

УДК 539.375

ДИНАМИКА ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ ФАЗ

СИМОНОВ И. В.

Изучается нестационарное движение полубесконечного разреза по линии склейки двух упругих полуплоскостей под действием переменных касательных усилий (антиплоская деформация). Аналогично случаю однородной среды [1–4] закон движения края предполагается известным. Аналитическое решение получено методом факторизации, распространенным на задачи с подвижной точкой раздела граничных условий в [2, 3]. Найдены асимптотики у края разреза с оценкой остаточного члена, установлена зависимость свойств гладкости и непрерывности решения от аналогичных свойств входных функций задачи, изучено влияние неоднородности на коэффициенты интенсивности при нагрузках частного вида. Соответствующая автомобильная задача рассмотрена в [5].

1. Постановка и общее решение задачи. Составная упругая плоскость ($y > 0$ — среда 1, $y < 0$ — среда 2, $x = x_1$, $y = x_2$, x_3 — декартова система координат) содержит полубесконечный разрез $y = 0$, $x < 0$. Край разреза, начиная с момента времени $t = 0$, движется по закону $x = l(t)$. Причинами являются касательные усилия $\tau_-(x, t)$. Они антисимметрично приложены к берегам разреза и ориентированы в направлении оси x_3 , а сопротивление подвижке берегов разреза друг относительно друга отсутствует. На продолжении разреза выполнены условия полного контакта. Адекватное математическое описание задачи состоит в формулировке уравнений антиплоских движений составного упругого тела и смешанных краевых условий при $y = 0$ (начальные условия — нулевые):

$$\Delta u = c_j^{-2} u_{,tt}, \quad \sigma_{13} = \mu_j u_{,x}, \quad \sigma_{23} = \mu_j u_{,y} = \tau \quad (1.1)$$

$$\tau(x, 0, t) = \tau_-(x, t), \quad [\tau] = 0 \quad (x < l) \quad (1.2)$$

$$[\tau] = [u] = 0 \quad (x > l), \quad l(0) = 0, \quad 0 \leq l' = dl/dt < 1$$

$$u(x, y, 0) = u_{,t}(x, y, 0) = 0$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, индекс $j = 1, 2$ фиксирует среду, $c_1 = 1$, $c_2 = b^{-1} > 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu^{-1}$ — нормированные скорости поперечных волн и модули сдвига (среда 2 высокоскоростная), u — смещение, σ_{13} , σ_{23} — компоненты тензора напряжений, $[f] = f(x, +0, t) - f(x, -0, t)$ — скачок функций f при переходе через линию склейки. К системе уравнений (1.1), (1.2) необходимо добавить условие конечности и неотрицательности мощности: $0 \leq w < \infty$, выделяющейся в особой точке $x = l(t)$, $y = 0$. Оно обеспечивает единственность решения [3, 6].

Большими буквами обозначим преобразование Фурье по x и Лапласа по t с параметрами q и p [2], а индексами плюс и минус — слагаемые при разложении вида ($H(x)$ — функция Хевисайда): $\tau = \tau_+ + \tau_- \Rightarrow T = T_+ + T_-$, $\tau_{\pm} = \mp H(\pm x \mp l)$ ($y = 0$).

Из (1.1), (1.2) следуют обычные выражения для образов смещений точек границ верхней и нижней полуплоскости. Они имеют вид произведений изображений фундаментальных решений [2] на $T(p, q)$. Взяв разность этих соотношений, придем к основной задаче сопряжения неизвестных функций $[U]$ — скачка трансформанты смещения на разрезе и T_+ —

образа касательного напряжения на продолжении разреза

$$[U]_- = G(q, p)(T_+ + T_-), \quad G = A^\circ \kappa(\omega) / (p \sqrt{1 - \omega^2}) \quad (1.3)$$

$$\kappa = \frac{1}{1 + \mu} \left(1 + \mu \sqrt{\frac{1 - \omega^2}{b^2 - \omega^2}} \right), \quad \omega = \frac{iq}{p}, \quad A^\circ = -1 - \mu$$

Ограничимся поиском и анализом функций τ_+ и $[u]_-$ — выход с границ в глубь областей затем можно осуществить по обычным интегральным формулам [7]. Для униформизации радикалов проведем разрезы в плоскости ω , соединяя точки $\omega = \pm 1$, $\pm b$ через бесконечность, и считаем, что $(c_j^{-2} - \omega^2)^{1/2} = c_j^{-1}$ при $\omega = 0$. Для радикала, входящего в выражение для функции $\kappa(\omega)$, разрезы суть $\omega = \xi \pm i \cdot 0$, $b \leq |\xi| \leq 1$.

Задача (1.1)–(1.3) сходна с аналогичной проблемой в динамике трещин, вспарывающих однородную среду [1–3]. Следуя [2, 3], попытаемся найти представление коэффициента задачи (1.3) в виде

$$G = A^\circ G_+ G_-, \quad P_\pm = G_\pm^{-1} \quad (1.4)$$

при условии, что оригиналы функций G_+ , P_+ обращаются в нуль при $x < t$, а оригиналы функций G_- , P_- — при $x > 0$ на всем интервале времени наблюдения (здесь учтено ограничение $0 \leq l' < 1$). Тогда решение задачи (1.1), (1.2) согласно [2, 3] записывается в виде свертки по переменным x и t :

$$\tau_+ = -p_+ ** \{\psi H(x - l)\}, \quad \psi = g_+ ** \tau_- \quad (1.5)$$

$$[u]_- = A^\circ g_- ** \{\psi H(l - x)\}$$

Факторизация функции $\kappa(\omega)$ аналогична [2, 3] и сводится к интегрированию $\ln \kappa$ по берегам разрезов $\omega = \xi \pm i \cdot 0$, $b \leq |\xi| \leq 1$ (особые интегралы понимаются в смысле главного значения):

$$\kappa = \kappa_+ \kappa_-, \quad \kappa_\pm = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_b^1 \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha \mp \omega} \right\} \quad (1.6)$$

$$0 \leq \varphi = \arctg \{ \mu [(1 - \alpha^2) / (\alpha^2 - b^2)]^{1/2} \} \leq \pi/2, \quad \kappa_-(\omega) = \kappa_+(-\omega)$$

$$\kappa_+(\xi \pm i \cdot 0) = \kappa_+(\xi) \exp[\pm \varphi(\xi)] \quad (b < \xi \leq 1)$$

$$\kappa_0(\xi) = |\xi - b|^{1/2} \kappa_+(\xi) = O(1) \quad (\xi \rightarrow 1, b)$$

Функции $\kappa_\pm$ имеют корневую особенность в точках $\omega = \pm b$, а у функции $\kappa_0(\xi)$ таковая отсутствует. Функции $G_\pm$ определим равенством

$$G_\pm = \kappa_\pm(\omega) (p \mp iq)^{-1/2} \quad (1.7)$$

По формулам обращения изображений вида $f_1(p)f_2(q/p)$ [2, 3] (необходимым ограничением функции $G_\pm$ и $P_\pm$ удовлетворяют) при использовании правил дифференцирования свертки обобщенных функций [8] и контурного интегрирования, конкретизированного в [9], из (1.6), (1.7) получим следующие формулы для оригиналов g_+ и p_+ ($\delta(x)$ — дельта-функция):

$$g_+ = (\pi x^3)^{-1/2} H(x) f_0'(v) = (\pi x^3)^{-1/2} [H(1-v)H(v-b)F_0'(v) + (1-b)^{-1/2} \kappa_0(b) \delta(v-b) + \kappa_+(1) \delta(v-1)] H(x), \quad v = t/x \quad (1.8)$$

$$p_+ = -D_{xt} [(\pi x^3)^{-1/2} H(x) f_1'(v)] = -D_{xt} \{ (\pi x^3)^{-1/2} H(x) [H(1-v) \times \\ \times H(v-b)F_1'(v) - \kappa_+^{-1}(1) \delta(v-1)] \}$$

где $f_k(v)$ — обобщенные, а $F_k(v)$ — обычные функции, связанные соотно-

шением

$$f_k(v) = H(1-v)H(v-b)F_k(v) + (-1)^k H(v-1) \quad (k=0, 1) \quad (1.9)$$

$$F_k = \frac{1}{\pi} \int_b^v \frac{\kappa^{1-2k}(\xi) \sin \varphi(\xi)}{\sqrt{(1-\xi)(v-\xi)}} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_b^v \frac{Q_k(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi-b)(v-\xi)}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q_k[\xi(v)] dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$F_k' = \frac{dF_k}{dv} = \frac{1}{\pi} \int_b^v \sqrt{\frac{\xi-b}{v-\xi}} \frac{Q_k'(\xi)}{v-b} d\xi, \quad Q_k = \sqrt{\frac{\mu^2(1+\xi)}{(1-\mu^2)\xi^2 + \mu^2 - b^2}} \frac{(\xi-b)^k}{\kappa_0^{2k-1}(\xi)}$$

$$0 \leq Q_k < \infty \quad (b \leq \xi \leq 1), \quad D_{xt} = \partial/\partial x + \partial/\partial t$$

$$\xi = \frac{1}{2}(v+b) + \frac{1}{2}(v-b)v$$

Приведем также некоторые значения функций и интегралов, вычисленных методом контурного интегрирования (при этом $\kappa_{\pm}^{\pm 1}(\omega) [(\omega-1) \times (\omega-v)]^{-1/2}$ — вспомогательные функции комплексного переменного):

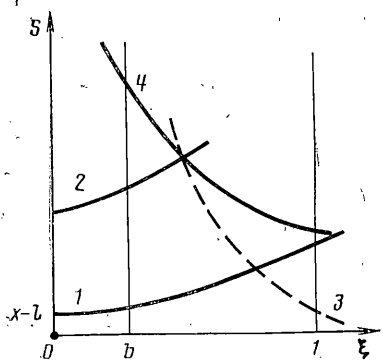
$$F_0(1) = 1 - \kappa_+(1), \quad F_1(1) = \kappa_+^{-1}(1) - 1, \\ F_1(b) = 0 \quad (1.10)$$

$$F_0(b+0) = \frac{\kappa_0(b)}{\sqrt{1-b}}, \quad \int_{b-0}^v f_k'(\xi) d\xi = f_k(v),$$

$$f_k(v) = (-1)^k \quad (v > 1)$$

$$\int_{b-0}^{1+0} \frac{f_k'(\xi) d\xi}{\sqrt{m \pm \xi}} = (-1)^k \frac{\kappa_+^{1-2k}(\mp m)}{\sqrt{m \pm 1}}$$

$$(m > 1, k=0, 1)$$



Формулы для свертки $g_{\pm}, p_{\pm}$ получаются из (1.8) заменой x на $(-x)$. Носители функций $g_{\pm}, p_{\pm}$ сосредоточены в секторах $b \leq \pm t/x \leq 1$, следовательно, факторизация (1.4) осуществлена. Запишем теперь результат для напряжения (1.5) в развернутом виде

$$\tau_+ = D_{xt} \left\{ \int_b^1 F_1'(\xi) \int_0^{s_*(\xi)} \frac{\psi(x-s, t-\xi s)}{\sqrt{\pi s}} ds d\xi - \int_0^{s_*(1)} \frac{\psi(x-s, t-s)}{\kappa_+(1) \sqrt{\pi s}} ds \right\} =$$

$$= \int_{b-0}^{1+0} f_1'(\xi) \left\{ \frac{\psi(x-s_*, t-\xi s_*) D_{xt} s_*}{\sqrt{\pi s_*}} + \int_0^{s_*(\xi)} \frac{D_{xt} \psi(x-s, t-\xi s)}{\sqrt{\pi s}} ds \right\} d\xi$$

$$s_* = \min(s_1, s_2), \quad x-s_1 = l(t-\xi s_1), \quad s_2 = (t-bx)/(1-\xi)$$

где уравнение для s_1 однозначно разрешимо.

Область интегрирования Ω_{τ} лежит в полосе между характеристиками $b \leq \xi \leq 1$ ниже кривой $s=s_1(\xi)$ при $x < t$ (кривая 1 на фигуре), ниже кривых $s=s_1$ и $s=s_2$ при $b < t/x < 1$ (кривые 2 и 3); при $t/x \rightarrow b+0$ площадь Ω_{τ} исчезает и $\tau_+ = 0$ при $x > t/b$ — возмущения еще не пришли в точку наблюдения. В (1.11) учтено, что $\psi = \psi_0 H(t-bx)$.

Приведем общее решение для скачка смещений

$$[u] = A^0 \int_{b-0}^{1+0} f'(\xi) \int_0^{s^0} \frac{\psi(x+s, t-\xi s)}{\sqrt{\pi s}} ds d\xi \quad (1.12)$$

$$s^0 = \min(s_3, t/\xi), \quad x+s_3 = l(t-\xi s_3)$$

Раскроем свертку для ψ в (1.5) ($\tau_- = \tau^\circ H(l-x)$):

$$\begin{aligned} \psi = & \int_{b-0}^{1+0} f_0'(\xi) \int_{s_0(\xi)}^{t/\xi} \frac{\tau^\circ(x-s, t-\xi s)}{\sqrt{\pi s}} ds d\xi = \int_b^1 F_0'(\xi) \int_{s_0(\xi)}^{t/\xi} \frac{\tau^\circ(x-s, t-\xi s)}{\sqrt{\pi s}} ds d\xi + \\ & + \frac{\kappa_0(b)}{\sqrt{1-b}} \int_{s_0(b)}^{t/b} \frac{\tau^\circ(x-s, t-sb)}{\sqrt{\pi s}} ds + \kappa_+(1) \int_{s_0(1)}^t \frac{\tau^\circ(x-s, t-s)}{\sqrt{\pi s}} ds \\ & s_0=0 \quad (x \leq l), \quad s_0=s_1 > 0 \quad (x > l) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Область интегрирования Ω_ψ в (1.13) расположена в полосе $b \leq \xi \leq 1$ между кривыми 1, 2 или между прямой $s=0$ и кривой 4: $s=t/\xi$ (фигура).

2. Асимптотики вблизи края разреза. Изучение решения на множестве обобщенных входных функций задачи. Универсальные функции F_h дважды (и более) непрерывно дифференцируемы на отрезке $[b, 1]$. Доказательство основано на изучении свойства гладкости производной

$$\frac{d\kappa_0}{d\xi} = \frac{\kappa_0}{\pi} \int_b^1 \frac{\varphi'(\alpha) d\alpha}{\alpha - \xi}$$

при использовании (1.9) и результатов [10]. Поэтому для достаточно гладких входных функций $l'(t)$, $\tau^\circ(x, t)$ ($|x| < \infty$, $t \geq 0$) функция $\psi(x, t)$ будет многократно дифференцируемой всюду и будет порождать достаточно гладкое решение τ_+ , $[u]$ вне окрестности точки $x=l$. При $x \rightarrow l$ возникает особенность из-за (слабой) особенности ядер интегральных операторов. Для выявления асимптотики функции τ_+ при $x \rightarrow l+0$ воспользуемся формулой (1.11), асимптотическими равенствами

$$s_* = \frac{x-l(t)}{1-\xi l'(t)} (1+o(1)), \quad D_{x,t} s_* = \frac{1-l'}{1-\xi l'} (1+o(1)) \quad (x \rightarrow l+0)$$

и оценкой вклада первого слагаемого в (1.11) с учетом (1.10) — второе слагаемое дает $O(\sqrt{x-l})$. Окончательно (здесь же приведем асимптотику функции $[u]$, исходя из (1.12)):

$$\tau_+ \sim N_3(x-l)^{-1/2} \quad (x \rightarrow l+0), \quad [u] \sim M_3(l-x)^{1/2} \quad (x \rightarrow l-0) \quad (2.1)$$

$$N_3 = - \sqrt{\frac{1-l'}{\pi}} \frac{\psi(l, t)}{\kappa_+(m)}, \quad M_3 = \frac{2A^\circ \kappa_-(m)}{\sqrt{\pi(1+l')}} \psi(l, t)$$

При стремлении параметров среды 2 к параметрам среды 1 найденное решение переходит в решение для трещины продольного сдвига в однородной среде [1]. При этом $\kappa_\pm(\omega) \rightarrow 1$, $|\omega| < \infty$ — эти функции учитывают разную скорость распространения сигнала и отсутствуют в [1].

Изучим применимость формул (2.1) для негладких нагрузок. Это важно, поскольку такие нагрузки более типичны и реально могут возникать при действии точечных и распределенных источников, при мгновенном снятии статических напряжений и так далее. Кроме того, для проведения вычислений полезно знать, в каком классе функций тогда оказываются свертки ψ , τ_+ , $[u]$ вне окрестности кончика трещины. Введем в рассмотрение линейное множество регулярных обобщенных функций $h^o(\Omega)$ с носителем $\Omega(x, t)$. Всякий элемент этого множества есть достаточно гладкая почти всюду в Ω функция. Точки нерегулярности составляют конечное число гладких линий

$$L_k = \{(x, t): \varphi_k = A_k x + B_k(t) = 0 \cap (x, t) \in \Omega\} \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

$$A_k \in R^1, \quad B_k \in C^n \quad (n > 1), \quad \nabla \varphi_k|_{L_k} \neq 0, \quad \infty$$

в которые могут включаться участки кусочно-гладкой границы Ω . Около

каждой такой линии в полоске Ω_k , содержащей L_k , простейший элемент $\tau \in h^\rho$ допускает представление $(\varphi_+^\rho - \text{обобщенная функция [8]})$:

$$\tau = \tau_{1k}(\varphi_k)_+^\rho + \tau_{2k}, \quad \tau_{1k}, \tau_{2k} \in C^n(\Omega_k) \quad (2.2)$$

$$-\infty < \rho_k \leq 1, \quad \rho = \min \rho_k$$

Другие элементы получаются суперпозицией конечного числа функций (2.2). На конечном числе пересечений полосок Ω_k и Ω_j (окрестностей точек пересечения особых линий) функции τ_{1k} и τ_{2k} при стремлении точки к кривой L_j имеют поведение, сходное с поведением функции τ почти всюду около линий L_k . Имеют место вложения $h^\rho \in H^\rho$ (H^ρ — пространство Соболева — Слободецкого); h^0 — подмножество кусочно-непрерывных функций; $h^\rho \in H_\rho$ при $0 < \rho \leq 1$ (H_ρ — пространство функций, непрерывных по Гельдеру). В общем случае $\tau^\circ \in H^\rho$, по-видимому, можно получить весьма ограниченную информацию относительно гладких свойств решения, например, показать, что $\tau_+ \in H^{-1/2}$ для $\rho > -1/2$. На множестве h^ρ можно доказать более сильные утверждения.

Утверждения. Пусть $\tau^\circ \in h^\rho(\Omega)$, $-1/2 < \rho \leq 1$, $\Omega = \{(x, t): |x| < \infty, t \geq 0\}$, $l'(t) \in h^\lambda(t \geq 0)$, $\lambda \geq \rho + 1/2$, т. е. функция l' по крайней мере непрерывна по Гельдеру. Тогда

$$1^\circ. \psi = K_\psi \tau^\circ \in h^{\rho+1}(\Omega_\varepsilon), \quad \psi \in h^{\rho+1/2}(\Omega_{-0}) \quad (2.3)$$

$$2^\circ. \tau_+ = K_\tau \tau^\circ \in h^{-1/2}(\Omega_{+0}), \quad \tau_+ \in h^{\rho+1/2}(\Omega_\varepsilon)$$

$$3^\circ. [u] \in h^{1/2}(\Omega_{-0}), \quad [u] \in h^{\rho+1}(\Omega_{-\varepsilon})$$

$$\Omega_{\pm\varepsilon} = \{(x, t): \pm x \geq \pm l + \varepsilon \cup t \geq 0\}, \quad \varepsilon = \text{const} > 0$$

4°. Сохраняют силу асимптотические формулы (2.1), причем оценка остатка в асимптотике напряжения τ_+ есть $O((x-l)^{\rho_0})$, $\rho_0 = \min(\rho, 1/2)$, в асимптотике скачка смещения $[u]$ оценка есть $O(x-l)$.

В силу линейности множества h^ρ и достаточной гладкости обычных функций в (2.2) при доказательстве достаточно рассмотреть нагрузки вида

$$\tau^\circ = (\tau_1 f_+^\rho + \tau_2) H(t) \in h^\rho \quad (\tau_1, \tau_2 \in C^n(\Omega)) \quad (2.4)$$

где $f = Ax + Bt + D$ — главная линейная часть одной из функций φ_k в окрестности некоторой точки на L_k , $A^2 + B^2 \neq 0$. В (2.4) следует считать $-1/2 < \rho \leq 0$, если $A \neq 0$ и τ_1 или $\tau_2 \neq 0$ почти всюду при $t=0$. В случае $A \neq 0$ и $\tau_1 = \tau_2 = 0$ (при $t=0$) $-1/2 < \rho \leq 1$. Наконец, если $A=0$, то $D=0$ и $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2=0$ при $t=0$. В последнем случае число ρ ($-1/2 < \rho \leq 1$) определяет особенность на линии $t=0$. Эта граница ничем не выделяется, но возможность пересечения особых линий изучена на примере пересечения прямых $f=0$ и $t=0$. Физически (2.4) означает, что рассматривается дифракция плоской волны на нестационарно движущемся разрезе. След фронта этой волны несет на себе особенность напряжения порядка ρ . Допускается возможность мгновенного включения нагрузки, а если $\rho=0$ — напряжение, испытывает скачок конечной амплитуды на фронте, то характер особенности функции τ° на линиях $f=0$ и $t=0$ будет одинаковым.

Охарактеризуем обратные операторы K_τ и K_ψ , заданные формулами (1.11) и (1.13). Оператор K_ψ представлен суммой интегральных операторов типа свертки по одной или двум переменным. Каждый из них действует так, что функция сначала свертывается с полярным ядром $s^{-1/2}$, при повторном интегрировании — с достаточно гладкой функцией.

Оператор K_τ определен как произведение операторов K_τ° и K_ψ : $K_\tau = K_\tau^\circ K_\psi \tau^\circ = K_\tau^\circ$. Из первой формулы (1.11) следует, что K_τ° равен произведению оператора однократного дифференцирования по одному из характеристических направлений на оператор типа K_ψ . Дальнейший ход доказательства заключается в изучении действия указанных операторов на функции вида (2.4). Удастся выделить асимптотики решения около фронтов дифрагированных волн и вблизи края разреза (этому способствуют исчезновения областей интегрирования Ω_τ и Ω_ψ при стремлении точки наблюдения к особым линиям). Вообще говоря, однократное дифференцирование и свертка с полярным ядром ($0 < \nu < 1$ — показатель сингу-

лярности ядра) действуют из h^0 в h^{p-1} и h^{p+1-v} соответственно. Исключение в (1.11), (1.13) составляют вырожденные случаи, когда эти операции, проводимые по характеристическим направлениям на плоскости (x, t) , не выводят функцию из h^0 . К ним относятся случаи $-B/A=b, 1$, когда скорости следа волны равны скоростям $c_{1,2}$. Конкретизация (2.4) позволяет рассмотреть такие ситуации отдельно и показать, что решение в вырожденных случаях имеет те же особенности, что и в обыкновенных (причина следующая: области Ω_ψ и Ω_τ оказываются срезанными так, что интегрирование около фронта нагрузки $f=0$ исключается, а операции дифференцирования и свертки в (1.11) согласованы). При изучении действия интегральных операторов с полярным ядром использовались методы [11]. Повторное интегрирование по ξ в (1.11)–(1.13) (следствие неоднородности) не изменяет вывода о принадлежности решения тому или иному множеству, поскольку, согласно доказанному, F_h' — гладкие функции. Физически это означает, что неоднородность в рассматриваемой задаче не влияет на характер особенностей решения.

В частности, свертки в Ω_ϵ могут быть более гладкими, чем это указано в (2.3). Так будет до пересечения особой линии $f=0$ края трещины $x=l$, а этот момент времени может и не наступить. В результате дифракции особенности напряжения τ_+ порядка $\rho^{+1/2}$ реализуются на отпавших от края разреза характеристиках с наклонами b' или 1 (например, падает «ступенька», отражаются цилиндрические волны с корневым ростом напряжений на фронтах — известный из теории дифракции факт).

Обсудим вывод 4°. Независимо можно установить, что сходные асимптотики имеют место при стационарном движении разреза и получаются априори в общей задаче нестационарного движения разреза по границе раздела при помощи принципа микроскопа (сходство заключается в одинаковости показателей, углового распределения функций и связи между коэффициентами N_3 и M_3). Однако в последнем случае необходимо обоснование замораживания времени и с этой целью высказывались гипотеза квазистационарности, требования отсутствия разрывов или высоких частот в спектре падающих волн. Утверждение 4° гласит, что если особенность в падающей волне слабее, чем корневая ($\rho > -1/2$ — плотность энергии деформаций, интегрируема), то асимптотики (2.1) сохраняют силу. Это расширяет предполагаемые ранее границы применимости известного метода априорного исследования особенности в динамике, который заключается в постановке и решении канонической сингулярной задачи. Последняя получается при переходе к растянутому подвижному координатам в исходной задаче и замораживании времени (принцип микроскопа). Из рассмотренного также следует, что если $t=0$ — момент начала дифракции, то зона действия асимптотик (2.1) ограничена условием $0 < x \ll t$, т. е. они вырабатываются на расстояниях, много меньших длин пробега фронтов дифрагированных волн.

3. Частные случаи нагружения. Влияние неоднородности. По формулам (1.13), (2.1) вычислим свертку ψ и коэффициент N_3 для ступенчатой нагрузки $\tau^0 = H(t) \in h^0$:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^0 t_+^{-1/2} \in h^{1/2} \quad (x \leq l), \quad N_3 = N^0 t_+^{-1/2}, \quad \psi^0 = 2\pi^{-1/2} \kappa_+(0) \quad (3.1) \\ N^0 &= -\frac{2\kappa_+(0)}{\pi \kappa_+(m)} \sqrt{1-l}, \quad \psi = 2 \int_{b=0}^{1+0} f_0'(\xi) \frac{\sqrt{t-s_0}}{\sqrt{\pi \xi}} H(t-s_0) d\xi \in h^1 \quad (x > l) \\ s_0 &= s_0(x, t, \xi), \quad t_+^\lambda = t^\lambda \quad (t > 0), \quad t_+^\lambda = 0 \quad (t < 0) \end{aligned}$$

Отсюда суперпозицией можно получить другие результаты, например для линейно нарастающей нагрузки $\tau^0 = t_+ = t_+^1$:

$$\psi = {}^2/3 \psi^0 t_+^{3/2} \quad (x \leq l), \quad N_3 = {}^2/3 N^0 t_+^{3/2} \quad (3.2)$$

и для нагрузки треугольной формы $\tau^0 = a_1 t_+ - a_2 (t-t_1)_+ + (a_2 - a_1) (t-t_2)_+$ с временем нарастания $t_1 > 0$ и полным временем действия $t_2 = a_2 t_1 / (a_2 - a_1)$, $0 < a_1 < a_2$:

$$N_3 = {}^2/3 N^0 [a_1 t_+^{3/2} - a_2 (t-t_1)_+^{3/2} + (a_2 - a_1) (t-t_2)_+^{3/2}] \quad (3.3)$$

l^*	n_m	b_m^2	n_m	b_m^2	n_m	b_m^2	n_m	b_m^2
0,5	1,080	0,27	1,143	0,24	1,243	0,19	1,389	0,14
0,7	1,102	0,34	1,183	0,29	1,310	0,23	1,494	0,18
0,9	1,158	0,46	1,285	0,43	1,485	0,37	1,776	0,28
0,95	1,196	0,54	1,357	0,51	1,613	0,44	1,989	0,36
0,97	1,225	0,62	1,412	0,56	1,713	0,50	2,160	0,40
0,99	1,284	0,70	1,527	0,65	1,932	0,60	2,554	0,53

Максимум последнего выражения достигается при $t=t_m=t_1/(1-a_1^2/a_2^2)$, $t_1 < t_m < t_2$ и вопрос страгивания трещины сводится к сравнению значения $N_3(t_m)$ с предельным динамическим коэффициентом интенсивности при страгивании. Приведем результат для подвижной нагрузки $\tau^\circ = H(x+ct)$:

$$\psi = \frac{2\kappa_-(c^{-1})}{\sqrt{\pi(1+c)}}(x+ct)_+^{1/2} \rightarrow \frac{2\kappa_+(0)}{\sqrt{\pi}}t_+^{1/2}, \quad c \rightarrow \infty \quad (x \geq l, c > 0)$$

Изучим влияние неоднородности на величину N_3 . Ее зависимость от скорости в (2.1) представлена множителем $(1-l^*)^{1/2}/\kappa_+(m)$, от упругих параметров $-\psi(l, t)/\kappa_+(m)$; в (3.1)–(3.3) этот множитель равен $\kappa_+(0)/\kappa(m) = n^\circ$. Отметим, что $n^\circ = N^\circ/N_*^\circ$, где N_*° – значение N° для однородной среды. Поэтому величина n° характеризует изменение коэффициента N_3 в зависимости от параметров μ , b для нагрузок, не зависящих от координаты; $n^\circ = 1$ для жесткой среды 2 в смысле $\mu \rightarrow 0$, что отражает свойство симметрии. Поскольку $n^\circ = 1$ для крайних ситуаций (среда 2 тождественна среде 1, среда 2 – жесткая), то экстремальные значения эта величина принимает при промежуточных значениях упругих параметров. Установим эти значения. Сначала получим оценки величины $\kappa_+(m)$ при $m > 1$: $\sqrt{(m-1)(m-b)} < \kappa_+(m) \leq 1$ (замена ψ на $\pi/2$ в (1.6)), $e^{-1} < \kappa_+(m) \leq 1$, $\varphi \leq 1/2\pi[(1-\alpha)/(1-b)]^{1/2}$, $\mu \leq \pi/2$.

Имеем $c_2 \geq 1$, $0 \leq \mu \leq d = d_1/d_2$ – относительная плотность. Поэтому

$$\kappa_+^2(0) = (1 + \sqrt{\mu d})/(1 + \mu) = 1 \quad (\mu = 0, d), \quad \kappa_+(0) > 1 \quad (0 < \mu < d)$$

$$\kappa_m^2 = \max_{0 \leq \mu \leq d} \kappa_+^2(0) = 1/2(1 + \sqrt{1+d}) \rightarrow 1, \infty \quad (d \rightarrow 0, \infty) \quad (3.4)$$

и достигается при $0 < \mu_m = 1 + 2d^{-1} - 2(d^{-1} + d^{-2})^{1/2} < d$. Таким образом, величина $\kappa_+(0)$ неограничена. Однако если плотность ограничить сверху, то экстремум вычисляется по формуле (3.4), например $d \leq 3$, $1 \leq \kappa_+^2(0) \leq 1,22$. Объединяя полученные оценки при $0 \leq \mu \leq \min(d, \pi/2)$, будем иметь следующую оценку величины n° :

$$1 \leq n^\circ < e^{[1/2(1 + \sqrt{d+1})]^{1/2}} = n_* \quad (e < n_* < 3,34, d \leq 3)$$

В таблице приведены численные значения относительных максимумов функции n° (с точностью до трех знаков) при варьировании параметра μ ($b^2 = \mu/d$): $n_m = \max_{0 \leq b < 1} n^\circ(b^2, l^*, d)$ ($l^*, d = \text{const}$) и параметров $b_m^2 = b_m^2(l^*, d)$, где эти максимумы достигаются (точность $\pm 0,01$). Первая пара столбцов значений n_m и b_m^2 соответствует величине $d = 0,5$, вторая пара – $d = 1$, третья – $d = 2$, четвертая – $d = 4$. Видно, что n_m – монотонно возрастающая функция скорости l^* при $d = \text{const}$ и относительной плоскости d при $l^* = \text{const}$, имеет конечный предел при $l^* \rightarrow 1$, где производная функции $\kappa_+(m)$ имеет корневую особенность. При $l^* \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$, $\kappa_+(m) \rightarrow 1$) экстремум (n_m, b_m^2) тяготеет к изученной точке $(\kappa_m, \mu_m/d) = (n_m, b_m^2)|_{l^* \rightarrow 0}$. При $l^* = 0,5$ величина n_m приблизительно на 3–10% выше соответствующего значения κ_m ($0,5 \leq d \leq 4$). При $l^* \rightarrow 1$ это превышение более значительно: $n_m - 1 = k(\kappa_m - 1)$, $k = 5 \div 6$ ($l^* = 0,99$), а положение максимума существенно сдвигается вправо. Что касается графиков функции $n^\circ(b^2)$ при фиксированных значениях параметров d и l^* ($0,5 \leq d \leq 16$, $0,5 \leq l^* \leq 0,99$ – диапазоны, из которых брались значения d и l^* при расчетах), то они имеют простой вид: куполообразная кривая соединяет точки $(1, 0)$, (n_m, b_m^2) , $(1, 1)$ на плоскости n°, b^2 .

Итак, для разнородных тел значения динамических коэффициентов интенсивности при тех же нагрузках на берега трещины оказываются выше, чем для однородной среды, а верхняя грань этого превышения недо-

стижима в отличие от статического случая, когда зависимость от упругих параметров отсутствует и

$$N_3 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau_-(-s) ds}{\sqrt{s}}$$

Рассмотрим действие подвижной сосредоточенной силы $\tau_- = H(t) \times \delta(x-ct)$ ($l(0) > 0$, $l(t) \geq ct$, $c < 1$) и вычислим ($|x| < \infty$):

$$\psi = \frac{(x-ct)_+^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_b^{\min(1, t/x)} \frac{F_0'(\xi) d\xi}{\sqrt{1-c\xi}} + \frac{\kappa_0(b) H(t-bx)}{\sqrt{(1-bc)(1-b)}} + \frac{\kappa_+(1) H(t-x)}{\sqrt{1-c}} \right\}$$

Соответствующее «установившееся» значение определяется формулой $\psi = (x-ct)_+^{-1/2} \kappa_+(c^{-1}) / \sqrt{\pi(1-c)}$ ($x < t$) и, если $l \rightarrow L+ct$, $t \rightarrow \infty$ ($c > 0$), то $N_3 \rightarrow -(\pi L^{1/2})^{-1}$ — решение, выходит на стационарный режим. При $c=0$ результат упрощается

$\psi = (\pi x)_+^{-1/2} F_0(t/x)$ ($b < t/x < 1$), $\psi = (\pi x)_+^{-1/2}$ ($x < t$) (3.5) и можно вычислить на характеристиках $t = bx$, $t = x$ скачки $\kappa_0(b) [\pi x \times (1-b)]^{-1/2}$, $\kappa_+(1) (\pi x)^{-1/2}$.

Фундаментальное решение получается подстановкой (3.5) в (1.11), (1.12) с предварительной заменой t на $t-t_0$, x на $x-x_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042–1049.
2. Слепня Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение. 1981. 295 с.
3. Сарайкин В. А., Слепня Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 54–73.
4. Молчанов А. Е., Никитин Л. В. Динамика трещины продольного сдвига после потери устойчивости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 60–68.
5. Coussy O. Brittle fracture of an interface in antiplane transient motion // C. r. Acad. sci. Paris. 1984. Ser. 2. V. 299. No. 16. P. 1101–1104.
6. Freund L. B., Clifton R. J. On the uniqueness of plane elastodynamic solution for running cracks // J. Elast. 1974. V. 4. No. 4. P. 293–299.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Гольфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1959. 470 с.
9. Симонов И. В. Нестационарное движение трещины поперечного сдвига на границе раздела упругих сред // ПМТФ. 1986. № 6. С. 129–138.
10. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука. 1980. 121 с.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука. 1974. 672 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.1986