УДК 539.37

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ЕРМАКОВ С. В., РАСТОРГУЕВ О. Б.

Фундаментальное решение для тонкой изотропной цилиндрической оболочки может быть представлено в виде ряда Фурье

$$\Phi(\xi,\varphi)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\Phi_0(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(\xi)\cos n\varphi\right] \tag{1}$$

Коэффициенты $\Phi_n(\xi)$ для существенно разных комплексных корней получены в [1] для пологих оболочек и в [2] для непологих оболочек, в тригонометрической форме они приведены в [3].

В случае непологой оболочки фундаментальное решение удовлетворяет уравнению

$$D^*\Phi(\xi,\varphi)=\delta(\xi)\delta(\varphi) \tag{2}$$

где оператор D^* имеет следующий вид [4, 5]:

$$D^*=\nabla^8+\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\left[4\varkappa^4+2(4-\nu^2)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]+4\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(2\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+2\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6}+\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}$$

$$\varkappa=[3R(1-\nu^2)/h]^{1/2},\quad \nabla^8=(\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\varphi^2)^4,\quad \xi=x/R$$

где x – продольная координата, R – радиус, h – толщина оболочки, ν – коэффициент Пуассона. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$(\lambda^2+1)^4+\frac{4\varkappa^4}{n^4}\lambda^4-\frac{2(4-\nu^2)}{n^2}\lambda^2-8\frac{\lambda^2}{n^2}+4\frac{\lambda^4}{n^4}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}=0 \tag{3}$$

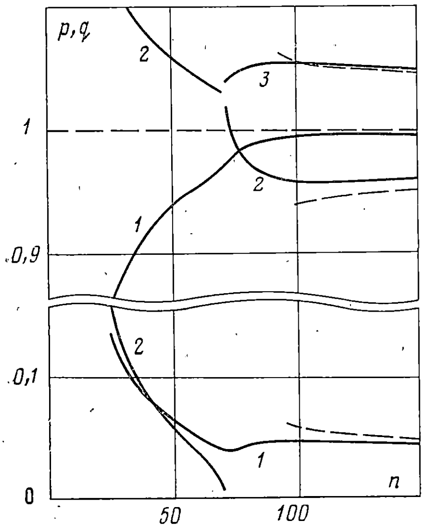
Выражение для $\Phi_n(\xi)$ при $n\geqslant 2$:

$$\Phi_n(\xi)=\frac{1}{4n^7}\sum_{j=1}^{2}\frac{\exp(-q_jn|\xi|)}{r_j}\sin(p_jn|\xi|+\gamma_j)$$

было получено при использовании предположения, что характеристическое уравнение (3) имеет только комплексно-сопряженные корни [5]:

$$\lambda_{1,2,3,4}=\pm(p_1\pm iq_1),\quad \lambda_{5,6,7,8}=\pm(p_2\pm iq_2);\quad p_j,\ q_j>0\ (j=1,\ 2) \tag{4}$$

Однако, как показывают конкретные примеры, представление корней в виде (4) не является достаточно общим. Например, при $R/h=17$, $\nu=0{,}3$, $n=50$ наряду с четырьмя комплексно-сопряженными корнями $\pm(0{,}063\pm i0{,}985)$ имеется четыре чисто мнимых корня $\pm i0{,}954$ и $\pm i1{,}0676$.



Соотношение (4) имеет место для $n\geqslant 2$, если в уравнении (3) пренебречь членом $2(4-\nu^2)\lambda^4/n^2$ (см. [2]) или использовать характеристическое уравнение без отбрасывания малых порядка $\varkappa^{-4}$ (см. [4]). В противном случае изменение корней уравнения (3) с ростом n (при $\varkappa>4$) происходит следующим образом (рассматриваются только существенно различные корни): сначала действительная и мнимая части одного корня (для определенности, первого) возрастают, а другого – убывают с ростом n, причем p_1, $q_1<1$, $q_2>1$; далее p_1 и p_2 убывают, при этом, начиная с некоторого n_k, лежащего в интервале $\sqrt{2}\varkappa^2<n_k<[2/(1-\nu^2)]^{1/2}\varkappa^2$, корень p_2+iq_2 переходит в два чисто мнимых корня iq_2 и iq_3. Таким образом, при $2\leqslant n<n_k$ корни уравнения (3) имеют вид (4). При $n\geqslant n_k$ имеем $\lambda_{1,2,3,4}=\pm(p_1\pm iq_1)$, $\lambda_{5,6}=\pm iq_2$, $\lambda_{7,8}=\pm iq_3$. Отбрасывая малые порядка n^{-2} по сравнению с единицей, получаем асимптотику

$$p_1+iq_1=\alpha n^{-1/2}-\gamma n^{-3/2}+i(1-\beta/n)$$

$$q_{2,3}=1\pm\alpha n^{-1/2}+\beta/n\pm\gamma n^{-3/2}$$

$$\alpha=[{}^1/_8(1-\nu^2)]^{1/4},\quad \beta={}^1/_2\alpha^2(3-\nu^2)/(1-\nu^2)$$

$$\gamma={}^1/_2\alpha^3(1-2\nu^2)(1-\nu^2)^{-2}$$

а с точностью до малых порядка n^{-1} по сравнению с единицей получаем выражения

$$q_{2,3}=1\pm\alpha n^{-1/2},\quad p_1+iq_1=\alpha n^{-1/2}+i \tag{5}$$

Изменение величин p_j и q_j для $\nu=0{,}3$; $R/h=30$ представлено на фигуре (кривые для p_j, q_j при $j=1, 2, 3$ отмечены цифрами *1–3* соответственно). Штрихами отмечена асимптотика (5).

Численные расчеты при $\nu=0{,}3$, $R/h=17$, 30, 100, 200, что соответствует значениям $\varkappa=5{,}3$; 7,07; 12,85; 18,18; $(\sqrt{2}\varkappa^2,\ [2/(1-\nu^2)]^{1/2}\varkappa^2)=(39{,}7;\ 41{,}6)$, (70,1; 73,5), (233,5; 244,8), (467,4; 490), дают значения $n_k=39$; 71; 240; 484.

При помощи преобразования Фурье получаем следующее выражение для $\Phi_n(\xi)$ при $n\geqslant n_k$:

$$\Phi_n(\xi)=\frac{1}{4n^7p_1q_1}(a^2+b^2)^{-1/2}\exp(-q_1n|\xi|)\sin(p_1n|\xi|+\gamma)-$$

$$-\frac{1}{2n^7}(q_2{}^2-q_3{}^2)^{-1/2}\sum_{j=2}^{3}\frac{(-1)^j}{q_j}[(q_j{}^2+p_1{}^2-q_1{}^2)^2+4p_1{}^2q_1{}^2]^{-2}\exp(-q_jn|\xi|) \tag{6}$$

$$a=p_1[5\mu^2-4p_1{}^4+(q_2{}^2+q_3{}^2)(\mu-2q_1{}^2)+q_2{}^2q_3{}^2]$$

$$b=q_1[5\mu^2-4q_1{}^4+(q_2{}^2+q_3{}^2)(\mu+2p_1{}^2)+q_2{}^2q_3{}^2]$$

$$\mu=p_1{}^2-q_1{}^2,\quad \gamma=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\begin{cases}0, & b>0\\ \pi, & b<0\end{cases}$$

Отметим что и в случае наличия кратного чисто мнимого корня соотношение (6) при $q_3\to q_2$ в пределе дает правильное выражение для $\Phi_n(\xi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yuan S. W.* Thin cylindrical shells subjected to concentrated loads // Quart. Appl. Math. 1946. V. 4. No. 1. P. 13–26.
2. *Даревский В. М.* К теории цилиндрических оболочек // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 5. С. 531–562.
3. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* К построению матрицы Грина для оболочки вращения // Прикл. механика. 1971. Т. 7. Вып. 7. С. 3–9.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат. 1953. 544 с.
5. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1986