радиусы-векторы точки p прибора в системах координат $0xyz$ и $c\xi\eta\zeta$; $\boldsymbol{\sigma}_0$, $\mathbf{u}_c$ — абсолютные ускорения начала отсчета o системы $0xyz$ и центра масс c прибора; $\mathbf{w}_p$ — абсолютное ускорение точки p прибора; $\mathbf{v}(\cdot)=(\mathbf{v}_c(\cdot), \mathbf{v}_\theta(\cdot))$ — динамическая характеристика обобщенного амортизатора, или управление, где компоненты $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{v}_\theta$ задают зависимость ускорения центра масс прибора и углового ускорения прибора от параметров движения прибора и контейнера; $\mathbf{u}_v(t)=(\mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_\theta(t))$ — реализация характеристики $\mathbf{v}(\cdot)$, или программное управление, где $\mathbf{u}_c(t)$, $\mathbf{u}_\theta(t)$ — значения векторов $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{v}_\theta$ в момент t; $\boldsymbol{\sigma}(t)=(\boldsymbol{\sigma}_0(t), \boldsymbol{\sigma}_\psi(t))$ — внешнее воздействие; P — множество точек прибора, P_W — подмножество его точек, чувствительных к ударам; $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма. Индексы k, π вверху означают, что вектор задан своими координатами в системах $0xyz$ и $c\xi\eta\zeta$ соответственно, а отсутствие индекса, если не оговорено особо, означает задание вектора в системе координат, связанной с неподвижным пространством.

Движение центра масс прибора в контейнере задается уравнением

$$\mathbf{r}_c^{\cdot\cdot}=\mathbf{u}_c^k-\boldsymbol{\Omega}^k\times(\boldsymbol{\Omega}^k\times\mathbf{r}_c)-\boldsymbol{\sigma}_\psi^k\times\mathbf{r}_c-2\boldsymbol{\Omega}^k\times\mathbf{r}_c^{\cdot}-\boldsymbol{\sigma}_0^k \qquad (1.1)$$

Уравнения, описывающие вращение прибора в контейнере (см. [1]), здесь не используются. Начальное состояние системы в момент времени $t=0$ задается: $\mathbf{r}_c(0)=\mathbf{r}_c^0$, $\mathbf{r}_c^{\cdot}(0)=\mathbf{r}_c^{\cdot 0}$, $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\varphi}^0$, $\boldsymbol{\omega}(0)=\boldsymbol{\omega}^0$. Заметим, что общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\mathbf{r}_c(t;\mathbf{u}_c)=\mathbf{r}_c{}^0+t\dot{\mathbf{r}}_c{}^0+B(\psi(t;\sigma_\psi))\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau(\mathbf{u}_c(\nu)-\sigma_0(\nu))\,d\nu\,d\tau \qquad (1.2)$$

Устойчивость механических объектов к ударам зависит, по крайней мере, как от величины, так и от направления приложенного ударного ускорения. Рассмотрим, например, приборы, содержащие элементы с пружинными контактами, реле, переключатели, разъемы, вариометры, потенциометры со смещающимися контактами и так далее. Нарушение их нормального функционирования (ложное срабатывание реле, нарушение контакта, смещение скользящего контакта и т. п.) определяется величинами проекций ускорений этих элементов на определенные направления.

Исходя из этого, удароустойчивость различных объектов обычно задается путем выделения некоторых направлений (нередко ограничиваются направлениями координатных осей) и чисел, имеющих смысл допустимых перегрузок по направлениям и ограничивающих величины проекций ускорений выделенных точек прибора на эти направления [3, 4]. Испытания изделий на действие удара также проводятся по различным направлениям.

Рассмотрим множество Γ векторов $\boldsymbol{\gamma}$ единичной длины, задающих те направления в приборе, перегрузки вдоль которых подлежат контролю, и числа α_γ, ограничивающие величины проекций ускорений точек из множества P_W на направление $\gamma\in\Gamma$. Используя введенную в [1] величину перегрузки по направлению $\boldsymbol{\gamma}$

$$I_\gamma(\mathbf{u}_v)=\max_t\max_{p\in P_W}\langle \mathbf{w}_p{}^\pi(t;\ \mathbf{u}_v),\ \boldsymbol{\gamma}\rangle \qquad (1.3)$$

ограничения на ускорения точек прибора можно записать в виде системы неравенств

$$I_\gamma(\mathbf{u}_v)\leqslant\alpha_\gamma,\ \gamma\in\Gamma \qquad (1.4)$$

В системе координат, связанной с прибором, эти неравенства задают выпуклое множество — зону допустимых ускорений $C_W{}^0=\{\mathbf{w}^\pi : \langle\mathbf{w}^\pi,\ \boldsymbol{\gamma}\rangle\leqslant \alpha_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$. В том случае, когда допустимые перегрузки α_γ по каждому направлению мало отличаются друг от друга, появляется возможность охарактеризовать удароустойчивость прибора одним числом α по всем направлениям (множество $C_W{}^0$ в этом случае — шар радиуса α).

Программные управления $\mathbf{u}_v(t)=(\mathbf{u}_c(t),\ \mathbf{u}_\theta(t))$, удовлетворяющие неравенствам (1.4), образуют множество U допустимых программных управлений, а те динамические характеристики амортизаторов $\mathbf{v}(\cdot)$, чьи реализации $\mathbf{u}_v(t)$ допустимы при данном воздействии $\boldsymbol{\sigma}(t)$, образуют множество допустимых управлений $V=\{\mathbf{v}(\cdot) : \mathbf{u}_v\in U\}$.

Задача оптимальной амортизации здесь состоит в том, чтобы выбором управления $\mathbf{v}\in V$ оптимизировать связанную с контейнером область пространства, отводимую под относительное смещение прибора. Для оценки качества управления в контейнере выделяется множество G единичных направлений $\mathbf{g}$, вдоль которых подлежат контролю уклонения прибора. Если упомянутая область имеет форму выпуклого многогранника, то это множество состоит из нормалей к его граням. Если же эта область ограничена гладкой выпуклой поверхностью или о ее форме ничего не известно, то во множество G естественно включить все направления в контейнере. Качество управления оценивается функционалом

$$J(\mathbf{u}_v)=\max_{g\in G}J_g(\mathbf{u}_v) \qquad (1.5)$$

имеющим смысл максимального уклонения, или хода прибора в контейнере, где величина

$$J_g(\mathbf{u}_v)=\max_t\max_{p\in P}\langle\mathbf{r}_p(t;\ \mathbf{u}_v),\ \mathbf{g}\rangle-\max_{p\in P}\langle\mathbf{r}_p(0),\ \mathbf{g}\rangle$$

есть ход прибора по направлению $\mathbf{g}$ [1]. В итоге задача оптимальной амортизации сводится к поиску управления $\mathbf{v}^*(\cdot)\in V$ (называемого оптимальным), такого, что его реализация $\mathbf{u}_v^*(t)$ доставляет минимум функционалу качества (1.5), т. е.

$$J(\mathbf{u}_v^*)=\min J(\mathbf{u}_v),\ \mathbf{u}_v\in U \tag{1.6}$$

Пусть величинами уклонений прибора от своего начального положения, получаемых при его вращениях вокруг центра масс, можно пренебречь. Например, когда отношение этих уклонений к величине хода прибора достаточно мало. Тогда форму прибора можно заменить шаром с центром в точке c и радиусом l (равным расстоянию от точки c до максимально удаленной точки прибора), т. е. положить $P=\{p:\|\rho_p\|\leqslant l\}$. В этом случае угловая компонента управления непосредственно не влияет на величину хода прибора и естественно допустить, что в оптимальном управлении ее можно положить равной нулю. С другой стороны, повороты прибора изменяют ориентацию зоны C_W^0 и множества P_W, что, вообще говоря, отражается на возможностях управления движением прибора вдоль различных направлений в контейнере. Далее сформулированы условия, при которых существует оптимальное управление с нулевым вращающим моментом при любых внешних воздействиях и начальных условиях.

Утверждение. Пусть зона допустимых ускорений — шар, т. е. множество Γ содержит все направления в приборе, а $\alpha_\gamma=\alpha$, центр масс прибора c принадлежит выпуклой оболочке множества P_W и $\boldsymbol{\omega}^0=\mathbf{0}$. Тогда и только тогда для любых $\boldsymbol{\sigma}(t)$, G, $\mathbf{r}_c^0$, $\dot{\mathbf{r}}_c^0$, $\boldsymbol{\varphi}^0$ существует оптимальное управление $\mathbf{v}^*=(\mathbf{v}_c^*, \mathbf{v}_\theta^*)$, такое, что $\mathbf{v}_\theta^*\equiv\mathbf{0}$.

Доказательство. Рассмотрим управление $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_\theta)$ и управление $\mathbf{v}^0=(\mathbf{v}_c^*, \mathbf{0})$, полученное из $\mathbf{v}$ подстановкой $\mathbf{v}_\theta\equiv\mathbf{0}$. Их реализации обозначим, соответственно, $\mathbf{u}_v(t)$ и $\mathbf{u}_v^0(t)$. Покажем, что $J_g(\mathbf{u}_v)=J_g(\mathbf{u}_v^0)$ при любом $\mathbf{g}$. Учитывая равенства $\mathbf{r}_p=\mathbf{r}_c+B^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\rho}_p$, $\max_{p\in P}\langle B^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\rho}_p, \mathbf{g}\rangle=l$, запишем при любом $\mathbf{g}$:

$$J_g(\mathbf{u}_v)=\max_t \max_{p\in P}\langle \mathbf{r}_c(t;\ \mathbf{u}_c)+B^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(t;\ \mathbf{u}_\theta))\boldsymbol{\rho}_p, \mathbf{g}\rangle-\langle \mathbf{r}_c^0, \mathbf{g}\rangle-l=$$
$$=\max_t[\langle \mathbf{r}_c(t;\ \mathbf{u}_c)-\mathbf{r}_c^0, \mathbf{g}\rangle-\max_{p\in P}\langle B^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(t;\ \mathbf{u}_\theta))\boldsymbol{\rho}_p, \mathbf{g}\rangle-l]=$$
$$=\max_t\langle \mathbf{r}_c(t;\ \mathbf{u}_c)-\mathbf{r}_c^0, \mathbf{g}\rangle=J_g(\mathbf{u}_v^0)$$

Покажем далее, что если управление $\mathbf{u}_v$ допустимо ($\mathbf{u}_v\in U$), то и $\mathbf{u}_v^0$ допустимо. Используя равенство $\boldsymbol{\omega}^0=\mathbf{0}$, запишем

$$I_\gamma(\mathbf{u}_v^0)=\max_t \max_{p\in P_W}\langle \mathbf{w}_p^\pi(t;\ \mathbf{u}_v^0), \boldsymbol{\gamma}\rangle=$$
$$=\max_t \max_{p\in P_W}\langle \mathbf{u}_c^\pi(t)+\boldsymbol{\omega}^{0\pi}\times(\boldsymbol{\omega}^{0\pi}\times\boldsymbol{\rho}_p), \boldsymbol{\gamma}\rangle=\max_t\langle \mathbf{u}_c^\pi(t), \boldsymbol{\gamma}\rangle$$

Теперь условие $I_\gamma(\mathbf{u}_v^0)\leqslant\alpha$, $\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma$ можно свести к неравенству

$$\max_{\gamma\in\Gamma}\max_t\langle \mathbf{u}_c^\pi(t), \boldsymbol{\gamma}\rangle\leqslant\alpha \tag{1.7}$$

Для любого вектора $\mathbf{b}$ и матрицы поворота B выполнено

$$\max_{\|\gamma\|=1}\langle \mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}\rangle=\|\mathbf{b}\|,\ \|B\mathbf{b}\|=\|\mathbf{b}\| \tag{1.8}$$

Отсюда, с учетом равенства $\mathbf{u}_c^\pi=B(\boldsymbol{\varphi})B(\boldsymbol{\psi})\mathbf{u}_c$ следует эквивалентность неравенства (1.7) неравенству $\|\mathbf{u}_c\|\leqslant\alpha$.

С другой стороны, значение выражения (1.3) не изменится, если максимум берется по точкам p, принадлежащим выпуклой оболочке множества P_W [1]. Поскольку точка c принадлежит этой оболочке и $\mathbf{w}_c^\pi(t;\ \mathbf{u}_v)=\mathbf{u}_c^\pi(t)$, можно записать

$$I_\gamma(\mathbf{u}_v)=\max_t \max_{p\in \mathrm{co}\, P_W}\langle \mathbf{w}_p^\pi(t;\ \mathbf{u}_v), \boldsymbol{\gamma}\rangle\geqslant\max_t\langle \mathbf{w}_c^\pi(t;\ \mathbf{u}_v), \boldsymbol{\gamma}\rangle=\max_t\langle \mathbf{u}_c^\pi(t), \boldsymbol{\gamma}\rangle$$

Отсюда видно, что условие $I_\gamma(\mathbf{u}_v)\leqslant\alpha$ влечет условие (1.7), т. е. управление $\mathbf{u}_v^0$ допустимо.

Множество U допустимых программных управлений слабо компактно (например, в метрике L_2), функционал $J(\mathbf{u}_v)$ непрерывен. В силу теоремы Вейерштрасса существует некоторое оптимальное управление $\mathbf{u}_v^*=(\mathbf{u}_c^*, \mathbf{u}_\theta^*)$. Тогда, по доказанному, управление $\mathbf{u}_v^0=(\mathbf{u}_c^*, \mathbf{0})$ допустимо и $J(\mathbf{u}_v^0)=J(\mathbf{u}_v)$. Значит, управление $\mathbf{u}_v^0$ будет также оптимальным.

Обратно, если условия утверждения не выполняются, то существуют такие $\sigma(t)$, G, $\mathbf{r}_c^0$, $\mathbf{r}_c^{\cdot 0}$, φ^0, что среди управлений вида $\mathbf{v}^0=(\mathbf{v}_c, \mathbf{0})$ не будет оптимального. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $\mathbf{r}_c^{\cdot 0}=\mathbf{0}$.

Пусть зона допустимых ускорений отлична от шара. Тогда найдутся два направления в приборе γ_1 и γ_2, такие, что $\alpha_{\gamma_1}<\alpha_{\gamma_2}$. Рассмотрим воздействие $\sigma=(\sigma_0, \sigma_\psi)$, у которого компонента $\sigma_\psi\equiv 0$, а σ_0 — постоянное по направлению ускорение контейнера, в начальный момент времени ориентированное вдоль вектора γ_1, равное нулю при $t<t'$ и $t\geqslant t''$ и удовлетворяющее неравенству $\alpha_{\gamma_1}<\|\sigma_0\|\leqslant\alpha_{\gamma_2}$ при $t'\leqslant t<t''$. Момент t' выбирается так, чтобы существовало допустимое управление $\mathbf{v}^*=(\mathbf{v}_c^*, \mathbf{v}_\theta^*)$, в котором компонента $\mathbf{v}_\theta^*$ обеспечивает поворот прибора, совмещающий направление γ_2 с направлением воздействия к этому моменту, а компонента $\mathbf{v}_c^*=0$ при $t<t'$. При $t\geqslant t''$ положим $\mathbf{v}_c^*=\sigma_0$ (жесткое крепление прибора к контейнеру). Управление $\mathbf{v}^*$ будет допустимым и оптимальным, поскольку $J(\mathbf{u}_v^*)=0$, а управление $\mathbf{v}^0$ недопустимо.

Пусть центр масс c не принадлежит выпуклой оболочке множества P_W. Тогда найдется точка, такая, что из нее можно провести сферу радиуса R, содержащую внутри себя множество P_W и отделяющую его от точки c. Поместим начало отсчета системы координат, связанной с контейнером, в эту точку. Рассмотрим внешнее воздействие $\sigma=(0, \sigma_\psi)$, приводящее к вращательному движению контейнера вокруг точки o и такое, что $R(\|\sigma_\psi(t)\|^2+\|\Omega(t)\|^4)^{1/2}\leqslant\alpha$, причем найдется момент времени, при котором достигается равенство. Ускорение всех точек контейнера внутри сферы радиуса R будут принадлежать зоне допустимых ускорений. Поэтому управление $\mathbf{v}_c^{*k}=\Omega^k\times(\Omega^k\times\mathbf{r}_c^0)+\sigma_\psi^k\times\mathbf{r}_c^0$, $\mathbf{v}_\theta^*\equiv\sigma_\psi$, задающее в данном случае жесткое крепление прибора к контейнеру, будет допустимым и оптимальным, $J(\mathbf{u}_v^*)=0$, а полученное из него управление $\mathbf{v}^0$ недопустимо, поскольку $\|\mathbf{r}_c^0\|>R$ и существует t', при котором $\max_t I_\gamma(\mathbf{u}_v^0)=\max_t\|\mathbf{u}_c^*(t)\|=$ $=\|\mathbf{r}_c^0\|(\|\sigma_\psi(t')\|^2+\|\Omega(t')\|^4)^{1/2}>\alpha$.

Пусть, наконец, начальная угловая скорость ω^0 отлична от нулевого вектора. Тогда точки из множества P_W испытывают центростремительное ускорение. Рассмотрим воздействие, такое, что $\sigma_\psi\equiv 0$, а $\sigma_0=0$ при $t<t'$ и $t\geqslant t''$, $\|\sigma_0\|=\alpha$ при $t'\leqslant t<t''$. Управление такое, что $\mathbf{v}_\theta^*$ гасит угловую скорость за время t' и затем равно нулю, а $\mathbf{v}_c^*=0$ при $t<t'$ и $\mathbf{v}_c^*=\sigma_0$ при $t\geqslant t'$ будет оптимальным, а управление $\mathbf{v}^0$ недопустимо. Утверждение доказано.

2. Пусть выполнены все условия утверждения, множество G содержит все направления в контейнере и $\mathbf{r}_c^{\cdot 0}=0$. В силу утверждения при решении задачи (1.6) можно положить $\mathbf{v}_\theta^*\equiv 0$. Функционал качества (1.5) с учетом (1.2) и (1.8) примет следующий вид:

$$J(\mathbf{u}_v)=\max_t\left\|\int_0^t\int_0^\tau(\mathbf{u}_c(\nu)-\sigma_0(\nu))\,d\nu\,d\tau\right\|$$

Ограничения (1.4) примут вид $\|\mathbf{u}_c\|\leqslant\alpha$. В результате задача (1.6) сведется к следующей задаче: найти управление $\mathbf{v}_c^*=\mathbf{v}_c^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot, \sigma_0)$, такое, что

$$\max_t\|\mathbf{q}(t;\ \mathbf{u}_c^*)\|=\min_{\|\mathbf{u}_c\|\leqslant\alpha}\max_t\|\mathbf{q}(t;\ \mathbf{u}_c)\| \tag{2.1}$$

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=\mathbf{u}_c-\sigma_0,\ \mathbf{q}(0)=\mathbf{q}^\cdot(0)=\mathbf{0},\ \mathbf{q}=B^{-1}(\psi)(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_c^0)$$

где $\mathbf{u}_c^*(t)=\mathbf{v}_c^*(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}^\cdot(t), \sigma_0(t))$ — реализация характеристики $\mathbf{v}_c^*$ на решениях уравнения $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=\mathbf{v}_c^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot, \sigma_0)-\sigma_0$, $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}^\cdot(0)=\mathbf{0}$.

Задача (2.1) может быть решена с привлечением численных методов, изложенных в [5]. Здесь рассмотрим распространенный случай воздействий, угловая компонента которых произвольна, а поступательная компонента — постоянный по направлению удар $\sigma_0=\mathbf{a}\sigma(t)$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор направления в пространстве, $\|\mathbf{a}\|=1$, $\sigma(t)$ — произвольная скалярная функция.

Утверждение. В задаче (2.1) с воздействием $\sigma_0=\mathbf{a}\sigma(t)$ существует решение вида $\mathbf{v}_c^*=\mathbf{a}v^*(\cdot)$, где скалярная функция $v^*=v^*(q, q^\cdot\sigma)$ и ее реализация $u^*(t)$ такие, что

$$\max_t |q(t;\ u^*)| = \min_{|u|\leqslant\alpha} \max_t |q(t;\ u)| \qquad (2.2)$$

$$q^{\cdot\cdot} = u - \sigma,\ q(0) = q^{\cdot}(0) = 0,\ q = \langle B^{-1}(\psi)(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_c^0),\ \mathbf{a}\rangle$$

Для доказательства, наряду с некоторым решением $\mathbf{v}_c^*$ задачи (2.1), достаточно рассмотреть управление $\mathbf{v}_c' = \mathbf{a}\langle\mathbf{a},\ \mathbf{v}_c^*\rangle$, которое также оказывается оптимальным, а скалярное управление $v^* = \langle\mathbf{a},\ \mathbf{v}_c^*\rangle$ будет удовлетворять условиям задачи (2.2).

Исследованию и решению задачи (2.2) при различных предположениях о виде внешнего воздействия и управления посвящен ряд работ (см., например, [2–8]). Все полученные там результаты соответствующим образом переносятся на рассматриваемую задачу.

Пусть, например, на контейнер действует мгновенный удар $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\beta}\delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция. Компоненты вектора $\boldsymbol{\beta} = (\beta_X,\ \beta_Y,\ \beta_Z)$ задают величины скачкообразного изменения скорости контейнера (точнее, скорости начала координат системы $Oxyz$) вдоль неподвижных осей. Угловое ускорение контейнера – произвольное. Такого вида воздействия возникают, например, при падении контейнера на жесткое основание. Вид воздействия позволяет перейти к задаче (2.2) со скалярным воздействием $\sigma = \|\boldsymbol{\beta}\|\delta(t)$. Известно [6], что управление $v^*(q,\ q^{\cdot}) = -2\alpha^2\|\boldsymbol{\beta}\|^{-2}q - \alpha\|\boldsymbol{\beta}\|^{-2}|q^{\cdot}|q^{\cdot}$ решает эту задачу.

Возвращаясь к пространственной задаче, рассмотрим множество Σ_1 воздействий, таких, что $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{a}\|\boldsymbol{\beta}\|\delta(t)$, $\mathbf{a}$ – любой вектор единичной длины, $\boldsymbol{\sigma}_\psi(t)$ – любое, а также динамическую характеристику $\mathbf{v}_c^* = \mathbf{a}v^*(q,\ q^{\cdot})$, $\mathbf{v}_\theta^* \equiv \mathbf{0}$. С учетом того, что $\mathbf{a} = \|\boldsymbol{\beta}\|^{-1}\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{a}q = B^{-1}(\psi)(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_c^0)$, $\mathbf{a}|q^{\cdot}|q^{\cdot} = \|\mathbf{r}_c^{\cdot}\|B^{-1}(\psi)\mathbf{r}_c^{\cdot}$, поступательная компонента характеристики примет вид $\mathbf{v}_c^{*k}(\mathbf{r}_c,\ \mathbf{r}_c^{\cdot}) = -2\alpha^2\|\boldsymbol{\beta}\|^{-2}(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_c^0) - \alpha\|\boldsymbol{\beta}\|^{-2}\|\mathbf{r}_c^{\cdot}\|\mathbf{r}_c^{\cdot}$. Данная характеристика решает задачу минимизации зазоров между прибором и контейнером для любого воздействия из множества Σ_1. Она соответствует системе амортизации, реализующей линейную упругость и квадратичное демпфирование при относительных смещениях центра масс прибора в любых направлениях и не передающей на прибор угловых ускорений контейнера.

В качестве второго примера рассмотрим множество Σ' скалярных воздействий $\sigma(t)$ с одним пересечением уровня α (существует момент времени τ: $|\sigma(t)| \geqslant \alpha$ при $t < \tau$, $|\sigma(t)| \leqslant \alpha$ при $t \geqslant \tau$). Для этих воздействий управление [2, 8]

$$v^*(q,q^{\cdot},\sigma) = \begin{cases} -\alpha\,\mathrm{sign}\,q^{\cdot} & (q^{\cdot} \neq 0) \\ \alpha\,\mathrm{sign}\,\sigma & (q^{\cdot} = 0,\ |\sigma| > \alpha) \\ \sigma & (q^{\cdot} = 0,\ |\sigma| \leqslant \alpha) \end{cases}$$

является решением задачи (2.2).

Для пространственной системы амортизации рассмотрим множество Σ_2 воздействий, таких, что $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{a}\sigma(t)$, где $\mathbf{a}$ – любой вектор единичной длины, $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma'$, $\boldsymbol{\sigma}_\psi(t)$ – произвольная функция времени. Заметим, что $\mathbf{a}\,\mathrm{sign}\,q^{\cdot} = \|\mathbf{r}_c^{\cdot}\|^{-1}B^{-1}(\psi)\mathbf{r}_c^{\cdot}$ ($\|\mathbf{r}_c^{\cdot}\| \neq 0$), $\mathbf{a}\,\mathrm{sign}\,\sigma = \|\boldsymbol{\sigma}_0\|^{-1}\boldsymbol{\sigma}_0$.

Динамическая характеристика амортизаторов, оптимальная на множестве Σ_2, примет вид

$$\mathbf{v}_\theta^* \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_c^{*k} = \begin{cases} -\alpha\|\mathbf{r}_c^{\cdot}\|^{-1}\mathbf{r}_c^{\cdot} & (\|\mathbf{r}_c^{\cdot}\| \neq 0) \\ \alpha\|\boldsymbol{\sigma}_0\|^{-1}\boldsymbol{\sigma}_0^k & (\|\mathbf{r}_c^{\cdot}\| = 0,\ \|\boldsymbol{\sigma}_0\| > \alpha) \\ \boldsymbol{\sigma}_0 & (\|\mathbf{r}_c^{\cdot}\| = 0,\ \|\boldsymbol{\sigma}_0\| \leqslant \alpha) \end{cases}$$

Она соответствует системе амортизации, реализующей закон сухого трения при смещениях центра масс прибора относительно контейнера и не передающей на прибор угловых ускорений контейнера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулагин В. В., Проурзин В. А.* Оптимальное управление пространственным движением амортизируемого твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 8–15.
2. *Гурецкий В. В.* Предельные возможности защиты оборудования от воздействия ударов // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 76–81.

3. Вибрации в технике. Справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. М.: Машиностроение. 1981. 456 с.
4. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука. 1976. 319 с.
5. Негладкие задачи теории оптимизации и управления/В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, Н. А. Печерская и др. / Под ред. В. Ф. Демьянова. Л.: Изд-во ЛГУ. 1982. 322 с.
6. *Болотник Н. Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука. 1983. 257 с.
7. *Саранчук В. Г., Троицкий В. А.* К синтезу оптимальных амортизаторов // Механика и процессы управления. Вычислительная математика: Тр. ЛПИ. 1971. Вып. 318. С. 43—49.
8. *Кулагин В. В.* Об одной игровой задаче синтеза оптимальных систем // Управление, надежность и навигация. Саранск, 1979. Вып. 5. С. 25—31.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.XII.1985