

УДК 539.375

## РАСЧЕТ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД В СЛОЖНОНАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

ТАЛОНОВ А. В., ТУЛИНОВ Б. М.

Метод расчета эффективных упругих характеристик тел с изолированными неоднородностями при их широком распределении по размерам был предложен в [1–3]. При этом получены выражения для упругих модулей сред, ослабленных случайно распределенными трещинами [1–2] и системой параллельных трещин [3] при конечной концентрации трещин с учетом взаимодействия между ними. В [4] был использован энергетический метод самосогласованного поля для вычисления упругих характеристик материала, ослабленного эллиптическими трещинами, в условиях одноосного и всестороннего сжатия.

В публикуемой работе с помощью метода, развитого в [4], определяются эффективные упругие модули материала, ослабленного случайно распределенными трещинами с взаимодействующими берегами для сложноподпряженного состояния на стадии до начала развития трещиноватости. При этом, как было показано в [5], эффективные упругие модули будут являться функционалами траектории нагружения. В рамках энергетического метода и подхода, предложенного в [1], рассчитывается зависимость упругих характеристик данной среды от напряженного состояния и концентрации трещин. Проводится сравнение результатов, полученных рассмотренными методами, с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим линейно-упругую среду, ослабленную трещинами. На бесконечности задан тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ . Предположим, что число и характер распределения трещин удовлетворяют условию разбиения среды на макроскопические элементы объема, в пределах которых напряженное состояние может быть принято однородным.

Учитывая, что согласно [5] при взаимодействии берегов закрытых трещин в результате трения упругие характеристики являются функционалами траектории нагружения, для случая осесимметричного напряженного состояния  $\sigma_{33} < \sigma_{22} = \sigma_{11} \leq 0$  (считается, что среда была подвергнута всестороннему сжатию, а затем поджатию вдоль одной из главных осей) определим изменение эффективных упругих модулей при изменении напряженного состояния от  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  до  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33} + d\sigma_{33}$ . В [5] показано, что среда, ослабленная трещинами с взаимодействующими берегами, при рассматриваемом осесимметричном напряженном состоянии в общем случае становится ортотропной. Однако наведенная анизотропия среды для данного напряженного состояния носит слабый характер. Поэтому, не используя точное решение о трещине в ортотропной среде, для описания деформационных свойств трещиноватой среды методом самосогласованного поля предлагается приближенно использовать модуль Юнга среды вдоль оси сжатия и коэффициент Пуассона в поперечном направлении.

Под модулем Юнга и коэффициентом Пуассона трещиноватой среды будем понимать производные  $E = d\sigma_{33}/d\varepsilon_{33}$  и  $\nu = -d\varepsilon_{11}/d\varepsilon_{33}$  соответственно. Тогда для макроскопического элемента объема изменение плотности энергии трещиноватой среды при изменении напряженного состояния можно связать с соответствующим изменением плотности энергии сплошной среды:

$$\sigma_{33}/E - 2\nu\sigma_{11}/E = \sigma_{33}/E_0 - 2\nu_0\sigma_{11}/E_0 + d\Phi/d\varepsilon_{33} \quad (1.1)$$

где  $d\Phi$  — изменение плотности энергии, связанное с наличием трещин;  $\nu_0, E_0$  — коэффициент Пуассона и модуль Юнга сплошной упругой среды.

Полагая, что все трещины закрыты, можно считать, что модуль объемного сжатия трещиноватой среды совпадает с соответствующей величиной для сплошной среды  $K=K_0=E_0/(1-2\nu_0)$ . С учетом этого условия выражение (1.1) примет вид

$$E/E_0=1-E(\sigma_{33}-\sigma_{11})^{-1}d\Phi/d\sigma_{33} \quad (1.2)$$

Вклад трещин в производную  $d\Phi/d\sigma_{33}$  можно представить в виде

$$d\Phi/d\sigma_{33}=d/d\sigma_{33}\int q(Y)F(Y)dY \quad (1.3)$$

где  $q$  — изменение энергии среды за счет возникновения одной трещины с параметрами  $Y$ ;  $F(Y)$  — функция распределения трещин [1].

В [4] показано, что без учета взаимодействия берегов трещин энергию  $q$  можно представить в виде интеграла по контуру трещины

$$q=^{1/3}(1-\nu^2)E^{-1}\oint\left(K_1^2+K_2^2+\frac{K_3^2}{1-\nu}\right)\rho dl \quad (1.4)$$

где  $\rho$  — текущее расстояние от некоторой внутренней точки трещины до ее границы,  $K_i$  — коэффициенты интенсивности напряжений. С помощью эффективных упругих модулей  $\nu$ ,  $E$  в соотношении (1.4) приближенно учитывается взаимодействие между трещинами.

Положим, что берега трещин взаимодействуют по закону сухого трения Кулона  $\tau_f=\tau_0+\mu\sigma_n$ , где  $\tau_0$  — сцепление,  $\mu$  — коэффициент трения,  $\sigma_n$  — нормальное давление. Тогда взаимное смещение берегов трещин будет определяться эффективным сдвиговым напряжением  $\tau_s=|\tau|-\tau_f$  при  $|\tau|> \tau_f$ ,  $\tau_s=0$  при  $|\tau|\leq\tau_f$  и изменение энергии  $dq$  при изменении напряженного состояния может быть представлено в виде

$$dq=\int\tau_f du(\tau_s)ds+\int\tau_s du(\tau_s)ds=\int|\tau|du(\tau_s)ds$$

где  $u$  — смещение вдоль поверхности разреза; интегрирование проводится по поверхности трещины.

Тогда с учетом данного выражения соотношение (1.4) для случая взаимодействия берегов закрытых трещин запишем в форме

$$dq=^{1/3}\oint\{K_2(\tau)d[K_2(\tau_s)(1-\nu^2)/E]+K_3(\tau)d[K_3(\tau_s)(1+\nu)/E]\}\rho dl \quad (1.5)$$

2. Рассмотрим среду, ослабленную закрытыми дисковыми трещинами, изотропно распределенными по углам. Для дисковой трещины радиуса  $r$  соотношение (1.5) в сложнапряженном состоянии примет вид

$$dq=16/3\cdot r^3(\sigma_{33}-\sigma_{11})\cos^2\varphi\sin\varphi(\sin\varphi-\mu\cos\varphi)\left[(1-2\nu_0)y+3\right]^{-1}\left\{[3+2(1-2\nu_0)y-(1-2\nu_0)^2y^2]d\sigma_{33}-\sigma_{33}[3+(1-2\nu_0)^2y^2]dy/y\right\}H(\tau_s), \quad (2.1)$$

$$y=E/E_0$$

где  $\varphi$  — угол между направлением оси  $\sigma_{33}$  и нормалью трещины,  $H(x)$  — единичная функция Хевисайда.

Подставляя соотношение (2.1) в выражение (1.2), получаем систему уравнений для определения упругих характеристик среды, ослабленной дисковыми трещинами с взаимодействующими берегами

$$y=1-\frac{32}{3}\Omega(f(\varphi_2)-f(\varphi_1))\left[\frac{1-\nu^2}{2-\nu}-\frac{3+(1-2\nu_0)^2y^2}{2y(3+(1-2\nu_0)y)}\sigma_{33}dy/d\sigma_{33}\right]\times$$

$$\times H(\tau_s), \quad \nu=^{1/2}-(1-2\nu_0)y/2$$

$$f(\varphi)=^{1/5}\cos^5\varphi-^{1/3}\cos^3\varphi-\mu(^{1/3}\sin^3\varphi-^{1/5}\sin^5\varphi) \quad (2.2)$$

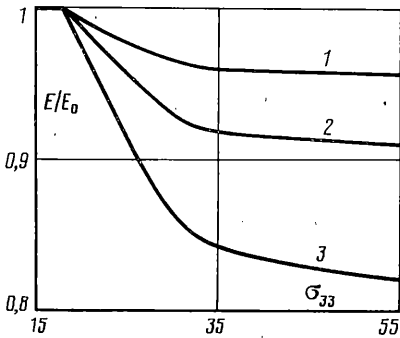
$$\varphi_1=^{1/2}\beta+^{1/2}\arcsin[(\sin\beta(\sigma_{33}+\sigma_{11})-2\tau_0\cos\beta)(\sigma_{33}-\sigma_{11})^{-1}]$$

$$\varphi_2=\pi/2+\beta-\varphi_1, \quad \beta=\arctg\mu, \quad \Omega=Nr_*^3, \quad r_*^3=\int r^3F(r)dr$$

$$y=1 \text{ при } |\sigma_{33}|\leq[(1+\sin\beta)|\sigma_{11}|+2\tau_0\cos\beta](1-\sin\beta)^{-1}$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — границы интервала углов, в пределах которого возможна подвижка берегов трещиц,  $N$  — плотность трещиц.

Для случая одноосного сжатия среды, ослабленной дисковыми трещинами, берега которых взаимодействуют без сцепления ( $\tau_0=0$ ), решением системы уравнений (2.2) являются упругие модули, не зависящие от напряженного состояния на стадии нагружения до начала развития трещиноватости и в приближении невзаимодействующих трещиц ( $\Omega \ll 1$ ), представленные в виде



Фиг. 1

$$E = E_0 \{1 - 32/45 \Omega (1 - \nu_0^2) (2 - \nu_0)^{-1} [(2 + 3\mu^2 + 2\mu^4) (1 + \mu^2)^{-3/2} - 2\mu]\}$$

$$\nu = 1/2 - (1 - 2\nu_0)y/2 \quad (2.3)$$

Упругие модули, определяемые выражением (2.3), совпадают с упругими модулями, вычисленными в [6].

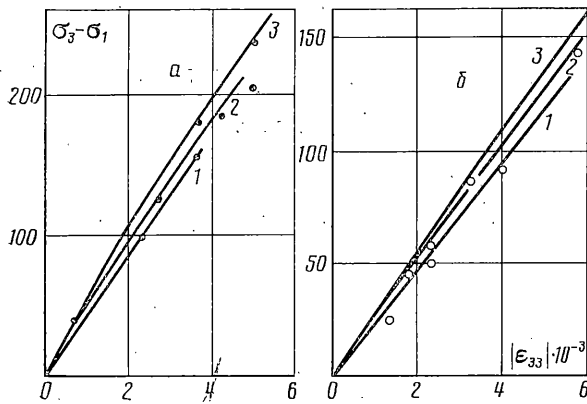
Вычисление упругих характеристик трещиноватой среды может быть произведено также на основе метода непосредственного усреднения полей по объему, разработанному в [1]. В рамках этого метода в [5] был произведен расчет упругих характеристик среды, ослабленной изолированными дисковыми трещинами с взаимодействующими берегами на стадии до начала развития трещиноватости в приближении невзаимодействующих трещиц. Используя результаты [5] и вводя для приближенного учета взаимодействия между изолированными закрытыми дисковыми трещинами эффективные упругие модули  $E, \nu$ , получаем систему уравнений для определения  $E$  и  $\nu$ , совпадающую с системой (2.2).

Система уравнений (2.2) для случая сложнапряженного состояния  $\sigma_{33} < \sigma_{22} = \sigma_{11} \leq 0$  решалась численными методами. На фиг. 1 представлена зависимость модуля Юнга  $E$  трещиноватой среды от напряжения  $\sigma_{33}$  при фиксированном напряжении  $\sigma_{11} = -5$  МПа для различных значений степени трещиноватости  $\Omega$ . Графикам 1–3 соответствуют  $\Omega = 0,2$ ;  $\Omega = 0,4$ ;  $\Omega = 0,8$ . При расчете постоянные материала  $\mu, \tau_0$  принимались равными  $\mu = 0,85$ ;  $\tau_0 = 0$ . Нелинейная зависимость модуля Юнга от напряжения связана с изменением сектора подвижки берегов трещиц в процессе нагружения. Упругие характеристики, определяемые системой (2.2), могут быть использованы для построения деформационных кривых хрупких материалов в сложнапряженном состоянии.

Согласно (2.2), для одноосного сжатия материала сектор подвижки берегов закрытых трещиц не изменяется в процессе нагружения. Поэтому зависимость деформации от напряжения будет иметь линейный характер. При этом степень трещиноватости  $\Omega$  может быть определена по наклону линейного участка деформационной кривой, полученной из экспериментальных данных по одноосному сжатию материала.

В качестве примера рассчитывались деформационные кривые для гранита (фиг. 2, а;  $E_0 = 5,5 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_0 = 0,17$ ) и песчаника (фиг. 2, б;  $E_0 = 3,1 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_0 = 0,12$ ) [7] до начала развития трещиноватости. Для определения параметров  $\tau_0$  и  $\mu$  использовались экспериментальные данные [8]. Для гранита  $\mu = 0,65$  и  $\tau_0 = 0$ ; для песчаника  $\mu = 0,7$  и  $\tau_0 = 0$ . На фиг. 2, а графики 1, 2 и 3 соответствуют значениям напряжения  $|\sigma_{11}| = 0$ ,  $|\sigma_{11}| = 10$  МПа,  $|\sigma_{11}| = 25$  МПа. На фиг. 2, б графики 1, 2 и 3 соответствуют значениям напряжения  $\sigma_{11}$  в сложнапряженном состоянии  $|\sigma_{11}| = 0$ ,  $|\sigma_{11}| = 5$  МПа,  $|\sigma_{11}| = 25$  МПа (светлыми и темными кружками нанесены экспериментальные данные [7]).

Таким образом, в данной работе показано, что упругие модули трещиноватой среды, ослабленной трещинами с взаимодействующими берегами,



Фиг. 2

определяемые на основе энергетического метода, совпадают с соответствующими упругими модулями, определяемыми в рамках подхода, предложенного в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149–158.
2. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 65–75.
3. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 95–107.
4. Bidiasky B., O'Connell R. J. Elastic moduli of cracked solid // Intern. J. Solids Struct. 1976. V. 12. № 2. P. 81–97.
5. Жигников Ю. В., Тулинов Б. М. Расчет деформационных свойств твердого тела с закрытой трещиноватостью в сложнапряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 177–124.
6. Walsh J. B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. № 2. P. 399–411.
7. Byerlee J. Friction of rocks // Proc. of 2nd Conf. on experimental study of rock friction with application to earthquake prediction. Menlo Park. California. April. 1977.
8. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г., Ширкес О. А., Певзнер Е. Д. Прочность и деформация горных пород в допредельной и запредельной областях // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископаемых. 1981. № 6. С. 3–11.

Москва

Поступила в редакцию  
28.III.1986