**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988**

УДК 531.55:521.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

ВОРОТНИКОВ В. И.

С помощью нелинейных преобразований и теории неявных функций получены достаточные условия оптимальной стабилизации невозмущенного движения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение объекта управления. В качестве примера решается задача оптимальной стабилизации спутника на круговой орбите.

1. Пусть возмущенное движение объекта управления описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (в векторной форме)

$$\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{X}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u})\quad (\mathbf{X}(t,\ 0,\ 0)\equiv 0) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x}\in R^n,\quad \mathbf{u}\in R^r,\quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n),\quad \mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_r)$$

правые части которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными по t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ до второго порядка включительно в области

$$t\geqslant 0,\quad \|\mathbf{x}\|<H>0,\quad \|\mathbf{u}\|<+\infty \tag{1.2}$$

Вектор управляющих воздействий ищем в классе вектор-функций $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t,\ 0)\equiv 0$, непрерывно дифференцируемых в области D: $t\geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\|<H>0$; в этом случае правые части замкнутой системы (1.1) удовлетворяют в области D условиям теоремы существования и единственности решений.

Необходимо вектор управляющих воздействий $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})$ подобрать так, чтобы невозмущенное движение $x=0$ системы (1.1) было асимптотически устойчиво по отношению ко всем переменным $x_1,\ldots,x_n$ (по Ляпунову) [1] или по отношению к части этих переменных [2] и на траекториях системы (1.1) минимизировался некоторый функционал, характеризующий переходный процесс в системе и мощность затрачиваемых на стабилизацию управлений.

Известно [1—7], что если в выборе минимизируемого функционала руководствоваться только исходной технической потребностью, то возможности получения решения в строгой замкнутой форме становятся ограниченными вследствие трудностей в построении оптимальных функций Ляпунова. Но и в тех редких случаях, когда аналитическое решение найдено, оно все равно нуждается в корректировке, ибо многие практические требования, предъявляемые к замкнутым системам управления, часто носят противоречивый характер и не всегда поддаются формализации. Чаще после получения первого решения вносят корректировку в минимизируемый функционал и вновь находят решение. Так, в [3, 4] практическая процедура аналитического конструирования рассматривается как итерационная, причем отмечается, что для того, чтобы процесс приближения к оптимальному, в практическом смысле, решению поддавался контролю со стороны конструктора регулятора, необходима простота однократного решения задачи.

Предлагаемая ниже методика изучения задачи оптимальной стабилизации согласуется в целом с подходами [1—7]. Однако в отличие от [1—7] оптимальные стабилизирующие законы управления для исходной нелинейной системы строятся на базе решения задач оптимальной стабилизации линейных стационарных систем вида $\rho_i^{\cdot\cdot}=u_i^{\vee}$ $(i=1,\ldots,r)$ с квадратичными функционалами качества. Указанные линейные системы получаются из исходных нелинейных систем в результате нелинейных преобразований, рассмотренных в [8, 9] (но не отбрасыванием нелинейных членов), что позволяет достичь простоты решения без потери качества управления за счет упрощения задачи.

2. Допустим, управляющие воздействия входят в первые l $(n-l\geqslant r)$ уравнений системы (1.1), т. е. уравнения (1.1) имеют вид

$$\xi^{\cdot}=\mathbf{X}^{(1)}(\xi,\ \eta,\ \mathbf{u}),\ \eta^{\cdot}=X^{(2)}(\xi,\ \eta);\ \mathbf{x}=(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}),\ X=(X^{(1)},\ X^{(2)}) \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\xi},\ X^{(1)}\in R^{l},\ \boldsymbol{\eta},\ X^{(2)}\in R^{n-l};\ \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_l),\ \boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_{n-l})$$

Кроме того, предположим, что переменные x_i $(i=1,\ldots,n)$, входящие в вектор $\mathbf{x}$, связаны соотношениями

$$Y_i(\mathbf{x})=0,\ Y_i(0)=0\ \ (i=1,\ldots,k\geqslant n-2r) \tag{2.2}$$

причем функции $Y_i(\mathbf{x})$ $(i=1,\ldots,k)$ непрерывны вместе со своими частными производными по $\mathbf{x}$ в области (1.2). Если $2r\geqslant n$, т. е. удвоенная размерность вектора управляющих воздействий больше размерности системы (2.1), то можно рассматривать систему (2.1), фазовые переменные x_i $(i=1,\ldots,n)$ которой не связаны, вообще говоря, дополнительными соотношениями (2.2). Рассмотрим функции

$$\Phi_i(\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial X^{(2)}}{\partial \xi_j}X_j^{(1)}+\sum_{s=1}^{n-l}\frac{\partial X_i^{(2)}}{\partial \eta_s}X_s^{(2)}\qquad(i=1,\ldots,n-l)$$

и введем матрицу Якоби [10] $F(x,\ u)=(\partial\Phi_i/\partial u_j)$ от функций Φ_i $(i=1,\ldots,n-l)$ по переменным u_j $(j=1,\ldots,r)$.

Пусть $\operatorname{rank} F(0,0)=r$ и пусть, не нарушая общности рассуждений, в матрицу $F(0,0)$ линейно независимы первые r строк. Обозначим $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\rho}=(\eta_1,\ldots,\eta_r)$, $\boldsymbol{\mu}=(\eta_{r+1},\ldots,\eta_{n-l})$ и введем матрицу Якоби $\Psi(\mathbf{x})$ от функций $X_i^{(2)}$ $(i=1,\ldots,r)$, Y_j $(j=1,\ldots,k)$ по переменным $\xi_1,\ldots,\xi_l,\ \eta_{r+1},\ldots,\eta_{n-l}$.

Рассмотрим равенства

$$\Phi_i(\mathbf{x},\ \mathbf{u})=u_i^{\wedge}\ \ (i=1,\ldots,n-l) \tag{2.3}$$

Поскольку $\operatorname{rank} F(0,\ 0)=r$, то на основании теории неявных функций [10] в окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ при всех $\mathbf{u}^{\vee}$ существует решение системы (2.3):

$$\mathbf{u}=f(\mathbf{x},\mathbf{u}^{\vee}),\ \mathbf{u}^{\vee}=(u_1^{\vee},\ldots,u_r^{\vee}),\ f\in R^r \tag{2.4}$$

где функция $f(\mathbf{x},\ \mathbf{u}^{\vee})$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $\mathbf{x}=0$ при всех $\mathbf{u}^{\vee}$, причем $f(0,0)\equiv 0$.

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $\eta^{\cdot\cdot}=\Phi(x,\ u)$ и в силу условия $\operatorname{rank} F(0,0)=r$ существует окрестность точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$, в которой из замкнутой системы (2.1), (2.4) можно выделить уравнения

$$\rho_i^{\cdot\cdot}=u_i^{\wedge}\ \ (i=1,\ldots,r) \tag{2.5}$$

Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации нулевого решения $\rho_i=\rho_i^{\cdot}=0$ $(i=1,\ldots,r)$ системы (2.5) в классе непрерывно дифференцируемых при всех $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}^{\cdot}$ функций $u_i^{\vee}(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho}^{\cdot})$, $u_i^{\vee}(0,0)=0$ $(i=1,\ldots,r)$. При этом возникает вопрос о выборе минимизируемого функционала. Удобные в практическом отношении принципы выбора функционала сформулированы в [1]. Этим принципам удовлетворяет, например, функционал вида

$$I_i=\int_{t_0}^{\infty}(a_i\rho_i^2+b_i\rho_i^{\cdot 2}+c_iu_i^{\vee 2})\,dt\qquad(i=1,\ldots,r) \tag{2.6}$$

встречающийся во многих технических задачах, описываемых системой (2.5). Постоянные коэффициенты a_i, b_i, c_i $(i=1, \ldots, r)$, $a_i>0$, $b_i\geqslant 0$, $c_i>0$ пока не задаем, поскольку важно найти решение задачи (2.5), (2.6) в зависимости от a_i, b_i, c_i $(i=1, \ldots, r)$.

Методом динамического программирования [11] можно показать, что при

$$u_i^{\vee}=(d_i\rho_i+d_{i+1}\rho_i^{\cdot})/c_i \tag{2.7}$$

$$d_i=-\sqrt{a_ic_i},\ d_{i+1}=-\sqrt{(b_i-2d_i)c_i}\ (i=1, \ldots, r)$$

решение $\rho_i=\rho_i^{\cdot}=0$ $(i=1, \ldots, r)$ каждой из подсистем замкнутой системы (2.5), (2.7) экспоненциально асимптотически устойчиво, причем на траекториях каждой из подсистем минимизируется функционал (2.6).

При выполнении условия $\operatorname{rank}\Psi(0)=n-r$ на основании теории неявных функций [10] в окрестности точки $x=0$ равенства $X_i^{(2)}=0$ $(i=1, \ldots, r)$, $Y_j(x)=0$ $(j=1, \ldots, k)$ допускают непрерывные решения

$$x_i=\varphi_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}^{\cdot}),\ \varphi_i(0,\ 0)=0\ (i=1, \ldots, n;\ i=l+1, \ldots, l+r) \tag{2.8}$$

которые связывают все переменные x_i $(i=1, \ldots, n)$ системы (2.1), не входящие в вектор $\boldsymbol{\rho}$, и переменные ρ_i, $\rho_i^{\cdot}$ $(i=1, \ldots, r)$. Эта связь, в частности, означает, что стабилизация движения $\mathbf{x}=0$ системы (2.1) по отношению к $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}^{\cdot}$ фактически означает стабилизацию по всем переменным x_i $(i=1, \ldots, n)$, характеризующим состояние системы (2.1).

Справедлива следующая теорема, доказательство которой вынесено в приложение.

Теорема 1. Если выполняются условия 1°. $\operatorname{rank} F(0, 0)=r$; 2°. $\operatorname{rank}\Psi(0)=n-r$, то невозмущенное движение $\mathbf{x}=0$ системы (2.1), (2.4), (2.7) асимптотически устойчиво, причем на траекториях системы (2.1), (2.4), (2.7) минимизируется функционал

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{r}\left[a_ix_{l+i}^2+b_iX_i^{(2)2}(\mathbf{x})+c_i\Phi_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right]\right\}dt \tag{2.9}$$

подынтегральная функция в котором — определенно-положительная по переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$.

Доказательство. Поскольку уравнения (2.5) получаются в результате нелинейного преобразования системы (2.1), (2.4), то из экспоненциальной асимптотической устойчивости решения $\rho_i=\rho_i^{\cdot}=0$ $(i=1, \ldots, r)$ системы (2.5), (2.7) следует экспоненциальная асимптотическая устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x}=0$ системы (2.1), (2.4), (2.7) по ρ_i, $\rho_i^{\cdot}$ $(i=1, \ldots, r)$. Покажем, что проведенная стабилизация по части переменных фактически является стабилизацией по всем переменным x_i $(i=1, \ldots, n)$, характеризующим состояние системы (2.1). Действительно, при выполнении условия 2° справедливы соотношения (2.8), в которых модуль функций φ_i $(i=1, \ldots, n;\ i\neq l+1, \ldots, l+r)$ можно сделать сколь угодно малым за счет уменьшения модулей ρ, $\rho^{\cdot}$. Следовательно, из асимптотической устойчивости движения $x=0$ системы (2.1), (2.4), (2.7) по ρ_i, $\rho_i^{\cdot}$ $(i=1, \ldots, r)$ следует асимптотическая устойчивость по всем переменным x_i $(i=1, \ldots, n)$.

Система (2.4), (2.7) распадается на r независимых подсистем, на траекториях системы (2.4), (2.7) минимизируется функционал $I=\Sigma I_i$, $i=1, \ldots, r$, который в силу (2.3), равенств $X_i^{(2)}=\rho_i^{\cdot}$ и свойства аддитивности интеграла принимает вид (2.9). Значит, на траекториях системы (2.1), (2.4), (2.7) минимизируется функционал (2.9).

Покажем, что подынтегральная функция $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ в (2.9) определенно-положительная в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Поскольку $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})\geqslant 0$, то достаточно показать, что $R=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$, $u=0$. Пусть $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Учитывая $\rho_i=x_{l+1}$, $X_i^{(2)}(0)=0$, $\Phi_i(0,\ 0)=0$ $(i=1, \ldots, r)$, заключаем, что $R(0,\ 0)=0$. Допустим обратное, $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})=0$. Поскольку $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $\gamma_i>0$ $(i=1, \ldots, r)$, то справедливы равенства

$$\rho_i=0,\quad X_i^{(2)}=0,\quad \Phi_i=0\quad (i=1, \ldots, r) \tag{2.10}$$

В некоторой окрестности точки $x=0$ справедливы соотношения (2.8); поэтому на основании первых двух групп равенств (2.10) выполняются равенства $\varphi_i=0$ $(i=1, \ldots, n;\ i\neq l+1, \ldots, l+r)$, которые в совокупности с первой группой равенств (2.10) означают, что $x_i=0$ $(i=1, \ldots, n)$. В окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ справедливы также равенства (2.4), из которых, при выполнении соотношений $x_i=0$ $(i=1, \ldots, n)$ и последних двух групп равенств (2.10) следуют равенства $u_i=0$

($i=1, 2, 3$). Поэтому из (2.10) следуют равенства $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Значит, функция $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ определённо-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Теорема доказана.

Пусть условие 1° теоремы 1 выполняется в области

$$\|\mathbf{x}\|<h_1,\ \|\mathbf{u}\|<h_2 \tag{2.11}$$

а условие 2° — в области $\|\mathbf{x}\|<h_3$ ($h_i=\text{const}>0$, $i=1, 2, 3$). Поскольку $\mathbf{u}=f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\vee(\mathbf{x}))$, то неравенства (2.11) определяют некоторую область $\|\mathbf{x}\|<h_4=\text{const}>0$ изменения переменных x_i ($i=1,\ldots,n$); для этого достаточно отобрать из области $\|\mathbf{x}\|<h_1$ те значения x (в частности, это могут быть все значения x), которые удовлетворяют неравенству $\|\mathbf{u}\|=\|f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\vee(\mathbf{x}))\|<h_2$. Обозначим $h^*=\min(h_3, h_4)$.

Следствие 1. Пусть условие 1° теоремы 1 выполняется в области (2.11), а условие 2° — в области $\|\mathbf{x}\|<h_3$. Тогда движение $\mathbf{x}=0$ системы (2.1), (2.4), (2.7) асимптотически устойчиво в области $\|\mathbf{x}\|<h^*$, причем на траекториях системы (2.1), (2.4), (2.7) минимизируется функционал (2.9), подынтегральная функция в котором — определенно-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в области $\|\mathbf{x}\|<h^*$, $\|\mathbf{u}\|<h_2$.

Доказательство. Если условие 1° выполнено в области (2.11), то на основании теории неявных функций в (2.11) существует решение (2.4) уравнений (2.3), причем функция $\mathbf{u}=f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\vee)$, $f(0, 0)=0$ непрерывно дифференцируема в (2.11) при всех $u^\vee$. Значит, в (2.11) из замкнутой системы (2.1), (2.4) можно выделить уравнения (2.5), (2.7). Если условие 2° выполнено в области $\|x\|<h_3>0$, то в этой области справедливо соотношение (2.8). Значит, в области $\|x\|<h^*>0$ из асимптотической устойчивости движения $x=0$ системы (2.1), (2.4), (2.7) по ρ, $\dot\rho$ следует асимптотическая устойчивость по всем переменным x_i ($i=1,\ldots,n$). Доказательство определенной положительности в $\|\mathbf{x}\|<h^*$, $\|\mathbf{u}\|<h_2$ подынтегральной функции из (2.9) проводится по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1.

3. Характеризуя смысл функционала (2.9) в процессе стабилизации, отметим, что поведение переменных ρ_i, $\dot\rho_i$ ($i=1,\ldots,r$), а следовательно, и переменных $x_{l+1},\ldots,x_{l+r}$ исходной системы (2.1) определяется системой (2.5) и качеством переходного процесса по переменным $x_{l+1},\ldots,x_{l+r}$ в исходной системе (2.1) можно управлять меняя постоянные a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) в функционалах (2.6) при решении задачи оптимальной стабилизации системы (2.5). При этом качество переходного процесса в системе (2.1) по оставшимся переменным x_i ($i=1,\ldots,n$; $i\neq l+1,\ldots,l+r$) и затраты ресурсов на формирование управлений u_j ($j=1,\ldots,r$) оцениваются по зависимостям (2.4), (2.8). В результате постоянные a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) в функционалах (2.6) могут быть выбраны так, чтобы добиться желаемого качества переходного процесса по отношению ко всем переменным x_i ($i=1,\ldots,n$) в исходной системе (2.1) при удовлетворительной затрате ресурсов на управления u_i ($i=1,\ldots,r$). Отметим, что относительная простота однократного решения задачи позволяет сделать процесс приближения к оптимальному в практическом смысле решению итерационным, поскольку конструктор регулятора в состоянии контролировать поведение каждой переменной x_i ($i=1,\ldots,n$) и величину всех управляющих воздействий. Указанное обстоятельство имеет существенное значение, ибо лишь в отдельных случаях удачного подбора функционала первое полученное решение удовлетворяет всем требованиям практики.

В целом предлагаемый подход примыкает к полуобратным методам решения задач оптимальной стабилизации [2—4, 6, 7], разработку которых обусловили трудности (сильно возрастающие в случае нелинейных систем) построения оптимальных функций Ляпунова и стремление сделать поиск оптимального в практическом смысле решения более рациональным. Однако в отличие от [1—7] оптимальные стабилизирующие законы управления для исходной нелинейной системы строятся на базе решения задач оптимальной стабилизации линейных стационарных систем вида $\ddot\rho_i=u_i^\vee$ ($i=1,\ldots,r$) с квадратичными функционалами качества. Это позволяет обеспечить простоту однократного решения задачи (решение может быть получено в замкнутой форме без использования ЭВМ), относительную простоту итерационного поиска, приемлемого с точки зрения практики решения (поиск ведется по зависимостям, полученным в аналитической замкнутой форме), простоту оценки области притяжения невозмущенного движения. Кроме того, полученные законы стабилизации будут обладать свойством грубости (стабильности) по отношению к неизбежным на практике постоянно действующим (в том числе и параметрическим) возмущениям.

4. Рассмотрим равенства

$$X_j^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u})=u_j^\vee \quad (j=1,\ldots,m<r) \tag{4.1}$$

$$\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})=u_{m+i}^\vee \quad (i=1,\ldots,n-l) \tag{4.2}$$

и введем матрицу Якоби $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ от функций $X_j^{(1)}$ $(j=1, \ldots, m)$, Φ_i $(i=1, \ldots, n-l)$ по переменным u_j $(j=1, \ldots, r)$.

Пусть $\operatorname{rank} Q(0, 0)=r$ и пусть, не нарушая общности рассуждений, в $Q(0, 0)$ линейно независимы первые r строк. Введем также матрицу Якоби $P(\mathbf{x})$ от функций $X_i^{(2)}$ $(i=1, \ldots, r-m)$, Y_j $(j=1, \ldots, k)$ по переменным $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_l, \eta_{r-m+1}, \ldots, \eta_{n-l}$.

Поскольку $\operatorname{rank} Q(0, 0)=r$, то на основании теории неявных функций в окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ при всех $u^\vee$ существует решение

$$\mathbf{u}=f^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\vee), \quad \mathbf{u}^\vee=(u_1^\vee, \ldots, u_r^\vee), \quad f^* \in R^r \tag{4.3}$$

системы (4.1), (4.2), функция $f^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\vee)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\mathbf{x}=0$ при всех $\mathbf{u}^\vee$, причем $f^*(0, 0)=0$. Поэтому из замкнутой системы (2.1), (4.3) можно выделить уравнения

$$\xi_i^{\boldsymbol{\cdot}}=u_i^\vee \quad (i=1, \ldots, m<r) \tag{4.4}$$

$$\rho_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=u_{m+j}^\vee \qquad (j=1, \ldots, r-m) \tag{4.5}$$

Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации нулевого решения $\xi_i=0$ $(i=1, \ldots, m)$, $\rho_j=\rho_j^{\boldsymbol{\cdot}}=0$ $(j=1, \ldots, r-m)$ системы (4.4), (4.5). При этом качество управления будем, следуя [1], наряду с (2.6) характеризовать также функционалами

$$I_i^*=\int_{t_0}^{\infty} (a_i^*\xi_i^2+c_i^*u_i^{\vee 2})\,dt \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{4.6}$$

Постоянные $a_i^*>0$, $c_i^*>0$ $(i=1, \ldots, m)$ пока не задаем, поскольку важно найти решение задачи в зависимости от a_i^*, c_i^* $(i=1, \ldots, m)$.

Методом динамического программирования можно показать, что при

$$u_i^\vee=-\sqrt{a_i^*/c_i^*}\,\xi_i \quad (i=1, \ldots, m) \tag{4.7}$$

решение $\xi_i=0$ $(i=1, \ldots, m)$ каждой из подсистем замкнутой системы (4.4), (4.5) экспоненциально асимптотически устойчиво, причем на траекториях каждой из подсистем минимизируется функционал (4.6). Решения задачи оптимальной стабилизации положений равновесия $\rho_j=\rho_j^{\boldsymbol{\cdot}}=0$ $(j=1, \ldots, r-m)$ подсистем системы (4.5) в смысле минимума (2.6) уже найдены в п. 2.

Теорема 2. Если выполняются условия 1°. $\operatorname{rank} Q(0, 0)=r$; 2°. $\operatorname{rank} P(0)=n-r$, то невозмущенное движение $x=0$ системы (2.1), (4.3), (4.7), (2.7) (равенства (2.7) выполняются при $i=1, \ldots, r-m$) асимптотически устойчиво, причем на траекториях системы (2.1), (4.3), (4.7), (2.7) минимизируется функционал

$$I^*=\int_{t_0}^{\infty}\Bigg\{\sum_{i=1}^{m}\Big[\, a_i^*x_i^2+c_i^*X_i^{(1)2}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))+$$

$$+\sum_{j=1}^{r-m}(a_jx_{l+j}^2+b_jX_j^{(2)2}(\mathbf{x})+c_j\Phi_j^2(\mathbf{x}, \mathbf{u})\Big]\Bigg\}\,dt \tag{4.8}$$

подынтегральная функция в котором — определенно-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$.

Доказательство. Уравнения (4.4), (4.5) получаются в результате нелинейного преобразования системы (2.1), (4.3). Следовательно, из экспоненциальной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4.4), (4.5) следует экспоненциальная асимптотическая устойчивость движения $\mathbf{x}=0$ системы (2.1), (4.3) по отношению к $\xi_1, \ldots, \xi_m, \rho_1, \ldots, \rho_{r-m}, \rho_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, \rho_{r-m}^{\boldsymbol{\cdot}}$.

При выполнении 2° в окрестности точки $x=0$ равенства

$$X_i^{(2)}=\rho_i^{\boldsymbol{\cdot}} \quad (i=1, \ldots, r-m), \quad Y_i(\mathbf{x})=0 \quad (i=1, \ldots, k)$$

$$\mathbf{x}=(\xi, \eta), \quad \xi=(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}), \quad \eta=(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$$

$$\xi^{(1)}\in R^m, \quad \xi^{(2)}\in R^{l-m}, \quad \eta^{(1)}\in R^{r-m}, \quad \eta^{(2)}\in R^{n-l-r+m}$$

$$\mathbf{w}=(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}), \quad \mathbf{w}\in R^{n-r}$$

допускают решения

$$w_j=w_j(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \eta^{\cdot(1)}) \quad (j=1,\ldots,n-r) \tag{4.9}$$

причем функции w_j $(j=1,\ldots,n-r)$ непрерывно дифференцируемые в окрестности точки $\xi^{(1)}=0$, $\eta^{(1)}=\eta^{\cdot(1)}=0$ и $w_j(0, 0, 0)=0$ $(j=1,\ldots,n-r)$.

Поскольку функции w_j $(j=1,\ldots,n-r)$ непрерывны, зависят только от переменных, экспоненциальная асимптотическая устойчивость по которым уже доказана, то, как и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что проведенная стабилизация по $\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, $\eta^{\cdot(1)}$ фактически является стабилизацией по отношению ко всем переменным x_i $(i=1,\ldots,n)$.

Система (4.4), (4.5) распадается на r независимых подсистем, и на ее траекториях минимизируется функционал $I=\Sigma I_i^*+\Sigma I_j$, m слагаемых по i и $(r-m)$ по j, где I_i^* имеет вид (4.6), а I – (2.9).

Поскольку подынтегральная функция $R^\vee(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ в (4.8) неотрицательна, то для доказательства ее определенной положительности достаточно показать, что $R^\vee(\mathbf{x}, \mathbf{u})=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Пусть $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Учитывая, что $X(0, 0)=0$, $\Phi(0, 0)=0$, получаем равенство $R^\vee(0, 0)=0$. Допустим обратное, $R^\vee(\mathbf{x}, \mathbf{u})=0$. В силу вида функции $R^\vee(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ справедливы равенства

$$x_i=0 \; (i=1,\ldots,m), \quad x_{l+j}=0 \; (j=1,\ldots,r-m) \tag{4.10}$$

$$X_j^{(2)}(\mathbf{x})=0 \; (j=1,\ldots,r-m) \tag{4.11}$$

$$X_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u})=0 \; (i=1,\ldots,m), \quad \Phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})=0 \; (j=1,\ldots,r-m) \tag{4.12}$$

В некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$ справедливы соотношения (4.9), следовательно, в силу (4.10), (4.11) выполняются равенства $w_j=0$ $(j=1,\ldots,n-r)$, которые в совокупности с (4.10) означают, что $x_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$. В окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ справедливы также равенства (4.3), из которых при выполнении соотношений $x_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$ (4.11), (4.12) следует $u_i=0$ $(i=1, 2, 3)$. Поэтому на основании (4.10)–(4.12) заключаем, что $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Значит, функция $R^\vee(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ определенно-положительная по x, u в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Теорема доказана.

Если условие 1° теоремы 2 выполняется в области (2.11), а условие 2° — в области $\|\mathbf{x}\|<h_2$, то из теоремы 2 можно вывести следствие, аналогичное следствию 1.

5. Пусть система (1.1) имеет вид

$$\xi^{\cdot}=X^{(1)}(t, \xi, \eta, \mathbf{u}), \quad \eta^{\cdot}=X^{(2)}(t, \xi, \eta)$$
$$\mathbf{x}=(\xi, \eta), \quad \xi\in R^l, \quad \eta\in R^{n-l} \tag{5.1}$$

Кроме того, считаем, что переменные, входящие в вектор $\mathbf{x}$, связаны соотношениями

$$Y_i(t, \mathbf{x})=0 \quad (i=1,\ldots,k\geqslant n-2r) \tag{5.2}$$

причем функции Y_i $(i=1,\ldots,k)$ непрерывны вместе со своими частными производными по t, $\mathbf{x}$ в области (1.2). Условия $Y_i(t, 0)\equiv 0$, вообще говоря, не предполагаются ни при одном $i=1,\ldots,k$. Если $2r\geqslant n$, то соотношения (5.2), вообще говоря, не требуются.

Введем функции $\Phi_i^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})=(\partial X_i^{(2)}/\partial t)+\Phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ $(i=1,\ldots,n-l)$ и построим матрицы Якоби $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ от функций $\Phi_i^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ $(i=1,\ldots,n-l)$ по переменным u_j $(j=1,\ldots,r)$ и $\Psi(t, \mathbf{x})$ от функций $X_i^{(2)}$ $(i=1,\ldots,r)$, Y_j $(j=1,\ldots,k)$ по переменным $\xi_1,\ldots,\xi_l$, $\eta_{r+1},\ldots,\eta_{n-l}$.

Если при всех $t\geqslant t_0$ выполняются условия

$$\operatorname{rank} F(t, 0, 0)=r, \quad \operatorname{rank} \Psi(t, 0)=n-r \tag{5.3}$$

то в окрестности точки $\mathbf{x}=0$ при всех $t\geqslant t_0$, $\mathbf{u}^\vee$ справедливы равенства

$$\mathbf{u}=f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^\vee), \quad f(t, 0, 0)\equiv 0 \tag{5.4}$$

$$x_i=\varphi_i(t, \rho, \rho^{\cdot}), \quad \varphi_i(t, 0, 0)\equiv 0 \quad (i=1,\ldots,n;\; i\neq l+1,\ldots,l+r) \tag{5.5}$$

аналогичные равенствам (2.4), (2.8). (Считаем, что в $F(t, 0, 0)$ линейно независимы при всех $t\geqslant t_0$ первые r строк.)

Теорема 3. Если при всех $t \geqslant t_0$ выполняются условия (5.3) и, кроме того

$$\varphi_i(t, \rho, \rho^{\cdot}) \xrightarrow[(t \geqslant t_0)]{} 0 \text{ при } \rho \to 0, \quad \rho^{\cdot} \to 0 \quad (i = 1, \dots, n; \quad i \neq l+1, \dots, l+r) \tag{5.6}$$

то невозмущенное движение $x=0$ системы (5.1), (5.4), (2.7) асимптотически устойчиво, причем на траекториях системы (5.1), (5.4), (2.7) минимизируется функционал

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{r} [a_i x_{l+i}^2 + b_i X_i^{(2)2}(t, \mathbf{x}) + c_i \Phi_i^{*2}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})] \right\} dt \tag{5.7}$$

подынтегральная функция в котором — определенно-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Доказательство. При выполнении условий (5.3) существует окрестность точки $\mathbf{x}=0$, в которой из замкнутой системы (5.1), (5.4) можно выделить уравнения (2.5), и движение $\mathbf{x}=0$ системы (5.1), (5.4), (2.7) экспоненциально асимптотически устойчиво по ρ, $\rho^{\cdot}$. Из (5.5), (5.6) заключаем, что проведенная стабилизация по отношению к части переменных является фактически стабилизацией по всем переменным x_i $(i=1, \dots, n)$ исходной системы (5.1), причем на траекториях системы (5.1), (5.4), (2.7) минимизируется функционал (5.7).

Покажем, что подынтегральная функция R^* в (5.7) определенно-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ при всех $t \geqslant t_0$. Поскольку $R^* \geqslant 0$, то достаточно показать, что $R^*=0$ при всех $t \geqslant t_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Если $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$, то $R^*=0$ при всех $t \geqslant t_0$. Допустим обратное, $R^*=0$. В силу вида функции R^* справедливы равенства

$$\rho_i = 0, \quad X_i^{(2)}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \Phi_i^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad (i=1, \dots, r) \tag{5.8}$$

В некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$ при всех $t \geqslant t_0$ справедливы соотношения (5.5), которые в совокупности с первыми двумя группами равенств (5.8) означают, что $\mathbf{x}=0$. В окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ справедливы равенства (5.4), из которых при выполнении $x=0$ и последних двух групп равенств (5.8) при всех $t \geqslant t_0$ следуют равенства $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$. Значит, функция R^* определенно-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{u}=0$ при всех $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Пусть первое условие в (5.3) выполняется в области

$$t \geqslant t_0, \quad \|\mathbf{x}\| < h_1 > 0, \quad \|\mathbf{u}\| < h_2 > 0 \tag{5.9}$$

а второе условие — в области $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| < h_3 > 0$. Отбирая из области $\|\mathbf{x}\| < h_1 > 0$ те значения $\mathbf{x}'$ (в частности, это могут быть все значения $\mathbf{x}$), которые при $t \geqslant t_0$ удовлетворяют неравенству $\|\mathbf{u}\| = \|f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^{\vee}(x))\| < h_2$, получаем область $\|\mathbf{x}\| < h_4 > 0$. Обозначим $h^* = \min\{h_3, h_4\}$.

Следствие 2. Пусть первое условие в (5.3) выполняется в области (5.9), а второе — в области $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| < h_3 > 0$. Тогда при выполнении при всех $t \geqslant t_0$ условия (5.6) движение $\mathbf{x}=0$ системы (5.1), (5.4), (2.7) асимптотически устойчиво в области $t=t_0$, $\|\mathbf{x}\| < h^* > 0$, причем на траекториях системы (5.1), (5.4), (2.7) минимизируется функционал (5.7), подынтегральная функция в котором — определенно-положительная по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в области $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| < h^*$, $\|\mathbf{u}\| < h_2$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 с учетом замечаний, сделанных при доказательстве следствия 1.

6. Угловое движение твердого тела на круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил описывается уравнениями [12]

$$Ax_1^{\cdot} = (B-C)(x_1+\omega\beta_2)(x_3+\omega\beta_3) - A\omega(\beta_2 x_3 - \beta_3 x_2) + 3\gamma(C-B)\gamma_2\gamma_3/R^3 + u_1$$

$$\alpha_1^{\cdot} = \alpha_2(x_3+\omega\beta_3) - \alpha_3(x_2+\omega\beta_2) - \omega\gamma_1$$

$$\beta_1^{\cdot} = \beta_2(x_3+\omega\beta_3) - \beta_3(x_2+\omega\beta_2)$$

$$\gamma_1^{\cdot} = \gamma_2(x_3+\omega\beta_3) - \gamma_3(x_2+\omega\beta_2) + \omega\alpha_1 \quad (ABC, 123)$$

Здесь A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника, x_i $(i=1, 2, 3)$ — проекции вектора мгновенной угловой скорости спутника на его главные центральные оси инерции $Oxyz$; α_i, β_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) — направляющие косинусы углов между осями орбитальной системы координат и осями $Oxyz$; γ — гравитационная постоянная; $\omega^2=\gamma/R^3=\text{const}$ — угловая скорость движения спутника по орбите; u_i ($i=1, 2, 3$) — управляющие моменты, создаваемые бортовыми реактивными двигателями.

Положение, в котором будем стабилизировать спутник, характеризуется равенствами

$$\begin{gathered} x_i^\circ=0\ (i=1, 2, 3),\ \alpha_1^\circ=\beta_2^\circ=\gamma_3^\circ=1 \\ \alpha_2^\circ=\alpha_3^\circ=\beta_1^\circ=\beta_3^\circ=\gamma_1^\circ=\gamma_2^\circ=0 \end{gathered} \tag{6.1}$$

Это положение соответствует случаю, когда центр масс спутника движется по плоской круговой орбите и спутник вращается (с той же угловой скоростью) вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты.

Для стабилизации выделенного движения спутника (при условии невозмущаемости орбиты) введем новые переменные $x_i'=x_i-x_i^\circ$, $\alpha_i'=\alpha_i-\alpha_i^\circ$, $\beta_i'=\beta_i-\beta_i^\circ$, $\gamma_i'=\gamma_i-\gamma_i^\circ$ ($i=1, 2, 3$) и, опуская штрихи, составим уравнения возмущенного движения

$$\begin{gathered} Ax_1^\bullet=(B-C)x_1^\vee x_3^\vee+A\omega((\beta_2+\beta_2^\circ)x_3- \\ -(\beta_3+\beta_3^\circ)x_2)+3\gamma(C-B)(\gamma_2+\gamma_2^\circ)(\gamma_3+\gamma_3^\circ)/R^3+u_1 \\ \alpha_1^\bullet=(\alpha_2+\alpha_2^\circ)x_3^\vee-(\alpha_3+\alpha_3^\circ)x_2^\vee-\omega(\gamma_1+\gamma_1^\circ) \\ \beta_1^\bullet=(\beta_2+\beta_2^\circ)x_3^\vee-(\beta_3+\beta_3^\circ)x_2^\vee \\ \gamma_1^\bullet=(\gamma_2+\gamma_2^\circ)x_3^\vee-(\gamma_3+\gamma_3^\circ)x_2^\vee+\omega(\alpha_1+\alpha_1^\circ),\ (123,\ ABC) \end{gathered} \tag{6.2}$$

в которых $x_i^\vee=x_i+\omega(\beta_i+\beta_i^\circ)$ ($i=1, 2, 3$). Добавим к этим уравнениям соотношения, связывающие направляющие косинусы

$$Y_1=\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i+\alpha_i^0)^2-1=0 \qquad (123,\ \alpha_i\beta_i\gamma_i)$$

$$Y_4=\sum_{i=1}(\alpha_i+\alpha_i^0)(\beta_i+\beta_i^0)=0 \qquad (465,\ \alpha_i\beta_i\gamma_i)$$

Полагая $X_1^{(2)}=(\beta_2+\beta_2^\circ)x_3^\vee-(\beta_3+\beta_3^\circ)x_2^\vee$, $X_2^{(2)}=(\beta_1+\beta_1^\circ)x_2^\vee-(\beta_2+\beta_2^\circ)x_1^\vee$, $X_3^{(2)}=(\gamma_2+\gamma_2^\circ)x_3^\vee-(\gamma_3+\gamma_3^\circ)x_2^\vee+\omega(\alpha_1+\alpha_1^\circ)$, выпишем первые три строки матрицы Якоби $F(x, u)$ (многоточие означает остальные шесть строк матрицы F):

$$F=\left\| \begin{matrix} 0 & -(\beta_3+\beta_3^\circ)/B & (\beta_2+\beta_2^\circ)/C \\ -(\beta_2+\beta_2^\circ)/A & (\beta_1+\beta_1^\circ)/B & 0 \\ 0 & -(\gamma_3+\gamma_3^\circ)/B & (\gamma_2+\gamma_2^\circ)/C \\ & \cdots & \end{matrix} \right\|$$

Ненулевые элементы матрицы $\Psi(x)=(A_{ij}(x))$ ($i, j=1, \ldots, 9$) в данном случае ($\xi_i=x_i$, $\eta_i=\alpha_i$) ($i=1, 2, 3$), $\eta_4=\beta_1$, $\eta_6=\beta_3$, $\eta_7=\gamma_1$, $n=12$, $r=3$) имеют вид

$$\begin{gathered} -A_{12}=A_{76}=A_{99}=\beta_3+\beta_3^\circ,\ A_{13}=-A_{12}=A_{75}=A_{98}=0{,}5A_{57}=\beta_2+\beta_2^\circ \\ A_{22}=A_{74}=A_{97}=\beta_1+\beta_1^\circ,\ -A_{32}=A_{37}/\omega=A_{89}=0{,}5A_{69}=\gamma_3+\gamma_3^\circ \\ A_{33}=A_{85}=A_{79}=0{,}5A_{68}=(\gamma_2+\gamma_2^\circ),\ A_{34}=\omega,\ A_{17}=x_3 \\ A_{27}=x_1,\ A_{38}=x_3^\vee,\ A_{39}=-x_2^\vee,\ A_{44}=2(\alpha_1+\alpha_1^\circ) \\ A_{45}=2A_{67}=2A_{88}=2(\alpha_2+\alpha_2^\circ),\ A_{46}=2A_{89}=2(\alpha_3+\alpha_3^\circ) \end{gathered}$$

и, следовательно, $\operatorname{rank} F(0, 0)=r=3$, $\operatorname{rank}\Psi(0)=n-r=9$.

Поэтому на основании теоремы 1 решение (6.1) асимптотически устойчиво, причем на траекториях системы (6.2) минимизируется функционал вида (2.9).

Законы управления (2.4) в данном случае имеют вид

$$u_1=A[\Lambda_1+(\beta_1u_2)/B-u_2^{\vee}]/(1+\beta_2)$$
$$u_2=[\Lambda_2-B(1+\beta_2)u_2]/[(1+\beta_2)(1+\gamma_3)-\gamma_2\beta_3]$$
$$u_3=C[\Lambda_3+(\beta_3u_2)/B-u_1^{\vee}]/(1+\beta_2)$$

где Λ_i ($i=1, 2, 3$) — некоторые формы переменных x_i, α_i, β_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) (подробнее предлагаемая конструкция законов управления указана в [13]).

Систему вида (2.5) составят уравнения

$$\beta_1^{\cdot\cdot}=u_1^{\vee},\quad \beta_3^{\cdot\cdot}=u_2^{\vee},\quad \gamma_1^{\cdot\cdot}=u_3^{\vee} \tag{6.3}$$

Если направляющие косинусы α_i, β_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) выразить через три независимых угла φ, ψ, θ [12], то решение (6.1) принимает вид $x_i^{\circ}=0$ ($i=1, 2, 3$), $\varphi=\psi=\theta=0$. При этом подынтегральная функция R в (2.9) запишется следующим образом ($\rho_1=\beta_1$, $\rho_2=\beta_3$, $\rho_3=\gamma_1$):

$$R=\sum_{i=1}^{3}a_i\rho_i^2+\sum_{i=1}^{3}b_i\rho_i^{\cdot 2}+\sum_{i=1}^{3}c_iu_i^{\vee 2}=a_1\varphi^2+a_2\psi^2+a_3\theta^2+b_1x_3^2+b_2x_2^2+b_3x_1^2+$$
$$+c_1u_3^2|c^2+c_2u_1^2|A^2+c_3u_2^2|B^2+\Omega(\omega, x, \varphi, \psi, \theta, u)$$

Поскольку функции R и $R-\Omega$ определенно-положительные по x_i, u_i ($i=1, 2, 3$), φ, ψ, θ, то функция Ω также определенно-положительная по указанным переменным. Таким образом, подынтегральное выражение в минимизируемом функционале (2.9) есть сумма четырех слагаемых: 1) кинетической энергии тела $Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2$ (для этого достаточно положить $b_1=C$, $b_2=B$, $b_3=A$); 2) квадратичной формы $a_1\varphi^2+a_2\psi^2+a_3\theta^2$, характеризующей отклонение тела от положения равновесия $\varphi=\psi=\theta=0$; 3) квадратичной формы $c_1u_3^2/C^2+C_2u_1^2/A^2+c_3u_2^2/B^2$, характеризующей затраты на формирование управлений u_i ($i=1, 2, 3$); 4) определенно-положительной по x_i, u_i ($i=1, 2, 3$), φ, ψ, θ функции Ω, определяемой в процессе решения задачи.

Учитывая, что функция Ω содержит члены степени третьей и выше относительно ω, x_i, u_i ($i=1, 2, 3$), φ, ψ, θ, заключаем, что главная часть подынтегрального выражения в (2.9) есть сумма слагаемых 1)—3), т. е. имеет конкретный механический смысл.

Отметим также, что предлагаемый подход позволяет фактически найти явный вид решений замкнутой системы (6.2). Действительно, решая нелинейную систему алгебраических уравнений $Y_i=0$ ($i=1, \ldots, 6$), получаем (отбрасывая решения, выходящие за пределы допустимой области начальных возмущений) следующие соотношения:

$$\beta_2=-1+\sqrt{1-\beta_1^2-\beta_3^2},\quad \gamma_2=[-\beta_1\gamma_1-\beta_3(1+\gamma_3)]/(1+\beta_2)$$
$$\gamma_3=[-1+\beta_1^2-\beta_1\beta_3\gamma_1+\sqrt{1-R_1}]/(1-\beta_1^2) \tag{6.4}$$
$$\alpha_2=R_2/R^*,\quad \alpha_3=R_3/R^*,\quad \alpha_1=-1+\sqrt{(1-\alpha_1^2-\alpha_3^2)}$$
$$R_1=2(1+\beta_2)+(1+\beta_2)^2-\gamma_1^2-2(1+\beta_2)\gamma_1^2-(1+\beta_2)\gamma_1^2-$$
$$-\beta_1^2-2(1+\beta_2)\beta_1^2-(1+\beta_2)^2\beta_1^2-\beta_1^2\gamma_1^2-$$
$$-2(1+\beta_2)\beta_1^2\gamma_1^2-(1+\beta_2)^2\beta_1^2\gamma_1^2$$
$$R_2=-\beta_1(1+\gamma_3)+\beta_3\gamma_1,\quad R_3=-(1+\beta_2)\gamma_1-\beta_1\gamma_2$$
$$R^*=\sqrt{R_2^2+R_3^2+R_4^2},\quad R_4=(1+\beta_2)(1+\gamma_3)-\beta_3\gamma_2$$

Кроме того, решая относительно x_i ($i=1, 2, 3$) уравнения

$$\beta_1^{\cdot}=(\beta_2+\beta_2^{\circ})x_3^{\vee}-(\beta_3+\beta_3^{\circ})x_2^{\vee}$$

$$\beta_3^{\cdot}=(\beta_1+\beta_1^{\circ})x_2^{\vee}-(\beta_2+\beta_2^{\circ})x_1^{\vee}$$
$$\gamma_1^{\cdot}=(\gamma_2+\gamma_2^{\circ})x_3^{\vee}-(\gamma_3+\gamma_3^{\circ})x_2^{\vee}+\omega(\alpha_1+\alpha_1^{\circ})$$

входящие в систему (6.2), получим выражения

$$x_1=(-\beta_3^{\cdot}+x_2\beta_1)/(1+\beta_2) \tag{6.5}$$
$$x_2=[-\beta_1^{\cdot}\gamma_2-(1+\beta_2)(\gamma_1^{\cdot}-\omega R_5)]R_4^{-1}$$
$$x_3=[-\beta_3(\gamma_1^{\cdot}-\omega R_5)+\beta_1^{\cdot}(1+\gamma_3)]R_4^{-1},\ R_5=\alpha_3-R_4$$

Поскольку в результате решения задачи оптимальной стабилизации системы (6.3) получаем явный вид функций β_1, β_3, γ_1, являющихся решениями не только системы (6.3), но и (6.2), то на основании зависимостей (6.4), (6.5) получаем явный вид решений x_i, α_i, β_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) замкнутой системы (6.2). Это позволяет в реальном времени выбрать оптимальные в практическом смысле законы управления, стабилизирующие рассматриваемое движение спутника.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Ф. Л. Черноусько за обсуждение результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение к книге: *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. С. 475–514.
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
3. *Красовский А. А.* Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение. 1969. 240 с.
4. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука. 1973. 558 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука. 1973. 238 с.
6. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука. 1977. 263 с.
7. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука. 1977. 245 с.
8. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 441–450.
9. *Воротников В. И.* О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных // Автоматика и телемеханика. 1982. № 3. С. 15–21.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 331 с.
11. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
12. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
13. *Воротников В. И.* О стабилизации ориентации гиростата на круговой орбите в ньютоновском поле сил // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 25–30.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию 26.XII.1985