УДК 539.3

# К ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМ СКРУЧИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ

КОБЕЛЕВ В. В.

В [1] Сен-Венан сформулировал две гипотезы, касающиеся экстремальных свойств стержней, имеющих форму прямого кругового цилиндра. Предположение, что среди стержней равной площади поперечного сечения именно круговой стержень имеет максимальную жесткость на кручение, было строго доказано в [2]. Вторая гипотеза была высказана в [1]: «По мере увеличения полярного момента сопротивление разрушению от кручения при одинаковом количестве материала или при одинаковой площади сечения уменьшается еще сильнее, чем упругое сопротивление заданному кручению». Сопротивлением разрушению здесь называется наибольший крутящий момент, который можно было бы сообщить без превышения в какой-либо точке сечения допустимого касательного напряжения. Увеличение же полярного момента эквивалентно все большему отличию формы стержня от круговой. Другими словами, максимальное по сечению значение сдвигового напряжения, возникающее при кручении стержня заданным моментом, больше сдвигового напряжения на контуре кругового сечения той же площади. Приведем доказательство этой гипотезы и установим изопериметрическое неравенство, связывающее значение максимального касательного напряжения, площадь сечения стержня и крутящий момент.

Рассматривается кручение цилиндрического стержня произвольного поперечного сечения парой сил, момент которой направлен вдоль оси цилиндра. Предполагается, что объемные силы на цилиндр не действуют, а боковая поверхность свободна от внешних нагрузок. Ось цилиндра совпадает с осью $z$ прямоугольной декартовой системы координат $0xyz$. Область поперечного сечения стержня обозначим $\Omega$, а ее границу $\Gamma$. Допустим, что один конец цилиндра закреплен в плоскости $z=0$, тогда как другой конец в плоскости $z=l$ скручивается моментом $\mathbf{M}=(0,\ 0,\ M)$. Выразим ненулевые компоненты напряжений через функцию напряжений $\varphi$:

$$\tau_{xz}=G\theta\,\partial\varphi/\partial y,\quad \tau_{yz}=-G\theta\,\partial\varphi/\partial x \tag{1}$$

где $G$ – модуль сдвига, $\theta$ – угол закручивания на единицу длины стержня. Функция напряжений $\varphi=\varphi(x,\ y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta\varphi+2=0 \text{ в } \Omega,\quad \varphi=0 \text{ на } \Gamma \tag{2}$$

Угол закручивания $\theta$ выражается через заданный момент $M$ и жесткость на кручение $C$: $\theta=M/C$, где

$$C=2G\iint\limits_{\Omega}\varphi\,dx\,dy=G\iint\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dy \tag{3}$$

Касательное напряжение

$$\tau=(\tau_{xz}{}^2+\tau_{yz}{}^2)^{1/2}=MGC^{-1}|\nabla\varphi|\equiv G\theta|\nabla\varphi| \tag{4}$$

достигает максимума на контуре $\Gamma$ стержня. Действительно [3]:

$$\Delta(\tau^2)=2(|\nabla\tau_{xz}|^2+|\nabla\tau_{yz}|^2)>0 \tag{5}$$

Следовательно, $\tau^2$ – субгармоническая функция, для которой $\max_{\Omega\cup\Gamma}\tau^2=\max_\Gamma\tau^2$ [2, 3]. Обозначим $\max_\Gamma\tau^2=\tau_m{}^2$. В частности, для стержня кругового сечения $\tau_m{}^2$ равняется величине $\tau_0{}^2=4\pi M^2A^{-3}$, где $A$ – площадь сечения.

Докажем, что если фиксирован момент $M$, действующий на стержень, то среди всех стержней равной площади поперечного сечения $A$ стержень кругового сечения обладает минимальной величиной $\tau_m{}^2$. Иначе говоря, справедливо изопериметрическое неравенство

$$\tau_m{}^2\geqslant 4\pi M^2A^{-3} \tag{6}$$

Доказательство этого утверждения основано на свойстве субгармоничности функции $\psi=\varphi+{}^1/_2|\nabla\varphi|^2$. Заметим, что, хотя $\Delta\varphi=-2<0$, $\Delta(|\nabla\varphi|^2)>0$, все же $\Delta\varphi\geqslant 0$. Это свойство функции $\psi$ можно обосновать методом, аналогичным указанному в [4]. Вычислим частные производные функции $\psi(u(x_1,\ x_2)\equiv\varphi(x,\ y))$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial^2u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^3u}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial^2u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^3u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) \tag{8}$$

Для сокращения записи здесь и ниже используются обозначения $x=x_1$, $y=x_2$. Из (8) имеем

$$\Delta\psi=\Delta\varphi+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\Delta u}{\partial x_i}+\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\tag{9}$$

Для преобразования последнего выражения используем тождество [4]:

$$|\nabla u|^2\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=|\nabla u|^2(\Delta u)^2+$$

$$+2\sum_{i,j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}-2\Delta u\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\tag{10}$$

а также равенства, следующие из (7):

$$\sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}=-|\nabla u|^2+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}=|\nabla u|^2+|\nabla\psi|^2-2\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\tag{11}$$

Из (10), (11) следует

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=2+2\frac{|\nabla\psi|^2}{|\nabla u|^2}$$

Подставляя последнее равенство в (9), получим

$$\Delta\psi=2\frac{|\nabla\psi|^2}{|\nabla u|^2}>0\tag{12}$$

Итак, функция $\psi=\varphi+{}^1/_2|\nabla\varphi|^2$ субгармоническая и, следовательно, принимает максимальное значение на границе области Г [5, 6]. На контуре Г функция $\varphi$ равна нулю, поэтому $2\varphi+|\nabla\varphi|^2\leqslant\max_\Gamma|\nabla\varphi|^2$. Интегрируя обе части этого неравенства по области $\Omega$ с использованием (3), получаем $2C\leqslant GA\max_\Gamma|\nabla\varphi|^2$.

Последнее неравенство совместно с (4) дает $\tau_m{}^2\geqslant 2M^2GA^{-1}C^{-1}$. Привлекая неравенство Сен-Венана – Полиа для жесткости кручения $2\pi C\leqslant GA^2$ и исключая $C$, получаем требуемое изопериметрическое неравенство (6).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз. 1961. 518 с.
2. *Polia G.* Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization // Quart. Applied Math. 1948. V. 6. No. 2. P. 267–277.
3. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз. 1963. 686 с.
4. *Payne L. E., Phillippin G. A.* On maximum principles for a class of nolinear second-order elliptic equation // J. Different. Equat. 1980. V. 37. No. 1. P. 39–48.
5. *Miranda C.* Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per e funzioni biamoriche di due variabili // Giorn. Mat. Battaglini. 1948. V. 78. No. 2. P. 97–118.
6. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in Differential Equations. N. J.: Prentice-Hall. 1967. 261 p.



Москва

Поступила в редакцию 2.VII.1986