

УДК 533.6.013.42

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАССЫ,  
ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА УПРУГОМ КОЛЬЦЕ,  
ПРИ ДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ

ПЛАТОНОВ Э. Г., ФЕДОРОВ В. Е.

Приводится интегральная форма решения уравнений гидроупругости для упругого кольца с массой, описывающего движение рассматриваемой системы с одной степенью свободы при переменной во времени жесткости закрепления. В отличие от [1, 2] исследуются тангенциальные колебания массы, закрепленной в произвольной точке кольца. Изучен волновой механизм передачи возмущений в кольцевом волноводе и указаны возможные пути упрощения решения. Рассмотрен пример движения массы в направлении действия волны давления. Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными.

1. Постановка задачи и метод ее решения. Рассматривается процесс взаимодействия волны давления ступенчатого профиля с бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочкой, полностью погруженной в жидкость. Вдоль образующей оболочки жестко закреплена некоторая масса. Принимается, что фронт волны параллелен продольной оси оболочки. В такой постановке задача является плоской и сводится к упругому кольцу с жестко закрепленной в некоторой его точке сосредоточенной массой.

Используя моментную теорию тонких оболочек [3], систему уравнений динамического равновесия кольца можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial \theta + N &= \alpha \partial^2 v / \partial \tau^2 + \alpha m_0 \sigma_1 (\theta - \theta_0) \partial^2 v / \partial \tau^2 \\ T - \partial N / \partial \theta + \alpha \partial^2 w / \partial \tau^2 + \alpha m_0 \sigma_1 (\theta - \theta_0) \partial^2 w / \partial \tau^2 &= \frac{\alpha \beta}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \left[ \frac{\partial p_0(r, \psi, \xi)}{\partial r} \right]_{r=1} - \\ - \frac{\partial^2 w(\psi, \xi)}{\partial \xi^2} &] [F_0(\tau - \xi, |\theta - \psi|) + F_0(\tau - \xi, \theta + \psi)] d\psi d\xi + \alpha \beta p_0(r, \theta, \tau) \Big|_{r=1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$N = \partial M / \partial \theta$$

$$w = W/a, \quad v = V/a, \quad \tau = tc_0/a \quad (1.2)$$

$$p_0 = P_0 / (\rho_0 c_0^2), \quad \alpha = c_0^2 / c^2, \quad \beta = \rho_0 a / (\rho \delta)$$

$$r = R/a, \quad \varepsilon = 1/12 \delta^2 a^{-2}, \quad m_0 = M_0 / (2\pi a \rho \delta)$$

$$F_0(\theta, \tau) = (2/\pi) \sigma_0 (\tau - \theta) \exp(-\tau/2) \operatorname{ch} [1/2(\tau^2 - \theta^2)^{1/2}] (\tau^2 - \theta^2)^{-1/2}$$

$$T = T(1 - \mu^2) / (E\delta), \quad N = N(1 - \mu^2) / (E\delta), \quad M = M(1 - \mu^2) / (E\delta a)$$

Здесь  $W(\theta, t)$ ,  $V(\theta, t)$  — радиальные и тангенциальные перемещения кольца;  $T(\theta, t)$ ,  $N(\theta, t)$ ,  $M(\theta, t)$  — кольцевое усилие, перерезывающая сила и изгибающий момент соответственно;  $M_0$  — погонная масса;  $P_0(R, \theta, t)$  — волна давления ступенчатого профиля;  $R, \theta, t$  — цилиндрические координаты и время, отсчитываемое с момента встречи волны давления с оболочкой;  $\theta_0$  — точка закрепления массы;  $a, \delta$  — радиус и толщина кольца;  $E, \mu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала кольца,  $\rho c_0$  — акустическая жесткость кольца;  $\rho_0 c_0$  — акустическая жесткость воды;  $\sigma_0(x)$ ,  $\sigma_1(x)$  — функции Хевисайда и Дирака произвольного аргумента  $x$ .

Функция  $F_0(\theta, t)$  является переходной функцией процесса дифракции и излучения при обтекании волной давления поперечного сечения оболочки и деформации ее поверхности. Интегральная форма представления внешних сил, действующих на кольцо, заимствована из [4].

Вследствие линейности поставленной задачи возможно использование принципа суперпозиции упругих волн деформации, согласно которому вклады каждой волны в рассматриваемом сечении кольца должны суммироваться, например  $v(\theta, \tau) = \sum v_n(\theta + 2\pi n, \tau)$ . Ввиду этого периодичность функций от угловой координаты заменяется на бесконечный интервал  $-\infty < \theta < +\infty$ . В дальнейшем индекс  $n$  у исследуемых функций опускается.

Принимая во внимание симметричность нагружения кольца и условия периодичности для искомых функций, решение системы уравнений гидроупругости (1.1) целесообразно искать с помощью интегральных косинус- и синус-преобразований Фурье и преобразования Лапласа по времени [5].

**2. Интегральная форма решения уравнений гидроупругости.** Для применения интегральных преобразований Лапласа и Фурье к системе (1.1) запишем ее относительно искомых перемещений, используя известные в теории оболочек соотношения между усилиями и деформациями

$$\begin{aligned} T &= w + \partial v / \partial \theta, \quad N = -\varepsilon (\partial^3 w / \partial \theta^3 - \partial^2 v / \partial \theta^2) \\ M &= -\varepsilon (\partial^2 w / \partial \theta^2 - \partial v / \partial \theta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

С их помощью система уравнений (1.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\partial w / \partial \theta + \partial^2 v / \partial \theta^2 - \varepsilon \partial^3 w / \partial \theta^3 = \alpha \partial^2 v / \partial \tau^2 + \alpha m_0 \partial^2 v / \partial \tau^2 \sigma_1 (\theta - \theta_0) \\ &w + \partial v / \partial \theta + \varepsilon (\partial^4 w / \partial \theta^4 - \partial^3 v / \partial \theta^3) + \alpha \partial^2 w / \partial \tau^2 + \alpha m_0 \partial^2 w / \partial \tau^2 \sigma_1 (\theta - \theta_0) + \\ &+ \frac{\alpha \beta}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{\partial^2 w(\psi, \xi)}{\partial \xi^2} [F_0(\tau - \xi, |\theta - \psi|) + F_0(\tau - \xi, \theta + \psi)] d\psi d\xi = \\ &= \frac{\alpha \beta}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{\partial p_0(r, \psi, \xi)}{\partial r} \Big|_{r=1} [F_0(\tau - \xi, |\theta - \psi|) + F_0(\tau - \xi, \theta + \psi)] d\psi d\xi + \\ &+ \alpha \beta p_0(r, \theta, \tau) \Big|_{r=1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Домножая оба уравнения этой системы на  $\sin q\theta$ ,  $\cos q\theta$  и интегрируя их по параметру преобразования Фурье  $q$  в пределах от 0 до  $\infty$ , а также применяя преобразование Лапласа к полученным трансформантам Фурье, будем иметь

$$\begin{aligned} -q(1 + \varepsilon q^2) w^{FcL} &= (\alpha s^2 + q^2) v^{FsL} + \alpha m_0 s^2 v^L(\theta_0, s) \sin q\theta_0 \\ q(1 + \varepsilon q^2) w^{FsL} &= (\alpha s^2 + q^2) v^{FcL} + \alpha m_0 s^2 v^L(\theta_0, s) \cos q\theta_0 \\ &[1 + \varepsilon q^4 + \alpha s^2(1 + \beta F_0^{FcL})] w^{FcL} + q(1 + \varepsilon q^2) v^{FsL} + \\ &+ \alpha m_0 s^2 w^L(\theta_0, s) \cos q\theta_0 = \alpha \beta \Phi_0^{FcL}(q, s) \\ (1 + \varepsilon q^4 + \alpha s^2) w^{FsL} - q(1 + \varepsilon q^2) v^{FcL} + \alpha m_0 s^2 w^L(\theta_0, s) \sin q\theta_0 &= 0 \\ \Phi_0^{FcL}(q, s) &= [p_0^{FcL}(r, q, s) + (\partial p_0 / \partial r)^{FcL} F_0^{FcL}(q, s)]_{r=1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где индексами  $F_s$ ,  $F_c$ ,  $L$  обозначается результат применения синус-, косинус-преобразования Фурье и преобразования Лапласа соответственно,  $s$  — комплексный параметр преобразования Лапласа. Исключая из алгебраической системы трансформант искомых функций трансформанту радиаль-

ного смещения кольца, получим следующее уравнение уже относительно тангенциального смещения:

$$\begin{aligned} v^{FcL} \cos q\theta_0 + v^{FsL} \sin q\theta_0 + \alpha m_0 s^2 v^L(\theta_0, s) \varphi(q, s) = \\ = -\alpha \beta \Phi_0^{FcL} q(1 + \varepsilon q^2) \sin q\theta_0 \{ [1 + \varepsilon q^4 + \alpha s^2(1 + \beta F_0^{FcL})] (\alpha s^2 + q^2) - \\ - q^2(1 + \varepsilon q^2)^2 \}^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\varphi(q, s) = [1 + \varepsilon q^4 + \alpha s^2(1 + \beta F_0^{FcL})] \{ [1 + \varepsilon q^4 + \alpha s^2(1 + \beta F_0^{FcL})] (\alpha s^2 + q^2) - \\ - q^2(1 + \varepsilon q^2)^2 \}^{-1} \quad (2.5)$$

$$F_0^{FcL}(q, s) = (s^2 + s + q^2)^{-1/2}$$

Отметим, что функция  $\varphi(q, s)$  представляет собой изображение тангенциального смещения кольца в точке приложения сосредоточенной импульсной нагрузки типа функции Дирака.

Домножив уравнение (2.4) на  $2/\pi$  и проинтегрировав по переменной  $q$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получим

$$v^L(\theta_0, s) = R^L(s) v_0^L(\theta_0, s), \quad R^L(s) = \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha m_0 s^2 \varphi(q, s) dq \right]^{-1} \quad (2.6)$$

Здесь под  $v_0^L(\theta_0, s)$  понимается тангенциальное смещение упругого кольца без массы в точке ее закрепления. Вследствие нулевых начальных условий оригинал изображения (2.6) можно обобщить на все параметры тангенциального движения массы путем использования интегральной свертки

$$\frac{d^k v(\theta_0, \tau)}{d\tau^k} = \int_0^{\tau} \frac{d^k v_0(\theta_0, \xi)}{d\xi^k} R(\tau - \xi) d\xi \quad (k=0, 1, 2) \quad (2.7)$$

Полученная зависимость устанавливает интегральную связь между параметрами движения массы и гладкой оболочкой, т. е. оболочкой без массы. Функция  $R(\tau)$  представляет собой переходную функцию процесса передачи волновых возмущений кольца на массу. Физически она соответствует перемещению массы при скорости движения кольца, заданной функцией Хевисайда. С другой стороны, функция  $R(\tau)$  может рассматриваться как кинематическая реакция кольца на сосредоточенное инерционное воздействие массы.

Структура интегральной формы решения в точке  $\theta = \theta_0$  напоминает аналогичную структуру решения уравнения движения инерционной массы с переменной жесткостью крепления, когда точка крепления движется по заданному закону. Отмеченная аналогия просматривается яснее, если решение konstruировать на основе принципа динамических податливостей [6]. В целом интегральная зависимость (2.7) позволяет производить раздельное и независимое рассмотрение задач определения кинематической реакции кольца и определения тангенциальных перемещений кольца при действии волны давления. При этом появляется возможность использования различных физических гипотез, упрощающих решение каждой из указанных задач. В самом общем случае оригиналы функций, входящих в интегральную зависимость (2.7), находятся методами численного обращения изображений [7]. Однако с помощью метода аналитических аппроксимаций изображений Лапласа [8] возможны и приближенные решения, пригодные для инженерной практики.

**3. Кинематическая реакция кольца.** Из анализа механизма передачи неустановившихся волновых возмущений от упругого кольца на массу [1, 2] следует ожидать, что наибольшую часть волновой энергии в тангенциальном направлении передает продольная упругая волна, циркулирующая по кольцу как замкнутому волноводу. Причем влияние радиальных смещений может рассматриваться как некоторая движущаяся вдоль криволинейного стержня касательная нагрузка. Известно [6], что если кольцо находится в докритическом состоянии, то весь механизм волнообразова-

ния продольных волн достаточно полно вырисовывается на основе безмоментной теории оболочек. Вместе с тем при указанных условиях переходная функция  $F_0(\theta, \tau)$  может быть осреднена по угловой координате, учитывая эффект перетекания жидкости вдоль направляющей оболочки интегрально в соответствии с законом ее переносного движения. Учитывая все изложенное, примем в выражении (2.5)  $\varepsilon=0$ ,  $F_0^{FL}=(s+1)^{-1}$ . Тогда структура кинематической реакции упрощается и становится следующей:

$$R^L(s) = \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} m_0 \frac{\psi_*^2(s)}{q^2 + \psi_*^2(s)} dq \right]^{-1} \quad (3.1)$$

$$\psi_*(s) = (\alpha s^2 + (s+1)/(s+\beta+1))^{1/2}$$

На основании метода асимптотически эквивалентных функций [8] можно принять

$$\begin{aligned} \psi_*(s) &\approx \sqrt{\alpha} [(s+a_0)^2 + b^2]^{1/2} \\ a_0 &= [2\alpha(\beta+1)]^{-1}, \quad b_0 = [a_0(2-a_0)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В физическом смысле проведенное упрощение функции  $\psi_*(s)$  соответствует пренебрежению силами радиальной инерции кольца по сравнению с силами сопротивления жидкости, что допустимо только для тонких оболочек  $a/\delta \geq 50$ .

Вычисляя интеграл в выражении (3.1) и учитывая процесс наложения волн в точке  $\theta=\theta_0$ , находим

$$R^L(s) = \{1 + \sqrt{\alpha} m_0 [(s+a_0)^2 + b_0^2]^{1/2} \operatorname{cth} [\sqrt{\alpha} \pi [(s+a_0)^2 + b_0^2]^{1/2}]\}^{-1} \quad (3.3)$$

На основании теоремы Эфроса оригинал изображения (3.3) принимает вид

$$R(\tau) = \frac{\exp(-a_0\tau)}{\sqrt{\alpha} m_0} \left[ R_0(\tau) - b_0 \int_0^{\tau} R_0(\xi) \frac{I_1(b_0 \sqrt{\tau^2 - \xi^2})}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} \xi d\xi \right] \quad (3.4)$$

$$R_0(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp[-(\tau - 2\sqrt{\alpha} \pi n)/(\sqrt{\alpha} m_0)] \times \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &\times \{L_n[2/(\sqrt{\alpha} m_0)(\tau - 2\sqrt{\alpha} \pi n)] \sigma_0(\tau - 2\sqrt{\alpha} \pi n) - \exp(2\sqrt{\alpha} \pi/m_0) \times \\ &\times L_n[2/(\sqrt{\alpha} m_0)(\tau - 2\sqrt{\alpha} \pi n - 2\sqrt{\alpha} \pi)] \sigma_0(\tau - 2\sqrt{\alpha} \pi n - 2\sqrt{\alpha} \pi)\} \end{aligned}$$

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{(-1)^m x^m}{m!}$$

Здесь  $L_n(x)$  — полиномы Лагерра;  $I_1(x)$  — функция Бесселя первого рода. В интервале времени  $0 \leq \tau \leq 2\sqrt{\alpha} \pi$ , соответствующем первому циклу упругой волны, зависимость (3.4) может быть упрощена следующим образом:

$$R(\tau) = \exp\{-[a_0 + \alpha^{-1/2} m_0^{-1}] \tau\} \alpha^{-1/2} m_0^{-1} \quad (3.6)$$

**4. Тангенциальные смещения гладкой оболочки.** Исходя из безмоментной теории оболочек ( $\varepsilon=0$ ) и отсутствия массы ( $m_0=0$ ), из первого уравнения системы (2.2) получаем

$$\partial^2 v_0 / \partial \theta^2 - \alpha \partial^2 v_0 / \partial \tau^2 = -\partial w / \partial \theta \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) описывает равновесие криволинейного стержня под действием касательной нагрузки  $\partial w / \partial \theta$ , распространяющейся вдоль стержня с заданной скоростью.

Поскольку в докритическом состоянии оболочки основной вклад в формирование продольных упругих волн вносят перемещения ее переносного движения  $w_0(\theta, \tau) = w_1(\tau) \cos \theta$ , то, подставляя последние в уравнение (4.1), будем иметь

$$\partial^2 v_0 / \partial \theta^2 - \alpha \partial^2 v_0 / \partial \tau^2 = w_1(\tau) \sin \theta \quad (4.2)$$

Здесь функция  $w_1(\tau)$  отражает известный [9] временной закон переносного движения оболочки под действием волны давления в воде. При таком подходе, когда ко всем сечениям стержня прикладывается одновременно касательная нагрузка рассматриваемого типа, волновая картина распространения продольных волн исчезает. Однако временной характер перемещений каждого сечения стержня практически сохраняется. Это обстоятельство имеет весьма важное прикладное значение.

Применением интегральных преобразований Фурье и Лапласа можно получить решение уравнения (4.2) в интегральной форме

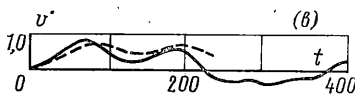
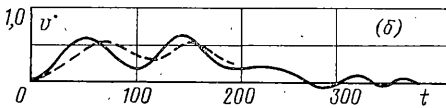
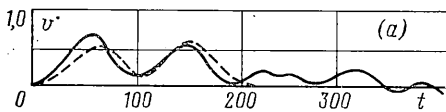
$$v_0(\theta, \tau) = \sin \theta \int_0^\tau \frac{w_1(\xi)}{\sqrt{\alpha}} \sin \frac{(\tau - \xi)}{\sqrt{\alpha}} d\xi$$

Отсюда видим, что в точке симметрии  $\theta = 0, \pi$  тангенциальные перемещения в кольце отсутствуют, а в точке  $\theta = \pi/2$  — достигают максимальной величины. Отметим, что максимальная величина скорости переносного движения оболочки достигается в сравнительно короткий интервал времени  $\tau_{\max} \leq 0,5$ . Если им пренебречь, то удастся построить приближенную диаграмму распределения максимальных скоростей продольных перемещений по периметру кольца. Действительно, в этом случае

$$dv_0(\theta, \tau) / d\tau = \sin \theta (dw_1/d\tau)_{\max} [1 - \cos(\tau/\sqrt{\alpha})] \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что в точке  $\theta = \pi/2$  максимальная величина скорости тангенциальных колебаний кольца равна удвоенному значению скорости его переносного движения, а период их колебаний соответствует времени одной циркуляции продольной волны упругих возмущений по периметру кольца, т. е. влияние массы на скорость тангенциальных перемещений кольца следует ожидать наибольшим в точке  $\theta_0 = \pi/2$  (в направлении действия волны давления в жидкости).

**5. Скорость движения массы в направлении действия волны давления.** Пусть масса  $M_0$  закреплена в точке  $\theta_0 = \pi/2$ . Тогда в соответствии с интегральной формулой (2.7) и представлением входящих в нее функций в виде (3.6), (4.3) скорость массы в направлении действия волны давления будет равна



$$dv/d\tau = (dw_1/d\tau)_{\max} D^{-1} \{1 - m_0^2 (m_0^2 + D^2)^{-1} \exp[-D\tau/(\sqrt{\alpha}m_0)] - D(m_0^2 + D^2)^{-1/2} \sin[\tau/\sqrt{\alpha} + \arctg(D/m_0)]\}, \quad D = 1 + \alpha_0 \sqrt{\alpha} m_0 \quad (5.1)$$

С помощью интеграла Дюамеля найденная закономерность изменения скорости во времени может быть распространена на волну давления произвольного профиля.

Для иллюстрации погрешности теоретической зависимости (5.1) на фигуре ( $t$  в мкс,  $v$  в м/с) приведено сравнение результатов расчета по этой зависимости (штриховая линия) и данных эксперимента (сплошная линия) для волны экспоненциального профиля ( $a$  — опыт 1,  $b$  — опыт 2,  $c$  — опыт 3). Видно, что наблюдается качественное и количественное соответствие сравниваемых кривых тангенциальных скоростей массы. В связи с этим допустимо использовать зависимость (5.1) для более общей оценки

влияния инерционности массы на скорость тангенциальных перемещений кольца. Можно показать, что

$$\tau_{\max} = \sqrt{\alpha} \left[ \frac{1}{2}\pi - \arctg(D/m_0) \right]$$

$$(dv/d\tau)_{\max} = (dw_1/d\tau)_{\max} [1 + D(m_0^2 + D^2)^{-1/2}] / D$$

Тогда введением нового параметра  $\xi = m_0 [2\sqrt{\alpha}(\beta+1)]^{-1}$  с помощью формулы (4.3) устанавливается относительная погрешность влияния инерционности массы на максимальную величину скорости тангенциального перемещения кольца  $\Delta = \xi(1+\xi)^{-1} [1 + 1/4 m_0 \xi^{-1} (1+\xi)^{-2}] 100\%$ . Из этой формулы следует, что для тонких оболочек  $a/\delta \sim 100$  с массой  $m_0 \leq 0,5$  указанная погрешность составит величину меньшую 10%. Вместе с тем влияние этой же массы на радиальную скорость перемещения кольца согласно [1, 2] оказывается весьма существенным. Это связано с тем, что жесткости кольца в радиальном и тангенциальном направлениях заметно отличаются. Таким образом, установленная относительная погрешность позволяет в каждом конкретном случае заранее определить необходимость учета инерционности массы на тангенциальные колебания кольца.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов Э. Г., Федорович Т. К. Кинематика движения сосредоточенных масс, закрепленных на упругом кольце при его динамическом нагружении // *Нелинейная теория оболочек и пластин: Тез. докл. симпоз.* Казань: Каз. физ.-техн. ин-т. 1980. С. 120.
2. Платонов Э. Г., Федорович Т. К. Параметры движения сосредоточенной массы, закрепленной на упругом кольце, при воздействии динамической нагрузки // *Исследования по теории оболочек: Труды семинара.* Казань: Каз. физ.-техн. ин-т. 1978. Вып. 10. С. 187–194.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1951. 344 с.
4. Платонов Э. Г. Интегральная форма внешних сил при взаимодействии акустической волны давления с цилиндрической оболочкой // *Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.* Тбилиси: Мецниереба. 1975. Т. 2. С. 310–316.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука. 1974. 542 с.
6. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение. 1972. 374 с.
7. Dubner M., Abate J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite tourier cosine transform // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1968. V. 15. № 1. P. 115–123.
8. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение. 1980. 343 с.
9. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение. 1970. 365 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
2.VII.1985